WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

20. August 2008

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Menge M aller Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$ mit $2x + 3y = 0$ ist ein Untervektorraum.

Lösung: *Richtig,* denn sie ist der Kern der linearen Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die den Vektor $\binom{x}{y}$ auf $2x + 3y$ abbildet.

2) Geben Sie die Elemente der Menge N aller Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{F}_2^3$ mit $x + z^2 = 0$ explizit an!

Lösung: $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3) Ist N ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum?

Lösung: *Ja,* denn in $\mathbb{F}_2$ ist jedes der beiden Elemente gleich seinem Quadrat, die Gleichung $x + z^2 = 0$ ist also äquivalent zu $x + z = 0$ oder $x = z$. Diese Bedingung erfüllt sowohl der Nullvektor als auch jede Linearkombination von Vektoren dieser Art.

3) Richtig oder falsch: Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei gleich ihrer Inversen. Dann ist $A = \pm E$.

Lösung: *Falsch,* auch die Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und viele andere haben diese Eigenschaft.

4) Bestimmen Sie die Determinante der 5×5-Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$!

Lösung: Vertauscht man die erste mit der letzten Spalte, erhält man eine untere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen in der Hauptdiagonalen. Deren Determinante ist eins, die von A also wegen der Vertauschung gleich -1.

5) Richtig oder falsch: Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$ bilden eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^2$.

Lösung: *Richtig,* denn $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} = (1+i)\overline{(1-i)} + (1-i)\overline{(1+i)} = (1+i)^2 + (1-i)^2 = (1+2i-1) + (1-2i-1) = 0$.

6) Für welche $a \in \mathbb{C}$ sind die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a^2 \\ -a \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{C}^2$ linear abhängig?

Lösung: Genau dann, wenn ihre Determinante $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^2 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - a^4 = -a^2(1 + a^2)$ verschwindet, wenn also $a = 0$ oder $a^2 = -1$, d.h. $a = \pm i$ ist.

7) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom vierten Grades von $f(x, y) = e^{xy} \sin(x - y)$ um den Nullpunkt!

Lösung: Wie aus Schule und/oder Analysis I bekannt, ist

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots \quad \text{und} \quad \sin w = w - \frac{w^3}{6} + \frac{w^5}{120} - \cdots .$$

In diese Formeln müssen wir $z = xy$ *bzw.* $w = x - y$ einsetzen:

$$e^{xy} = 1 + xy + \frac{x^2y^2}{2} + \cdots \quad \text{und} \quad \sin(x - y) = (x - y) - \frac{(x - y)^3}{6} + \cdots .$$

Multiplikation der beiden rechten Seiten und Streichen aller Terme vom Grad größer vier liefert das Ergebnis

$$\begin{aligned} (x - y) - \frac{(x - y)^3}{6} + xy(x - y) &= x - y - \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{6} + x^2y - xy^2 \\ &= -\frac{x^3}{6} + \frac{y^3}{6} + \frac{3x^2y}{2} - \frac{3xy^2}{2} + x - y \,. \end{aligned}$$

8) Was ist $\operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{rot} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$?

Lösung: Die Nullfunktion, denn die Divergenz der Rotation eines Vektorfelds verschwindet und damit auch ihr Gradient.

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*

V sei der Vektorraum aller reeller Polynome f vom Grad höchstens vier in x und U sei die Teilmenge bestehend aus allen Polynomen $f \in V$ mit $f(1) = 0$.

a) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

Lösung: Die Elemente von V lassen sich eindeutig in der Form

$$f = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{mit} \quad a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$$

schreiben; daher bilden die x-Potenzen x^4, x^3, x^2, x und 1 eine Basis.

b) Welche Dimension hat V ?

Lösung: Da es eine fünfelementige Basis gibt, ist $\dim V = 5$.

c) Zeigen Sie, daß U ein Untervektorraum von V ist und daß das System $\mathcal{B}$ aus den Polynomen $(x - 1), (x - 1)^2, (x - 1)^3$ und $(x - 1)^4$ eine Basis von U bildet!

Lösung: U ist Untervektorraum, denn $U \neq \emptyset$, da z.B. das Nullpolynom oder $x - 1$ in U liegen, und wenn zwei Polynome an der Stelle eins verschwinden, gilt dasselbe auch für jede Linearkombination davon.

Die vier Elemente von $\mathcal{B}$ liegen offensichtlich alle in U, denn ihre Grade sind kleiner oder gleich vier und sie verschwinden für $x = 1$. Sie sind linear unabhängig, denn ist

$$\lambda(x - 1) + \mu(x - 1)^2 + \nu(x - 1)^3 + \rho(x - 1)^4 = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

so ist auch $\lambda x+\mu x^2+\nu x^3+\rho x^4=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, also steht hier das Nullpolynom, d.h. $\lambda=\mu=\nu=\rho=0$. Damitz bilden sie die Basis einen vierdimensionalen Untervektorraums von V, der U enthält. Wäre er nicht gleich U, müßte U aus Dimensionsgründen gleich V sein, was natürlich absurd ist: Nicht jedes Polynom vom Grad höchstens vier verschwindet für $x=1$.

d) Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis von V!

Lösung: Da die Dimension von U um genau eins kleiner ist als die von V, können wir dazu jedes beliebige Polynom aus $V\setminus U$ nehmen, z.B. das konstante Polynom 1.

e) Zeigen Sie: $\varphi\colon\begin{cases} U\to U\\ f\mapsto(x-1)f'\end{cases}$ ist eine lineare Abbildung von U nach U.

Lösung: Zunächst ist φ eine Abbildung von U nach U, denn für ein $f\in U$ hat f' höchstens den Grad drei, $(x-a)f'$ also höchstens Grad vier, und wegen des Vorfaktors $(x-1)$ verschwindet diese Polynom bei $x=1$. Auch die Linearität der Abbildung ist klar: Für $f,g\in U$ und $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f+\mu g)&=(x-1)\frac{d}{dx}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)=(x-1)\big(\lambda f'(x)+\mu g'(x)\big)\\&=\lambda(x-1)f'(x)+\mu(x-1)g'(x)=\lambda\varphi(f)+\mu\varphi(g)\,.\end{aligned}$$

f) Welche Dimensionen haben Kern φ und Bild φ?

Lösung: Ein Polynom $f\in U$ liegt genau dann im Kern von φ, wenn $(x-1)f'$ das Nullpolynom ist, d.h. also, wenn f' das Nullpolynom ist und f selbst damit eine Konstante. Da keine Konstante außer der Null an der Stelle eins (oder sonstwo) verschwindet, besteht der Kern somit nur aus dem Nullpolynom und ist damit nulldimensional. Nach der Dimensionsformel ist $\dim\operatorname{Bild}\varphi=\dim U-\dim\operatorname{Kern}\varphi=\dim U=4$, die Abbildung ist also sowohl injektiv als auch surjektiv.

g) Welche Abbildungsmatrix hat φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ aus *b)*?

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren; wir müssen somit diese Bilder berechnen:

$$\varphi\big((x-1)^n\big)=(x-1)\cdot n(x-1)^{n-1}=n(x-1)^n\,,$$

der n-te Basisvektor wird also einfach mit n multipliziert. Die Abbildungsmatrix ist daher die Diagonalmatrix mit Einträgen $1,2,3,4$, also $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$.

h) Welche Eigenwerte hat diese Matrix?

Lösung: Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix sind die Diagonaleinträge, hier sind das also die Zahlen von eins bis vier.

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x+\ y-\qquad\qquad 2z&=0 &&(1)\\ 2x+3y-\qquad\qquad 5z&=a &&(2)\\ 3x+\ y+(a^2-2a-4)z&=0 &&(3)\end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a\in\mathbb{R}$! *Hinweis (***nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler): Für viele Parameterwerte ist* $z=2/(a-2)$.

Lösung: Zur Elimination von x aus den Gleichungen (2) und (3) subtrahieren wir die erste Gleichung zweimal von der zweiten und dreimal von der dritten:

$$\begin{aligned} y - \qquad\qquad z &= a \qquad (4) \\ -2y + (a^2 - 2a + 2)z &= 0 \qquad (5) \end{aligned}$$

Addition von zweimal Gleichung (4) zu (5) (oder Einsetzen von $z = y + a$ in Gleichung (5)) führt schließlich zur Gleichung

$$(a^2 - 2a)z = a(a-2)z = 2a\,.$$

Für $a = 2$ steht hier $0 = 4$; in diesem Fall ist das Gleichungssystem somit unlösbar.
Für $a = 0$ erhalten wir die Gleichung $0z = 0$, die von jeder reellen Zahl $z = \lambda$ erfüllt wird.
Für $a \notin \{0, 2\}$ schließlich können wir durch $a^2 - 2a$ dividieren und erhälten die einzige Lösung

$$z = \frac{2}{a-2}\,.$$

Nach Gleichung (4) ist $y = z + a = \begin{cases} a + \frac{2}{a-2} = \frac{a^2-2a+2}{a-2} & \text{falls } a \notin \{0,2\} \\ z & \text{für } a = 0 \end{cases}$, und nach (1) ist

$$x = 2z - y = z + (z - y) = z - a = \begin{cases} -a + \frac{2}{a-2} = \frac{-a^2+2a+2}{a-2} & \text{falls } a \notin \{0,2\} \\ \lambda & \text{falls } a = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Somit ist } \mathcal{L}_a = \begin{cases} \left\{\left(-a + \frac{2}{a-2}, a + \frac{2}{a-2}, \frac{2}{a-2}\right)\right\} & \text{für } a \notin \{0,2\} \\ \{(\lambda,\lambda,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} & \text{für } a = 0 \\ \emptyset & \text{für } a = 2 \end{cases}.$$

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)

a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist die Determinante

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)\big((5-\lambda)^2 - 9\big) = (4-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-8)\,, \end{aligned}$$

denn aus $(5-\lambda)^2 = 9$ folgt $5 - \lambda = \pm 3$, also $\lambda = 5 \mp 3$. Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 8$.
Da die dritte Spalte von A den vierfachen dritten Basisvektor enthält, ist dieser Basisvektor Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$. Für die anderen Eigenvektoren müssen wir rechnen:
$A - 2E = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; für einen Vektor $\vec{v}_1$ mit $(A - 3E)\vec{v}_1 = \vec{0}$ muß also die erste Komponente das Negative der zweiten sein und die dritte verschwinden.
$A - 8E = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; hier folgt entsprechend, daß die erste Komponente des Eigenvektors gleich der zweiten sein muß und die dritte wieder verschwindet.
Als Eigenvektoren zu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ können wir daher die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{nehmen.}$$

b) Hat $\mathbb{R}^3$ eine Basis aus Eigenvektoren von A?

Lösung: Da wir drei Eigenvektoren haben, ist dies genau dann der Fall, wenn diese linear unabhängig sind. Da $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sogar paarweise aufeinander senkrecht stehen, ist das hier trivial.

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{R}^4$!

Lösung: Wir bestimmen zunächst nach GRAM-SCHMIDT eine Orthogonalbasis: Erster Basisvektor ist $\vec{v}$, für den zweiten nehmen wir eine Linearkombination $\vec{w} + \lambda\vec{v}$, deren Produkt mit $\vec{v}$ verschwindet:

$$(\vec{w} + \lambda\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{v} + \lambda\vec{v} \cdot \vec{v} = 5 + 25\lambda$$

verschwindet genau dann, wenn $\lambda = -\frac{1}{5}$ ist, der zweite Vektor der Orthonormalbasis ist also $\vec{w} - \frac{1}{5}\vec{v} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\4\end{pmatrix}$. Das Skalarprodukt dieses Vektors mit sich selbst ist eins und $\vec{v} \cdot \vec{v} = 25$; die gesuchte Orthonormalbasis besteht somit aus den Vektoren

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\2\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\4\end{pmatrix}.$$

b) *Ditto* für den von $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\i\\2i\end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix}5+i\\2i\\1+3i\end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{C}^3$!

Lösung: Wieder suchen wir als erstes eine Orthogonalbasis: Erster Basisvektor ist $\vec{x}$, für den zweiten machen wir einen Ansatz $\vec{y} + \lambda\vec{x}$ derart, daß $(\vec{y} + \lambda\vec{x}) \cdot \vec{x} = \vec{y} \cdot \vec{x} + \lambda\vec{x} \cdot \vec{x}$ verschwindet. Hier ist

$$\vec{y} \cdot \vec{x} = (5+i) \cdot 2 + 2i \cdot \bar{i} + (1+3i) \cdot \overline{2i} = 10 + 2i + 2 - 2i + 6 = 18 \quad \text{und} \quad \vec{x} \cdot \vec{x} = 2^2 + 1^2 + 2^2 = 9,$$

wir müssen also $\lambda = -2$ wählen und erhalten als zweiten Vektor der Orthogonalbasis

$$\vec{z} = \vec{y} - 2\vec{x} = \begin{pmatrix}1+i\\0\\1-i\end{pmatrix}.$$

Da $\vec{z} \cdot \vec{z} = (1+i)(1-i) + (1-i)(1+i) = 2 + 2 = 4$ ist und $\vec{x} \cdot \vec{x} = 9$, können wir für die gesuchte Orthonormalbasis also die beiden Vektoren $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\i\\2i\end{pmatrix}$ und $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+i\\0\\1-i\end{pmatrix}$ nehmen.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto e^{xy^2} \cos 3x \end{cases} !$$

Lösung: Da die Funktion beliebig oft stetig differenzierbar ist, also insbesondere zweimal, genügt es, die partiellen Ableitungen zu berechnen; außerdem können wir das Lemma von SCHWARZ anwenden, wonach $f_{xy} = f_{yx}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= y^2 e^{xy^2} \cos 3x - 3e^{xy^2} \sin 3x = e^{xy^2} (y^2 \cos 3x - 3 \sin 3x) \\
f_y(x, y) &= 2xy e^{xy^2} \cos 3x \\
f_{xx}(x, y) &= y^2 e^{xy^2} (y^2 \cos 3x - 3 \sin 3x) - e^{xy^2} (3y^2 \sin 3x + 9 \cos 3x) \\
&= e^{xy^2} \big((y^4 - 9) \cos 3x - 6y^2 \sin 3x\big) \\
f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) &= 2xy e^{xy^2} (y^2 \cos 3x - 3 \sin 3x) + 2e^{xy^2} y \cos 3x \\
&= e^{xy^2} \cdot 2y \cdot \big((y^2 x + 1) \cos 3x - 3x \sin 3x\big) \\
f_{yy}(x, y) &= 2x e^{xy^2} \cos 3x + (2xy)^2 e^{xy^2} \cos 3x = e^{xy^2} \cos 3x \cdot (2x + 4x^2 y^2)
\end{aligned}$$

ist somit $\nabla f(x, y) = e^{xy^2} \begin{pmatrix} y^2 \cos 3x - 3 \sin 3x \\ 2xy \cos 3x \end{pmatrix}$ und

$$H_f(x, y) = e^{xy^2} \begin{pmatrix} (y^4 - 9) \cos 3x - 6y^2 \sin 3x & 2xy(y^2 \cos 3x - 3 \sin 3x) \\ 2xy(y^2 \cos 3x - 3 \sin 3x) & \cos 3x \cdot (2x + 4x^2 y^2) \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \ln(x^2 y) \\ \dfrac{\cos x}{\sin y} + xy \end{pmatrix} \end{cases} !$$

Lösung: Die erste Komponente $\ln(x^2 y) = 2 \ln x + \ln y$ von $\vec{V}$ hat die partiellen Ableitungen $\dfrac{2}{x}$ und $\dfrac{1}{y}$; für die zweite Komponente $\dfrac{\cos x}{\sin y} + xy$ erhalten wir entsprechend

$$-\frac{\sin x}{\sin y} + y \quad \text{und} \quad -\frac{\cos x \cos y}{\sin^2 y} + x\,.$$

Also ist
$$J_{\vec{V}}(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x} & \dfrac{1}{y} \\ -\dfrac{\sin x}{\sin y} + y & -\dfrac{\cos x \cos y}{\sin^2 y} + x \end{pmatrix}.$$

Die Divergenz von $\vec{V}$ ist die Summe der Diagonalelemente der JACOBI-Matrix, also

$$\operatorname{div} \vec{V}(x, y) = \frac{2}{x} - \frac{\cos x \cos y}{\sin^2 y}\,.$$