WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

21. August 2008

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Finden Sie eine komplexe Zahl z mit $z^2 = -8I$!

2) Bestimmen Sie die reelle FOURIER-Reihe von $f(t) = 8\cos^4 t - 4\cos^2 t$!

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

4) *Richtig oder falsch:* Für jede reelle $n \times n$-Matrix A ist $e^{A+A^2} = e^A \cdot e^{A^2}$.

5) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 6\sqrt[3]{y(t)}$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

6) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\dot{x}(t) = x(t) - y(t)^2 \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = x(t)^2 - y(t)^2 \,!$$

Aufgabe 1: (*6 Punkte)*

a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ kann $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ax+b}{x^2+b}\,dx$ mit Hilfe des Residuensatzes berechnet werden?

b) Berechen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{12}{x^2+9}\,dx$!

Aufgabe 2: (*6 Punkte)*
Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode 2π und für $-\pi \le t \le \pi$ sei $f(t) = t^2$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f über dem Intervall $[-5\pi, 5\pi]$!

b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !

d) Wo tritt bei der Konvergenz dieser FOURIER-Reihe das GIBBS-Phänomen auf, und wohin konvergiert die Reihe an diesen Punkten?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Funktion $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{für } 0 \le |t| \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$!

b) Was ist die LAPLACE-Transformierte von f ?

c) Wo verschwindet die Faltung $f * f$?

d) Was ist die FOURIER-Transformierte von $f * f$?

Aufgabe 4: *(12 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt?

d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

e) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = -x(t) - 4z(t), \quad \dot{y}(t) = -2y(t), \quad \dot{z}(t) = -x(t) - 5z(t)$$

mit $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ und $z(0) = 2$! *Falls Sie Teil d) nicht gelöst haben, können Sie hier mit der (falschen) „Ersatzmatrix“* $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3te^{-2t} & 2 & -2te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 3te^{-2t} & 3 & e^{-2t} + 3te^{-2t} \end{pmatrix}$ *arbeiten.*

f) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

g) Wie ändert sich das Langzeitverhalten von $x(t), y(t)$ und $z(t)$ bei einer leichten Veränderung der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 29y(t) = 25\cos 2t - 8\sin 2t\,!$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Aufgabe 6: *(3 Punkte)*

Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = -ty(t)^3$ mit $y(0) = 1$!

HILFSMITTEL

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

HINWEISE

$$\int t^2 \cos at\,dt = \left(\frac{t^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin at + \frac{2t}{a^2}\cos at \qquad \int t^2 \sin at\,dt = \left(\frac{2}{a^3} - \frac{t^2}{a}\right)\cos at + \frac{2t}{a^2}\sin at$$

$$\int t^2 e^{at\,dt} = \left(\frac{t^2}{a} - \frac{2t}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)e^{at}$$

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.

Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe, notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •