WOLFGANG K. SEILER A5, C201
Tel. 2515

20. August 2008

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Menge M aller Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$ mit $2x + 3y = 0$ ist ein Untervektorraum.

2) Geben Sie die Elemente der Menge N aller Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{F}_2^3$ mit $x + z^2 = 0$ explizit an!

3) Ist N ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum?

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei gleich ihrer Inversen. Dann ist $A = \pm E$.

4) Bestimmen Sie die Determinante der 5×5-Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$!

5) *Richtig oder falsch:* Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$ bilden eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^2$.

6) Für welche $a \in \mathbb{C}$ sind die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a^2 \\ -a \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{C}^2$ linear abhängig?

7) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom vierten Grades von $f(x, y) = e^{xy} \sin(x - y)$ um den Nullpunkt!

8) Was ist $\operatorname{grad}\operatorname{div}\operatorname{rot} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 1: (*9 Punkte)*
V sei der Vektorraum aller reeller Polynome f vom Grad höchstens vier in x und U sei die Teilmenge bestehend aus allen Polynomen $f \in V$ mit $f(1) = 0$.

a) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

b) Welche Dimension hat V?

c) Zeigen Sie, daß U ein Untervektorraum von V ist und daß das System $\mathcal{B}$ aus den Polynomen $(x-1), (x-1)^2, (x-1)^3$ und $(x-1)^4$ eine Basis von U bildet!

d) Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis von V!

e) Zeigen Sie: $\varphi\colon \begin{cases} U \to U \\ f \mapsto (x-1)f' \end{cases}$ ist eine lineare Abbildung von U nach U.

f) Welche Dimensionen haben Kern φ und Bild φ?

g) Welche Abbildungsmatrix hat φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ aus *b)*?

h) Welche Eigenwerte hat diese Matrix?

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + \ y - \qquad\qquad\quad 2z &= 0 \qquad (1)\\ 2x + 3y - \qquad\qquad\quad 5z &= a \qquad (2)\\ 3x + \ y + (a^2 - 2a - 4)z &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$! *Hinweis (***nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler): Für viele Parameterwerte ist* $z = 2/(a-2)$.

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$!

b) Hat $\mathbb{R}^3$ eine Basis aus Eigenvektoren von A?

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{R}^4$!

b) *Ditto* für den von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 2i \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 5+i \\ 2i \\ 1+3i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{C}^3$!

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie Gradient und Hesse-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto e^{xy^2} \cos 3x \end{cases} !$$

b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \ln(x^2 y) \\ \dfrac{\cos x}{\sin y} + xy \end{pmatrix} \end{cases} !$$

$\mathcal{H\ I\ L\ F\ S\ M\ I\ T\ T\ E\ L}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.
Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 20. August 2008, um 15^{15} Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •