Korollar: Für jeden Vektor $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ und jede reelle Zahl $t_0 \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine differenzierbare Funktion $\vec{y}(t)$ mit den Eigenschaften, daß $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ und $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ ist; dies ist $\vec{y}(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot \vec{y}_0$. ■

Wir wußten bereits, daß die Lösungen einen Vektorraum bilden; obiges Korollar sagt uns, daß dieser Vektorraum die Dimension n hat und daß für jede reelle Zahl t_0 die Abbildung $\vec{y} \mapsto \vec{y}(t_0)$ ein Isomorphismus auf den $\mathbb{R}^n$ ist.

Als erstes Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = x(t) \quad \text{mit} \quad x(0) = a \quad \text{und} \quad y(0) = b$$

oder

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrix ist gleich der zu Beginn des Abschnitts betrachteten Beispielmatrix C, deren Exponentialfunktion wird dort berechnet haben; die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$e^{Ct} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cosh t + b\sinh t \\ a\sinh t + b\cosh t \end{pmatrix}.$$

§2: Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren

Die Matrixexponentialfunktion ist zwar wohldefiniert, aber eine matrixwertige Potenzreihe ist für allgemeine Matrizen A nicht gerade einfach zu berechnen. Wir brauchen daher alternative Rechenverfahren.

Zumindest ein Fall ist problemlos: Ist nämlich

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix, ist offensichtlich

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{d_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_n t} \end{pmatrix}$$

wieder eine Diagonalmatrix, wobei die Exponentialfunktion einfach komponentenweise auf die Diagonaleinträge ihres Arguments angewandt wird.

Noch ein weiterer Fall ist relativ unproblematisch: für eine obere (oder untere) Dreiecksmatrix N mit Nullen in der Hauptdiagonalen. Eine solche Matrix definiert eine lineare Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, die den k-ten Einheitsvektor $\vec{e}_k$ in den von $\vec{e}_{k+1}$ bis $\vec{e}_n$ erzeugten Untervektorraum abbildet. Das Quadrat von N bildet ihn entsprechend in den von $\vec{e}_{k+2}$ bis $\vec{e}_n$ erzeugten Untervektorraum ab und so weiter, spätestens N^n ist also die Nullmatrix. Damit wird die Potenzreihe der Exponentialfunktion zu einer endlichen Summe, die, wir wir bereits in zwei Beispielen gesehen haben, zumindest für kleine n leicht berechnet werden kann.

Wir wissen bereits aus dem letzten Semester (*Kap. I, §3j1)*), welche Bedingung eine Basis von $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{C}^n$ erfüllen muß, damit eine Matrix A bezüglich dieser Basis Diagonalgestalt hat: Die Basisvektoren müssen allesamt Eigenvektoren von A sein. Aus *Kap. I, §6i)* wissen wir auch, wie man Eigenwerte und ausgehend davon Eigenvektoren mit Hilfe von Determinanten bestimmen kann. In diesem Paragraphen wollen wir wir die entsprechende Theorie noch etwas weiterentwickeln und sehen, daß sich die Berechnung einer beliebigen Matrixexponentialfunktion auf die beiden gerade diskutierten Spezialfälle zurückführen läßt.

Wir arbeiten dabei wieder, wie im ersten Kapitel, über einem beliebigen Körper k, denn auch wenn uns im Augenblick zur Anwendung auf Differentialgleichungen nur die Fälle $k = \mathbb{R}$ und $k = \mathbb{C}$ interessieren, hat die hier entwickelte Theorie doch auch interessante Anwendungen über anderen Körpern: Eigenvektoren über endlichen Körpern spielen beispielsweise bei einigen Problem der Signalverarbeitung eine Rolle.

a) Mehr über Eigenwerte und Eigenvektoren

Zur Bequemlichkeit der Leser sei die Definition noch einmal wiederholt:

Definition: *a)* V sei ein k-Vektorraum. Ein Vektor $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ heißt *Eigenvektor* der linearen Abbildung $\varphi: V \to V$ zum *Eigenwert* $\lambda \in k$, wenn $\varphi(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ ist.

b) $\lambda \in k$ heißt *Eigenwert* von φ, falls φ einen Eigenvektor zum Eigenwert λ hat.

c) Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix $A \in k^{n\times n}$ sind die Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} k^n \to k^n \\ \vec v \mapsto A\vec v \end{cases}.$$

Offensichtlich ist mit einem Vektor $\vec v$ auch jedes Vielfache (außer dem nach Definition ausgeschlossenen Nullvektor) ein Eigenvektor zum selben Eigenwert; allgemeiner ist sogar jede Linearkombination (außer $\vec 0$) von Eigenvektoren zum Eigenwert λ wieder ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, d.h. die Eigenvektoren zu einem festen Eigenwert λ bilden zusammen mit dem Nullvektor einen Untervektorraum von V, den sogenannten *Eigenraum* von λ.

Definition: Die Dimension des Eigenraums von λ heißt *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ.

Lemma: Sind $\vec v_1, \dots, \vec v_r \in V$ Eigenvektoren der linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, so sind diese Vektoren linear unabhängig.

Beweis: Angenommen, $\vec v_1, \dots, \vec v_r$ seien linear abhängig. Dann können wir eine Zahl $2 \le s \le r$ finden, so daß zwar $\vec v_1, \dots, \vec v_s$ linear abhängig sind, nicht aber $\vec v_1, \dots, \vec v_{s-1}$. Es gibt daher Skalare $\alpha_i \in k$, so daß

$$\alpha_1\vec v_1 + \cdots + \alpha_s\vec v_s = \vec 0$$

ist. Wenden wir auf beide Seiten dieser Gleichung die Abbildung φ an und beachten, daß $\varphi(\vec v_i) = \lambda_i\vec v_i$ ist, folgt, daß auch

$$\alpha_1\lambda_1\vec v_1 + \cdots + \alpha_s\lambda_s\vec v_s = \vec 0$$

ist. Andererseits können wir obige Gleichung auch einfach mit λ_s multiplizieren mit dem Ergebnis, daß

$$\lambda_s\alpha_1\vec v_1 + \cdots + \lambda_s\alpha_s\vec v_s = \vec 0\,.$$

Durch Subtraktion der letzten beiden Gleichungen voneinander erhalten wir eine lineare Abhängigkeit

$$\alpha_1(\lambda_s - \lambda_1)\vec v_1 + \cdots + \alpha_{s-1}(\lambda_s - \lambda_{s-1})\vec v_{s-1} = \vec 0$$

zwischen $\vec v_1, \dots, \vec v_{s-1}$. Da diese Vektoren linear unabhängig sind, müssen alle Koeffizienten verschwinden. Da die Eigenwerte $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ aber allesamt verschieden sind, ist dies nur möglich, wenn α_1 bis α_{s-1} verschwinden. Wegen $\vec v_s \neq \vec 0$ muß dann aber auch α_s verschwinden, im Widerspruch zur angenommenen linearen Unabhängigkeit von $\vec v_1, \dots, \vec v_s$.

Also sind die Vektoren $\vec v_1, \dots, \vec v_r$ linear unabhängig. ■

Eigenwerte und Eigenvektoren sind auch interessant für Selbstabbildungen eines unendlichdimensionalen Vektorraums: Ist $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ beispielsweise der Vektorraum aller beliebig oft stetig differenzierbarer reeller Funktionen, so sind $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ Eigenvektoren der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto \ddot f \end{cases}$$

zum Eigenwert $-\omega^2$; genauso sind $\sinh\omega t$ und $\cosh\omega t$ Eigenvektoren zum Eigenwert ω^2. Für $\omega = 0$ degenerieren diese beiden Eigenvektoren jeweils zu null und eins, wodurch ein Eigenwert verschwindet; dafür kommt die Identität als neuer Eigenvektor hinzu. Damit ist also jede reelle Zahl Eigenwert von φ mit einer geometrischen Vielfachheit von mindestens zwei. (Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, daß die Vielfachheit immer gleich zwei ist.)

Eigenwertprobleme für lineare Abbildungen, die durch Differentialoperatoren gegeben sind, spielen in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle; im Hinblick auf solche Anwendungen bezeichnet man die Menge aller Eigenwerte einer linearen Abbildung oder Matrix auch als deren *Spektrum.* Dieses Wort kommt daher, daß z.B. beim (mehrdimensionalen) Differentialoperator, der die Schwingungen des Fells einer Trommel beschreibt, die Eigenwerte gerade die Frequenzen sind, die die Trommel produzieren kann.

Uns interessieren hauptsächlich Eigenwerte und Eigenvektoren in endlichdimensionalen Vektorräumen. Dort können wir konkret mit Matrizen rechnen; ist A die Abbildungsmatrix zu $\varphi\colon V \to V$, so ist $\varphi(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ äquivalent dazu, daß $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ oder $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$ ist, wobei E wie üblich die Einheitsmatrix bezeichnet.

In letzterer Form ist dies jenes homogene lineare Gleichungssystem für die Komponenten von $\vec{v}$, das wir bereits in *Kap. I, §6i1)* betrachtet haben. Wie jedes homogene lineare Gleichungssystem hat es den Nullvektor als Lösung, der allerdings nach Definition genau aus diesem Grund *nicht* als Eigenvektor betrachtet wird. Weitere Lösungen gibt es genau dann, wenn die Matrix $A - \lambda E$ des Gleichungssystems singulär ist, wenn also $\det(A - \lambda E)$ verschwindet. Somit ist $\lambda \in k$ genau dann ein Eigenwert, wenn $\det(A - \lambda E) = 0$ ist; die zugehörigen Eigenvektoren sind die nichttrivialen Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$.

Damit ist klar, wie man Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen kann: Man löse die Gleichung $\det(A - \lambda E) = 0$ und dann für jede Nullstelle λ_i dieser Gleichung das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$. Dieses homogene lineare Gleichungssystem hat *nie* maximalen Rang, da es nach Definition eines Eigenwerts nichttriviale Lösungen geben muß; kommt man also auf ein eindeutig lösbares Gleichungssystem (und damit auf den Nullvektor als einzige Lösung), ist das immer ein Zeichen für einen Rechenfehler.

b) Ein erstes Beispiel

Wir wollen e^A *bzw.* e^{At} berechnen für die bereits in *Kap. I, §6i)* betrachtete Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wie wir dort nachgerechnet haben, ist hier

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2(\lambda^2 - 14)(\lambda - 72)$$

mit Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -4$ und $\lambda_4 = 18$. Als Eigenvektoren dazu hatten wir die Vektoren

$$\vec{b}_1 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gefunden, wobei $\vec{b}_i$ Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist, d.h.

$$\varphi(\vec{b}_1) = 0\,\vec{b}_1, \quad \varphi(\vec{b}_2) = 0\,\vec{b}_2, \quad \varphi(\vec{b}_3) = -4\,\vec{b}_3 \quad \text{und} \quad \varphi(\vec{b}_4) = 18\,\vec{b}_4 .$$

Bezüglich der neuen Basis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$ hat φ daher die Abbildungsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} ,$$

bei der die Eigenwerte von A in der Hauptdiagonalen stehen und alle sonstigen Einträge verschwinden. Bei dieser Matrix haben wir keinerlei Probleme mit der Berechnung der Exponentialfunktion: Offensichtlich ist

$$e^M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{18} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^{Mt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{18t} \end{pmatrix} .$$

Damit läßt sich auch e^A berechnen: Sind nämlich

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die vier Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^4$, so ist

$$\vec{b}_i = B\vec{e}_i \quad \text{mit} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & -1 & 13 \\ 1 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} ,$$

und die Gleichung $A\vec{b}_i = \lambda_i\vec{b}_i$ mit $\lambda_{1/2} = 0, \lambda_3 = -4$ und $\lambda_4 = 18$ wird zu $AB\vec{e}_i = \lambda_i B\vec{b}_i$ oder $B^{-1}AB\,\vec{e}_i = \lambda_i\vec{e}_i$.

Also ist $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} = M$ und $A = BMB^{-1}$.

Wir wollen uns überlegen, daß sich eine solche Relation auch in Potenzen sowie in die Exponentialfunktion hineinziehen läßt:

Lemma: Ist $B \in k^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix, $M \in k^{n\times n}$ irgendeine Matrix und m eine ganze Zahl, so ist

$$\left(BMB^{-1}\right)^m = BM^mB \quad \text{und} \quad e^{BMB^{-1}} = Be^MB^{-1} .$$

Zum *Beweis* betrachten wir zunächst eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$; für diese ist

$$\begin{aligned}\left(BMB^{-1}\right)^m &= \underbrace{BMB^{-1}BMB^{-1}\cdots BMB^{-1}}_{m \text{ mal}} \\ &= B\cdot M\cdot E\cdot M\cdots M\cdot E\cdot MB^{-1} = BM^mB^{-1} ,\end{aligned}$$

da BB^{-1} die Einheitsmatrix ist. Für $m = 0$ gibt es ebenfalls keine Probleme, da die nullte Potenz *jeder* $n\times n$-Matrix die Einheitsmatrix ist, und für negative m schließlich ist BM^mB^{-1} invers zu $BM^{-m}B^{-1}$, denn

$$BM^mB^{-1}\cdot BM^{-m}B^{-1} = B\cdot M^m\cdot M^{-m}B^{-1} = B\cdot B^{-1} = E .$$

Also ist

$$BM^mB^{-1} = \left(BM^{-m}B^{-1}\right)^{-1} = \left(\left(BMB^{-1}\right)^{-m}\right)^{-1} = \left(BMB^{-1}\right)^m ,$$

da $-m$ eine natürliche Zahl ist, für die wir die Formel bereits bewiesen haben. Schließlich ist auch

$$e^{BMB^{-1}} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(BMB^{-1}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}BM^mB^{-1} = Be^MB^{-1} ,$$

wie behauptet. ■

In unserem Fall erhalten wir

$$e^A = B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{18} \end{pmatrix}B^{-1} ,$$

was sich zumindest im Prinzip ausrechnen läßt – auch wenn das Ergebnis

$$\frac{1}{72}\begin{pmatrix} 27e^{-4}+35+10e^{18} & 10e^{18}-19+9e^{-4} & 10e^{18}-1-9e^{-4} & 10e^{18}+17-27e^{-4} \\ -53+27e^{-4}+26e^{18} & 9e^{-4}+26e^{18}+37 & 26e^{18}-17-9e^{-4} & 26e^{18}+1-27e^{-4} \\ 26e^{18}+1-27e^{-4} & 26e^{18}-17-9e^{-4} & 9e^{-4}+26e^{18}+37 & -53+27e^{-4}+26e^{18} \\ 10e^{18}+17-27e^{-4} & 10e^{18}-1-9e^{-4} & 10e^{18}-19+9e^{-4} & 27e^{-4}+35+10e^{18} \end{pmatrix}$$

alles andere als angenehm ist. Dies zeigt wieder einmal, wieviel man sich ersparen kann, wenn man *vor* Beginn einer Rechnung eine gute Basis *bzw.* ein gutes Koordinatensystem wählt.

c) Das charakteristische Polynom und seine Nullstellen

Es ist kein Zufall, daß im obigen Beispiel die Gleichung $\det(A-\lambda E) = 0$ auf ein Polynom vierten Grades führte: Ist $A = (a_{ij})$ eine $n\times n$-Matrix, so hat die Matrix $A - \lambda E$ in der Diagonalen die Einträge $a_{ii} - \lambda$, ansonsten stimmen alle Einträge mit denen von A überein. Berechnet man daher $\det(A - \lambda E)$ gemäß der definierenden Formel, so gibt es genau ein Produkt, in dem n mit λ behaftete Faktoren vorkommen, nämlich das Produkt

$$(a_{11} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda) = (-1)^n\lambda^n + \textit{Terme niedrigerer Ordnung}$$

der Diagonaleinträge. Die restlichen Produkte, die zur Determinante aufsummiert werden, enthalten zwischen null und $n-1$ mit λ behaftete Faktoren, die Summe ist also ein Polynom vom Grad n mit höchstem Term $(-1)^n\lambda^n$.

Definition: Das Polynom $\det(A-\lambda E)$ heißt *charakteristisches Polynom* der Matrix A.

Demgemäß sind also die Eigenwerte von A gleich den Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A, und wir sollten uns wenigsten kurz überlegen, wie man die Nullstellen eines solchen Polynoms bestimmen kann.

Zur Bestimmung der Eigenwerte muß man somit die Nullstellen des charakteristischen Polynoms finden. Für ein Polynom vom Grad höchstens zwei (oder aber ein Polynom, das man als Produkt solcher Polynome schreiben kann) ist das nicht schwer: Nullstellen eines linearen Polynoms erhält man durch eine einfache Division, solche eines quadratischen durch quadratische Ergänzung: Da für $a \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

ist, hat das linksstehende Polynom die Nullstellen

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a} - c} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

Bei Polynomen höherer Grade, die man nicht auf einfache Weise über binomische Formeln oder ähnliches in kleinere Faktoren zerlegen kann, ist es oft einen Versuch wert, einige der Lösungen zu *erraten*, um so den Grad des Polynoms zu reduzieren.

Bei Polynomen mit ganzzahligen (und eventuell auch rationalen) Nullstellen, ist dazu der Wurzelsatz von VIÈTE ein vielversprechender Ansatzpunkt: Angenommen, das Polynom n-ten Grades

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

mit höchstem Koeffizient eins habe die Nullstellen $z_1, \dots, z_n$. Dann ist

$$f(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdot \cdots \cdot (x - z_n)\,.$$

Dies läßt sich ausmultiplizieren und liefert dann einen Zusammenhang zwischen Nullstellen und Koeffizienten: Beispielsweise ist

$$a_0 = (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n \quad \text{und} \quad a_{n-1} = -(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)\,,$$

und genauso zeigt man auch daß der allgemeine Koeffizient a_i die Summe aller möglicher Produkte aus $n-i$ Nullstellen z_j ist, multipliziert mit $(-1)^{n-i}$. Diese Aussage bezeichnet man als den Wurzelsatz von VIÈTE.

FRANÇOIS VIÈTE (1540–1603) studierte Jura an der Universität Poitiers, danach arbeitete er als Hauslehrer. 1573, ein Jahr nach dem Massaker an den Hugenotten, berief ihn CHARLES IX (obwohl VIÈTE Hugenotte war) in die Regierung der Bretagne; unter HENRI III wurde er geheimer Staatsrat. 1584 wurde er auf Druck der katholischen Liga vom Hofe verbannt und beschäftigte sich fünf Jahre lang mit Mathematik. Unter HENRI IV arbeitete er wieder am Hof und knackte u.a. verschlüsselte Botschaften an den spanischen König PHILIP II. In seinem Buch *In artem analyticam isagoge* rechnete er als erster systematisch mit symbolischen Größen.

Für das Erraten von Nullstellen einfacher Polynome, bei denen man (aus inhaltlichen Gründen oder aber weil so etwas in Übungs- und Klausuraufgaben fast die Regel ist) ganzzahlige Lösungen erwartet, ist vor allem die erstgenannte Beziehung wichtig: In der Form

$$(-1)^n a_0 = z_1 z_2 \cdots z_n$$

gibt sie das Produkt aller Nullstellen. Falls die a_i alle ganzzahlig sind, lohnt es sich also, die Teiler von a_0 zu testen. Ist beispielsweise

$$f(x) = x^4 + 14x^3 - 52x^2 - 14x + 51\,,$$

so ist

$$a_0 = 51 = 3 \cdot 17\,.$$

Da das Produkt aller Nullstellen gleich diesem Wert sein muß, kommen – falls *alle* Nullstellen ganzzahlig sind – für diese nur die Werte ± 1, ± 3 und ± 17 in Frage. Da das Produkt aller vier Nullstellen gleich 51 ist, gibt es jeweils genau eine Nullstelle vom Betrag 3 *bzw.* 17, sowie zwei Nullstellen vom Betrag eins. Welche Vorzeichen wirklich auftreten, läßt sich durch Einsetzen festellen oder aber auch dadurch, daß nach VIÈTE die *Summe* aller Nullstellen gleich -14 sein muß. Das ist offenbar nur möglich, wenn sowohl +1 als auch -1 Nullstellen sind, sowie -17 und +3. In der Tat zeigt Einsetzen, daß dies auch tatsächlich Nullstellen sind. (Das Einsetzen ist notwendig, da wir nicht sicher sein können, daß wirklich alle Nullstellen ganzzahlig sind.)

In diesem extrem einfachen (und konstrierten) Fall führt also die Primfaktorzerlegung direkt zur Lösung; in komplizierteren Fällen, wenn a_0

mehr Primfaktoren hat, muß man zunächst alle Kombinationsmöglichkeiten, die zum Produkt a_0 führen können, in Betracht ziehen und davon dann durch Einsetzen potentieller Nullstellen alle bis auf die tatsächlichen Nullstellen eliminieren.

Beim Polynom

$$f(x) = x^6 + 27x^5 - 318x^4 - 5400x^3 - 10176x^2 + 27648x + 32768$$

etwa ist $a_0 = 32768 = 2^{15}$; hier wissen wir also nur, daß jede Nullstelle die Form $\pm 2^i$ haben muß, wobei die Summe aller Exponenten gleich 15 sein muß und die Anzahl der negativen Vorzeichen gerade. Einsetzen zeigt, daß

$$-1, \quad 2, \quad -4, \quad -8, \quad 16, \quad -32$$

die Nullstellen sind.

Man beachte, daß diese Vorgehensweise nur funktioniert, wenn das Polynom höchsten Koeffizienten eins hat; andernfalls ist das Produkt der Nullstellen gleich dem Quotienten aus konstantem Koeffizienten und führendem Koeffizienten mal $(-1)^{\text{Grad}}$.

Falls man nicht sicher sein kann, daß alle Nullstellen ganzzahlig sind, gibt es immer noch eine ganze Reihe von Methoden, um Nullstellen *exakt* zu berechnen: Beispielsweise kennt die Computeralgebra Algorithmen, um ein Polynom (soweit dies möglich ist) in ein Produkt von Polynomen kleineren Grades zu zerlegen mit Koeffizienten aus einem vorgegebenen Körper, der (in einem hier nicht präzisierten) Sinne nicht *zu weit* vom Körper der rationalen Zahlen *bzw.* einem endlichen Körper entfernt ist, und es gibt auch, seit der ersten Hälfte des sechzehnten Jahrhunderts, allgemeine Formeln zur Lösung von Gleichungen dritten und vierten Grades. Diese Formeln spielen wegen ihrer Komplexität und numerischen Instabilität in der Praxis keine sonderlich große Rolle und sollen daher hier nur im Kleindruck behandelt werden:

Für die kubische Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

wenden wir zunächst einen ähnlichen Trick an wie die quadratische Ergänzung beim Fall der quadratischen Gleichungen: Durch die Substitution

$$z = x + \frac{b}{3a}$$

wird die Gleichung zu

$$az^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right) z + \frac{2b^3}{27a^2} + d\,,$$

was wir auch kurz als

$$z^3 + pz + q = 0$$

schreiben können. Zur Lösung dieser Gleichung ersetzen wir z durch die Summe

$$z = u + v$$

zweier Variablen und erhalten

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0\,.$$

Da die Zerlegung von z in eine Summe äußerst willkürlich ist, können wir hoffen, daß diese Gleichung für die beiden Variablen u und v auch Lösungen hat, wenn wir zusätzliche Bedingungen stellen: Die obige Gleichung für z wird beispielsweise sicherlich dann gelöst, wenn

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{und} \quad 3uv = -p$$

ist. Dann ist

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{und} \quad u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{3}\,,$$

wir kennen also Summe und Produkt von u^3 und v^3.

Sind aber Summe und Produkt zweier Zahlen r und s bekannt, so können wir leicht die Zahlen selbst bestimmen: Aus

$$r + s = c \quad \text{und} \quad rs = d$$

folgt, daß

$$r(c - r) = -r^2 + cr = d \quad \text{oder} \quad r^2 - cr + d = 0$$

ist; wir müssen also einfach eine quadratische Gleichung lösen und erhalten

$$r = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - d}\,.$$

Da die Summe dieser beiden Lösungen gleich c ist, muß also die eine gleich r und die andere gleich s sein.

Auf die kubische Gleichung angewandt heißt das, daß u^3 und v^3 die beiden Zahlen

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

sind, also

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

oder umgekehrt.

Uns interessiert nur die Summe der beiden Zahlen, also

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,.$$

Damit sind wir fast fertig. Das verbleibende Problem ist, daß hier formal eine Lösung steht, wohingegen wir für eine kubische Gleichung *drei* Lösungen erwarten. Dieses Problem verkehrt sich sofort in sein Gegenteil, wenn wir beachten, daß genauso, wie die Quadratwurzel nur bis aufs Vorzeichen bestimmt ist, die Kubikwurzel nur bis dritte Einheitswurzeln bestimmt ist: Da die drei komplexen Zahlen

$$1, \quad \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

alle dritte Potenz eins haben, ist mit jeder Kubikwurzel w einer Zahl y auch w mal einer dieser drei Zahlen Kubikwurzel; es gibt also (für $y \neq 0$) drei verschiedene Kubikwurzeln, und somit hat obige Formel für z gleich *neun* mögliche Interpretationen.

Daraus können wir die drei richtigen herausfiltern, wenn wir beachten, daß wir nicht nur das Produkt von u^3 und v^3 kennen, sondern auch das von u und v, nämlich $-p/3$. Damit ist der zweite Summand in der Formel für z eindeutig durch den ersten bestimmt, und es gibt nur die zu erwartenden drei Lösungen: Ist

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

irgendeiner der drei möglichen Werte der Wurzel, so ist

$$z = u - \frac{p}{3u}$$

eine Lösung der Gleichung $z^3 + pz + q = 0$ und

$$x = z - \frac{b}{3a}$$

eine Lösung der ursprünglichen Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Auch biquadratische Gleichungen lassen sich auflösen: Hier eliminiert man den kubischen Term von

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

durch die Substitution

$$z = x + \frac{b}{4a}\,;$$

dies führt auf eine Gleichung der Form $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$. Für eine beliebige Zahl y folgt daraus für jede Nullstelle z dieser Gleichung die Beziehung

$$(z^2 + y)^2 = z^4 + 2yz^2 + y^2 = (2y - p)z^2 - qz + y^2 - r\,.$$

Falls rechts das Quadrat eines linearen Polynoms $sz + t$ steht, ist

$$(z^2 + y)^2 = (sz + t)^2 \Longrightarrow z = \pm\sqrt{-y \pm (sz + t)}\,,$$

wir können die Gleichung also auflösen.

Nun wird die rechte Seite $(2y - p)z^2 - qz + y^2 - r$ im allgemeinen kein Quadrat eines linearen Polynoms in z sein, wir können aber hoffen, daß es zumindest für gewisse spezielle Werte der bislang noch willkürlichen Konstante y eines ist.

Ein quadratisches Polynom $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$ ist genau dann Quadrat eines linearen, wenn die beiden Nullstellen der quadratischen Gleichung $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ übereinstimmen. Nach der obigen Lösungsformel für quadratische Gleichungen ist dies genau dann der Fall, wenn dort der Ausdruck unter der Wurzel verschwindet, d.h. wenn $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ ist. In unserem Fall muß also

$$q^2 - 4(2y - p)(y^2 - r) = -8y^3 + 4py^2 + 8ry + q^2 - 4pr$$

verschwinden. Dies ist eine kubische Gleichung für y; indem wir diese Gleichung lösen und eine der Lösungen für y einsetzen, erhalten wir die vier Lösungen der biquadratischen Gleichung.

Die erste Lösung einer kubischen Gleichung geht wohl aus SCIPIONE DEL FERRO (1465–1526) zurück, der von 1496 bis zu seinem Tod an der Universität Bologna lehrte. 1515 fand er eine Methode, um die Nullstellen von $x^3+px = q$ für *positive* Werte von p und q zu bestimmen (Negative Zahlen waren damals in Europa noch nicht im Gebrauch). Er veröffentlichte diese jedoch nie, so daß NICCOLO FONTANA (1499–1557, oberes Bild), genannt TARTAGLIA (der Stotterer), dieselbe Methode 1535 noch einmal entdeckte und gleichzeitig auch noch eine Modifikation, um einen leicht verschiedenen Typ kubischer Gleichungen zu lösen. TARTAGLIA war mathematischer Autodidakt, war aber schnell als Fachmann anerkannt und konnte seinen Lebensunterhalt als Mathematiklehrer in Verona und Venedig verdienen.

Die Lösung allgemeiner kubischer Gleichungen geht auf den Mathematiker, Arzt und Naturforscher GIROLAMO CARDANO (1501–1576, unteres Bild) zurück, dem TARTAGLIA nach langem Drängen und unter dem Siegel der Verschwiegenheit seine Methode mitgeteilt hatte. LODOVICO FERRARI (1522–1565) kam 14-jährig als Diener zu CARDANO; als dieser merkte, daß FERRARI schreiben konnte, machte er ihn zu seinem Sekretär. 1540 fand er die Lösungsmethode für biquadratische Gleichungen; 1545 veröffentlichte CARDANO in seinem Buch *Ars magna* die Lösungsmethodem für kubische und biquadratische Gleichungen.

Nach der erfolgreichen Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen in der ersten Hälfte des sechzehnten Jahrhunderts beschäftigten sich natürlich viele Mathematiker mit dem nächsten Fall, der Gleichung fünften Grades. Hier gab es jedoch über 250 Jahre lang keinerlei Fortschritt, bis zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts ABEL glaubte, eine Lösung gefunden zu haben. Er entdeckte dann aber recht schnell seinen Fehler und bewies stattdessen 1824, daß es *unmöglich* ist, die Lösungen einer allgemeinen Gleichung fünften (oder höheren) Grades durch Grundrechenarten und Wurzeln auszudrücken.

Die Grundidee seines Beweises liegt in der Betrachtung von Symmetrien innerhalb der Lösungsmenge, ähnlich wie wir in einem späteren Abschnitt einige Differentialgleichungen durch Symmetriebetrachtungen lösen werden. Unmöglichkeitsbeweise sind allerdings deutlich aufwendiger als Lösungsversuche mit Hilfe von Symmetriebetrachtungen; daher kann über Einzelheiten des ABELschen Beweises hier nichts weiter gesagt werden. Interessenten finden ihn in fast jedem Algebralehrbuch im Kapitel über GALOIS-Theorie.

Der norwegische Mathematiker NILS HENRIK ABEL (1802–1829) ist trotz seinen frühen Todes (an Tuberkulose) Initiator vieler Entwicklungen der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts; Begriffe wie abelsche Gruppen, abelsche Integrale, abelsche Funktionen, abelsche Varietäten, die auch in der heutigen Mathematik noch allgegenwärtig sind, verdeutlichen seinen Einfluß. Zu seinem 200. Geburtstag stiftete die norwegische Regierung einen ABEL-Preises für Mathematik mit gleicher Ausstattung und Vergabebedingungen wie die Nobelpreise; erster Preisträger war 2003 JEAN-PIERRE SERRE (*1926) vom Collège de France für seine Arbeiten über algebraische Geometrie, Topologie und Zahlentheorie.

Der ABELsche Satz besagt selbstverständlich nicht, daß Gleichungen höheren als vierten Grades *unlösbar* seien; er sagt nur, daß es *im allgemeinen* nicht möglich ist, die Lösungen durch Wurzelausdrücke in den Koeffizienten darzustellen: Für eine allgemeine Lösungsformel muß man also außer Wurzeln und Grundrechenarten noch weitere Funktionen zulassen. Beispielsweise fanden sowohl HERMITE als auch KRONECKER 1858 Lösungsformeln für Gleichungen fünften Grades mit sogenannten elliptischen Modulfunktionen; 1870 löste JORDAN damit Gleichungen beliebigen Grades.

Für die Berechnung von Eigenvektoren sind schon die Lösungen einer kubischen Gleichung nach CARDANOs Formel im allgemeinen zu kompliziert, als daß man ohne Computer damit rechnen könnte; dasselbe gilt erst für höhere Grade. Insbesondere sind die Formeln in vielen Fällen numerisch instabil, wenn annähernd gleich große Zahlen voneinander subtrahiert werden. Die Numerik geht daher aus gutem Grund anders vor, wenn sie Nullstellen von Polynomen berechnet.

d) Vielfachheiten von Eigenwerten

Ist x eine Nullstelle eines Polynoms $f(X)$, so kann $f(X)$ bekanntlich durch $(X - x)$ geteilt werden, und x heißt r*-fache Nullstelle* von $f(X)$, wenn $f(X)$ durch $(X - x)^r$ teilbar ist, nicht aber durch $(X - x)^{r+1}$.

Definition: Wir sagen, der Eigenwert λ von φ *bzw.* A habe die *algebraische Vielfachheit* r, wenn λ eine r-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Im obigen Beispiel hatte also der Eigenwert Null die algebraische Vielfachheit zwei, die anderen beiden hatten algebraische Vielfachheit eins. Die Dimension des jeweiligen Eigenraums, die geometrische Vielfachheit also, war genauso groß, jedoch muß dies im allgemeinen nicht der Fall sein: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

etwa hat das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

die doppelte Nullstelle eins, $\lambda = 1$ ist also ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit zwei. Der zugehörige Eigenraum ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$0x_1 + 1x_2 = 0$$
$$0x_1 + 0x_2 = 0\,,$$

also gerade die Menge aller Vektoren der Form $\binom{x}{0}$ und somit eindimensional. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts eins ist daher nur eins.

Das Beispiel der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\vartheta - y\sin\vartheta \\ y\cos\vartheta + x\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

mit Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

zeigt, daß es überhaupt keine Eigenwerte geben muß, denn hier ist das charakteristische Polynom gleich

$$\begin{vmatrix} \cos\vartheta-\lambda & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta-\lambda \end{vmatrix} = (\cos\vartheta-\lambda)^2+\sin^2\vartheta\,.$$

Abgesehen vom Fall $\sin\vartheta = 0$, wenn A gleich der positiven oder negativen Einheitsmatrix ist, hat dieses Polynom keine reelle Nullstelle, da es nur positive Werte annimmt. Es hat aber natürlich die beiden komplexen Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \cos\vartheta \pm i\sin\vartheta = e^{\pm i\vartheta}\,;$$

fassen wir φ als Abbildung von $\mathbb{C}^2$ nach $\mathbb{C}^2$ auf, gibt es also zwei Eigenwerte. Beide haben die algebraische und geometrische Vielfachheit eins; zugehörige Eigenvektoren sind etwa $\binom{1}{i}$ und $\binom{1}{-i}$. Wählen wir diese beiden Vektoren als Basis, so wird die Abbildungsmatrix von φ bezüglich dieser neuen Basis zur Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-i\vartheta} \end{pmatrix}.$$

Allgemein gilt für die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von Eigenvektoren

Satz: *a)* Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.
b) Die Summe der algebraischen Vielfachheiten der verschiedenen Eigenwerte einer linearen Abbildung ist kleiner oder gleich der Dimension des Vektorraums.

Beweis: a) Der Eigenwert λ der $n\times n$-Matrix A habe die geometrische Vielfachheit r, d.h. der zugehörige Eigenraum habe die Dimension r. Wir wählen eine Basis $\vec b_1,\dots,\vec b_r$ dieses Eigenraums und ergänzen sie zu einer Basis des gesamten Vektorraums; bezüglich dieser Basis sei C die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} k^n \to k^n \\ \vec v \mapsto A\vec v \end{cases}.$$

Da $\vec b_1,\dots,\vec b_r$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ sind, ist $\varphi(\vec b_i) = \lambda\vec b_i$. In den ersten r Spalten von C steht also jeweils in der Diagonalen das Element λ und ansonsten überall die Null. A hat somit die Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & M & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei uns weder die mit $*$ bezeichneten Körperelemente noch die $(n-r)\times(n-r)$-Matrix M weiter zu interessieren brauchen.

Für $C - xE$ gilt dasselbe, nur daß jetzt $\lambda - x$ in der Diagonalen steht, d.h. diese Matrix hat die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda-x & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda-x & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda-x & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & M - xE_{n-r} & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei E_{n-r} die $(n-r)\times(n-r)$-Einheitsmatrix bezeichnet.

Zur Berechnung ihrer Determinanten verwenden wir den LAPLACEschen Entwicklungssatz: Da in der ersten Zeile (oder Spalte) nur an der ersten Stelle ein von Null verschiedener Eintrag steht, ist diese Determinante gleich $(\lambda - x)$ mal der Determinante jener Matrix, die durch Streichen der ersten Zeile und Spalte entsteht. Falls $r > 1$ ist, hat diese neue Matrix dieselbe Form, wir können den LAPLACEschen Entwicklungssatz also noch einmal anwenden *usw.;* wir erhalten schließlich

$$\det(C - xE) = (\lambda - x)^r \det(M - xE_{n-r})\,.$$

Somit ist $\det(C - xE)$ durch $(x-\lambda)^r$ teilbar.

Was uns wirklich interessiert, ist aber nicht $\det(C - xE)$, sondern $\det(A - xE)$. Ist B die Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis des k^n auf die Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$, jene Matrix also, deren Spaltenvektoren die $\vec{b}_i$ sind, so ist $C = B^{-1}AB$ und

$$\begin{aligned}\det(C - xE) &= \det(B^{-1}AB - xE) = \det(B^{-1}AB - xB^{-1}EB)\\ &= \det\bigl(B(A - xE)B^{-1}\bigr) = \det B \det(A - xE)(\det B)^{-1}\\ &= \det(A - xE)\,.\end{aligned}$$

A und C haben also dasselbe charakteristische Polynom, und somit ist auch das charakteristische Polynom von A durch $(x - \lambda)^r$ teilbar. Die algebraische Vielfachheit von λ ist daher mindestens r.

Unabhängig von diesem Ergebnis wollen wir noch festhalten, daß nach der gerade durchgeführten Rechnung für eine beliebige Matrix A und eine invertierbare Matrix B die beiden Matrizen A und BAB^{-1} dasselbe charakteristische Polynom haben; insbesondere haben also die Abbildungsmatrizen einer linearen Abbildung zu verschiedenen Basen dasselbe charakteristische Polynom.

b) Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ die verschiedenen Eigenwerte von φ und sind $r_1, \dots, r_\ell$ ihre algebraischen Vielfachheiten, so ist das charakteristische Polynom $\det(A - xE)$ teilbar durch

$$(x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_\ell)^{r_\ell}\,.$$

Dies ist ein Polynom vom Grad $r_1 + \cdots + r_\ell$, wohingegen das charakteristische Polynom Grad n hat; daher ist

$$r_1 + \cdots + r_\ell \le n\,,$$

denn der Grad eines Teilers kann nicht größer sein als der des Polynoms selbst. ■

Zum Abschluß dieses Abschnitts sei noch ein Kriterium angegeben, wann es für eine lineare Abbildung φ eine Basis aus Eigenwerten gibt, wann also die Abbildungsmatrix bezüglich einer geeigneten Basis Diagonalgestalt hat:

Satz: Zur linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ eines n-dimensionalen Vektorraums gibt es genau dann eine Basis aus Eigenvektoren von φ, wenn

1.) das charakteristische Polynom von φ als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann

2.) die geometrische Vielfachheit eines jeden Eigenwerts gleich der algebraischen ist.

Beweis: Zunächst sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung derart, daß V eine Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ aus Eigenvektoren von φ habe. Wir müssen zeigen, daß *1.)* und *2.)* erfüllt sind.

Da die Basisvektoren $\vec{b}_i$ Eigenvektoren sind, gibt es zu jedem $\vec{b}_i$ ein Körperelement λ_i, so daß $\varphi(\vec{b}_i) = \lambda\vec{b}_i$ ist; bezüglich dieser Basis hat die Abbildungsmatrix A von φ daher Diagonalgestalt, und das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)$$

zerfällt in der Tat in Linearfaktoren. Die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i ist gleich der Anzahl jeder Indizes $j \in \{1, \dots, n\}$, für die $\lambda_j = \lambda_i$ ist; dies ist auch die geometrische Vielfachheit, denn der Eigenraum wird aufgespannt von den Vektoren $\vec{b}_j$ zu diesen j. Also sind *1)* und *2)* erfüllt.

Umgekehrt erfülle die Abbildung φ die Bedingungen *1)* und *2);* wir müssen zeigen, daß es eine Basis aus Eigenvektoren von φ gibt.

Wegen *1)* läßt sich das charakteristische Polynom in der Form

$$(\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_s - \lambda)^{r_s}$$

schreiben, wobei wir annehmen können, daß die λ_i paarweise verschieden sind. Dann ist r_i die algebraische Vielfachheit von λ_i. Da das charakteristische Polynom den Grad n hat, folgt, daß

$$r_1 + \cdots + r_s = n$$

ist. Außerdem gibt es wegen *2.)* zu jedem λ_i einen r_i-dimensionalen Eigenraum, also r_i linear unabhängige Eigenvektoren. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten nach dem Lemma vom Anfang dieses Abschnitts stets linear unabhängig sind, ist auch das System all dieser Eigenvektoren linear unabhängig und somit eine Basis, denn es besteht aus $n = \dim V$ Vektoren. Damit ist eine Basis aus Eigenvektoren von φ gefunden. ■

e) Eigenwerte symmetrischer und Hermitescher Matrizen

Wie wir im letzten Paragraphen gesehen haben, kann die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts kleiner sein als die algebraische, und im Falle einer reellen Matrix müssen nicht auch die Eigenwerte reell sein. In diesem Abschnitt wollen wir sehen, daß solche Dinge bei symmetrischen (und auch den noch zu definierenden HERMITEschen) Matrizen nicht möglich sind.

Symmetrische und HERMITEsche Matrizen hängen eng mit (HERMITEschen) Skalarprodukten zusammen: Für zwei Vektoren

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{b}_i \quad \text{und} \quad \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{b}_i$$

aus einem endlichdimensionalen EUKLIDischen Vektorraum V mit Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ ist wegen der Linearität des Skalarprodukts in beiden Argumenten

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{b}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \vec{b}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i w_j \, \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \,.$$

Setzen wir

$$c_{ij} \underset{\text{def}}{=} \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \,,$$

so ist wegen der Symmetrie des Skalarprodukts $c_{ij} = c_{ji}$, wir haben also eine symmetrische $n \times n$-Matrix C.

Die Matrix C legt das Skalarprodukt eindeutig fest, denn für zwei beliebige Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ wie oben ist

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i w_j \cdot c_{ij} \,.$$

Diese Formel definiert umgekehrt auch für jede symmetrische Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine bilineare Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$, allerdings muß diese nicht positiv definit und damit kein Skalarprodukt sein.

Ist V ein HERMITEscher Vektorraum, wieder mit Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$, so ist jetzt für zwei Vektoren

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{b}_i \quad \text{und} \quad \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{b}_i \quad \text{mit} \quad v_i, w_i \in \mathbb{C}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{b}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \vec{b}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \overline{w}_j \, \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \,.$$

Setzen wir auch hier wieder

$$c_{ij} \underset{\text{def}}{=} \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \,,$$

so ist nun $c_{ij} = \overline{c_{ji}}$. Matrizen mit dieser Eigenschaft wollen wir als HERMITEsch bezeichnen.

Um dies etwas kompakter ausdrücken zu können, definieren wir

Definition: *a)* Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bezeichnen wir die Matrix $\overline{A} = \left(\overline{a_{ij}}\right)$ als die zu A *konjugiert komplexe Matrix.*
b) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt HERMITEsch, falls ${}^tA = \overline{A}$ ist.
c) Zu einem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ heißt $\overline{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix}$ der *konjugiert komplexe* Vektor.

(Letztere Schreibweise sieht zwar grausam aus, läßt sich aber nicht vermeiden, wenn man Vektoren mit Pfeilen kennzeichnet. Alternativen wie der Fettdruck von Vektoren funktionieren weder an der Tafel noch in einer Mitschrift, und für Frakturbuchstaben wie $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ können sich leider nur wenige Studenten begeistern.)

Schließlich wollen wir Vektoren hier mit $1 \times n$-Matrizen identifizieren; insbesondere rechnen wir mit dem „transponierten Vektor“

$${}^t\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \,.$$

Mit dieser Bezeichnung kann das Standardskalarprodukt zweier Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ als Matrixprodukt ${}^t\vec{v}\vec{w}$ geschrieben werden; das Standard-HERMITEsche Produkt in $\mathbb{C}^n$ ist entsprechend ${}^t\vec{v}\,\overline{\vec{w}}$.

Da die komplexe Konjugation auf $\mathbb{R}$ keine Wirkung hat, ist eine HERMITEsche Matrix mit reellen Einträgen einfach eine symmetrische Matrix; wir können uns im folgenden bei den Beweisen daher auf HERMITEsche Matrizen beschränken und erhalten trotzdem Ergebnisse, die auch für reelle symmetrische Matrizen gelten.

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist

Satz: A sei eine symmetrische reelle oder HERMITEsche (komplexe) Matrix.
a) Dann sind alle Eigenwerte von A reell.
b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal bezüglich des Standard- *bzw.* HERMITEschen Skalarprodukts.
c) Für jeden Eigenwert von A ist die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit.
d) $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{C}^n$ hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A.

Beweis: a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so gibt es nach Definition einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$, so daß $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ist. Da die komplexe Konjugation mit sämtlichen Grundrechenarten vertauschbar ist, folgt, daß

$$\overline{A}\,\overline{\vec{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\vec{v}}\,, \quad \text{d.h.} \quad {}^t\vec{v}\overline{A}\,\overline{\vec{v}} = {}^t\vec{v}\overline{\lambda}\,\overline{\vec{v}} = \overline{\lambda}\,{}^t\vec{v}\,\overline{\vec{v}}\,.$$

Bislang gilt alles noch für beliebige $n \times n$-Matrizen; um die Symmetrie *bzw.* HERMITE-Eigenschaft von A ins Spiel zu bringen, betrachten wir den Vektor ${}^t(A\vec{v}) = {}^t\vec{v}\;{}^tA$. Da nach Voraussetzung ${}^tA = \overline{A}$ ist, können wir die rechte Seite der Gleichung auch als ${}^t\vec{v}\;\overline{A}$ schreiben, und die linke Seite als ${}^t(\lambda v) = \lambda\,{}^t\vec{v}$, da $\vec{v}$ Eigenvektor von A ist. Somit können wir die Zahl ${}^t\vec{v}\overline{A}\,\overline{\vec{v}}$ auch schreiben als

$${}^t\vec{v}\overline{A}\,\overline{\vec{v}} = \left({}^t\vec{v}\;\overline{A}\right)\overline{\vec{v}} = \lambda\,{}^t\vec{v}\,\overline{\vec{v}}\,.$$

Somit haben wir die beiden Darstellungen

$${}^t\vec{v}\overline{A}\,\overline{\vec{v}} = \lambda\,{}^t\vec{v}a\,\overline{\vec{v}} \quad \text{und} \quad {}^t\vec{v}\overline{A}\,\overline{\vec{v}} = \overline{\lambda}\,{}^t\vec{v}a\,\overline{\vec{v}}\,,$$

die nur dann beide richtig sein können, wenn $\lambda = \overline{\lambda}$ und somit reell ist; denn ${}^t\vec{v}\,\overline{\vec{v}}$ kann wegen der Definitheit HERMITEscher Skalarprodukte für einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ nicht verschwinden.

b) $\vec{v}$ sei Eigenvektor zum Eigenwert λ, und $\vec{w}$ sei Eigenvektor zum davon verschiedenen Eigenwert μ, d.h.

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{und} \quad A\vec{w} = \mu\vec{w} \quad \text{und} \quad \lambda \neq \mu\,.$$

Dann ist

$$\lambda\,{}^t\vec{v}\overline{\vec{w}} = {}^t(\lambda\vec{v})\overline{\vec{w}} = {}^t(A\vec{v})\overline{\vec{w}} = {}^t\vec{v}\,{}^tA\overline{\vec{w}} = {}^t\vec{v}\overline{A}\,\overline{\vec{w}} = {}^t\vec{v}\overline{A\vec{w}} = {}^t\vec{v}\overline{\mu\vec{w}} = \overline{\mu}\,{}^t\vec{v}\overline{\vec{w}}\,.$$

Wie wir schon wissen, sind alle Eigenwerte reell, d.h. $\overline{\mu} = \mu \neq \lambda$. Die obige Gleichungskette kann daher nur richtig sein, wenn ${}^t\vec{v}\,\overline{\vec{w}}$ verschwindet, d.h. wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ orthogonal sind.

Beim Beweis von *c)* gehen wir im wesentlichen genauso vor wie im vorigen Abschnitt, als wir zeigten, daß die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts stets kleiner oder gleich der algebraischen ist; die zusätzliche Annahme über die Matrix A wird zeigen, daß hier die beiden Vielfachheiten sogar gleich sind.

λ sei also ein Eigenwert von A mit geometrischer Vielfachheit r, d.h. der zugehörige Eigenraum habe die Dimension r. Wir wählen eine Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$ davon und ergänzen sie zu einer Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ des gesamten Vektorraums $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$. Indem wir nötigenfalls das GRAM-SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren anwenden und anschließend die Längen aller Vektoren auf eins normieren, können wir annehmen, daß es sich dabei um eine Orthonormalbasis handelt.

Nun betrachten wir die lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \to V; \quad \vec{v} \mapsto A\vec{v}\,.$$

Bezüglich der Standardbasis hat sie A als Abbildungsmatrix; für uns interessanter ist aber die Abbildungsmatrix C bezüglich der neuen Basis $\mathcal{B}$. Dazu sei B die Matrix mit Spaltenvektoren $\vec{b}_i$; da der Eintrag an der Stelle (i,j) eines Matrixprodukts das (Standard-)Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors des ersten Faktors mit dem j-ten Spaltenvektor des zweiten Faktors ist, steht an der Stelle (i,j) der Matrix ${}^tB\overline{B}$

das (Standard) HERMITEsche Produkt der Vektoren $\vec{b}_i$ und $\vec{b}_j$. Da $\mathcal{B}$ als Orthonormalbasis gewählt wurde, ist daher

$$ {}^t\!B\overline{B} = E \quad \text{und damit} \quad {}^t\!B = \overline{B}^{\,-1} = \overline{B^{-1}}\,. $$

Aus dieser Formel folgt, daß mit A auch C eine HERMITEsche Matrix ist, denn

$$ {}^t C = {}^t(B^{-1}AB) = {}^t B\, {}^t A\, {}^t B^{-1} = \overline{B^{-1}}\,\overline{A}\,\overline{B} = \overline{B^{-1}AB} = \overline{C}\,. $$

Die ersten r Basisvektoren $\vec{b}_i$ sind Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ; für $i \le r$ ist daher $\varphi(\vec{b}_i) = \lambda\vec{b}_i$, d.h. in der i-ten Spalte von C steht an der i-ten Stelle die reelle Zahl λ und ansonsten überall die Null, genau wie auch im vorigen Abschnitt. Im Gegensatz zu dort haben wir nun aber eine HERMITEsche Matrix; da in der i-ten Spalte abgesehen von λ auf der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen, muß daher dasselbe auch für die i-te Zeile gelten; die Matrix C hat also die Form

$$ C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & M & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix}, $$

wobei M eine $(n-r)\times(n-r)$-Matrix ist, die uns nicht weiter zu interessieren braucht. Damit hat $C - xE$ die Form

$$ \begin{pmatrix} \lambda - x & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - x & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & M - xE_{n-r} & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix}, $$

wobei E_{n-r} die $(n-r)\times(n-r)$-Einheitsmatrix bezeichnet.

Wie wir uns schon im vorigen Abschnitt überlegten beim Beweis, daß die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts immer kleiner oder gleich der algebraischen ist, haben A und C dasselbe charakterische Polynom; da wir die Matrix C besser kennen, rechnen wir mit ihr.

Wie in Abschnitt *d)* folgt auf Grund der obigen Form der Matrix $C - xE$ aus dem LAPLACEschen Entwicklungssatz, daß

$$ \det(A - xE) = \det(C - xE) = (\lambda - x)^r \det(M - xE_{n-r}) $$

ist, wobei E_{n-r} die $(n-r)\times(n-r)$-Einheitsmatrix bezeichnet. Wir müssen zeigen, daß die algebraische Vielfachheit von λ *genau* gleich r ist, daß also λ keine Nullstelle von $\det(M - xE_{n-r})$ sein kann.

Wäre λ Nullstelle von $\det(M - xE_{n-r})$, so hätte M den Eigenwert λ, es gäbe also einen $(n-r)$-dimensionalen Eigenvektor $\vec{w}$ von M. Wegen der speziellen Form der Matrix C ist für jeden Eigenvektor

$$ \vec{w} = \begin{pmatrix} w_{r-1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \quad \text{von } M \text{ der Vektor} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{r-1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} $$

ein Eigenvektor von C und damit von A – Eigenvektoren hängen schließlich nur von der linearen Abbildung ab, nicht von einer speziellen Abbildungsmatrix. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß der Eigenraum zum Eigenwert λ von $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ erzeugt wird, denn $\vec{v}$ ist linear unabhängig von diesen $\vec{b}_i$.

Also hat λ die algebraische Vielfachheit r, und *c)* ist gezeigt.

d) ist nun eine einfache Folgerung aus den übrigen Aussagen und dem aus Kapitel 3, §1*f)* bekannten *Fundamentalsatz der Algebra*, wonach jedes reelle oder komplexe Polynom über den komplexen Zahlen in Linearfaktoren zerfällt:

Wir wissen dann, daß die Summe der algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte gleich der Dimension n des Vektorraums ist und daß alle

Eigenwerte reell sind; da die algebraischen gleich den geometrischen Vielfachheiten sind, gibt es also n Eigenvektoren, die eine Basis von V bilden.

Für jeden einzelnen Eigenraum können wir die Eigenvektoren nach GRAM-SCHMIDT so wählen, daß sie eine Orthonormalbasis bilden; da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stets orthogonal sind, ist die Vereinigungsmenge dieser Basen Orthonormalbasis von V. ■

f) Hauptvektoren und und die Jordan-Zerlegung

Falls die lineare Abbildung $\varphi: V \to V$ Eigenwerte hat, deren geometrische Vielfachheit kleiner als die algebraische ist, haben wir keine Chance auf eine Basis, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ Diagonalgestalt hat: Die Elemente einer solchen Basis wären allesamt Eigenvektoren, und bei zu kleiner geometrischer Vielfachheit gibt es nicht genügend linear unabhängige Eigenvektoren. Außerdem gibt es offensichtlich keine Chance auf eine Diagonalgestalt, wenn das charakteristische Polynom von φ nicht in Linearfaktoren zerfällt, denn dann ist schon die Summe der *algebraischen* Vielfachheiten der Eigenwerte kleiner als die Dimension von V.

Das zweite dieser Probleme konnten wir zumindest beim Beispiel der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

dadurch lösen, daß wir zu einem größeren Körper übergegangen sind, nämlich von den reellen zu den komplexen Zahlen.

Tatsächlich läßt es sich *immer* dadurch lösen, daß man zu einem größeren Körper übergeht: Aus Kapitel 3, §1*f)* kennen wir den *Fundamentalsatz der Algebra*, wonach jedes Polynom mit komplexen (also insbeondere auch mit reellen) Koeffizienten über den komplexen Zahlen in Linearfaktoreni zerfällt. Für andere Körper als die reellen oder komplexen Zahlen zeigt die Algebra, daß es zu jedem Polynom über einem Körper stets einen Erweiterungskörper gibt, der als Vektorraum über dem Ausgangskörper endliche Dimension hat, so daß das gegebene Polynom dort in Linearfaktoren zerfällt. Mit Methoden, die im allgemeinen nicht

konstruktiv sind, folgt sogar, daß es stets einen (im allgemeinen unendlichdimensionalen) Erweiterungskörper gibt, über dem *jedes* Polynom in Linearfaktoren zerfällt, den sogenannte *algebraischen Abschluß* des Ausgangskörpers. Einzelheiten findet man in jedem Lehrbuch der Algebra.

Somit können wir das Problem, daß das charakteristische Polynom eventuell nicht genügend viele Nullstellen hat, im wesentlichen ignorieren. Ernster ist das Problem mit Eigenwerten, deren geometrische Vielfachheit kleiner ist als die algebraische. Damit wollen wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen.

Die Lösung wird darin bestehen, daß wir solchen Eigenwerten Räume zuordnen, die größer sind als die Eigenräume, aber immer noch eine gut an die Abbildung angepaßte Basis haben. Insbesondere sollen sie, genau wie die Eigenräume, *invariant* sein unter der betrachteten Abbildung:

Definition: $\varphi: V \to V$ sei eine lineare Abbildung. Ein Untervektorraum $U \le V$ heißt invariant unter φ oder kurz φ-invariant, wenn $\varphi(U) \le U$ ist.

Die φ-Invarianz der Eigenräume im Sinne dieser Definition ist klar, denn auf einem Eigenraum ist φ einfach die Multiplikation mit dem zugehörigen Eigenwert.

Für das folgende wollen wir der Einfachheit halber annehmen, daß V endliche Dimension habe. Dann ist erst recht jeder φ-invariante Unterraum U endlichdimensional, wir können also eine endliche Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r\}$ von U finden und diese ergänzen zu einer Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ von V. Da $\varphi(U) \le U$ ist, liegen die Bilder der ersten r Basisvektoren wieder in U, d.h. die Abbildungsmatrix bezüglich dieser Basis hat die Form

$$\begin{pmatrix} \boxed{A} & \boxed{C} \\ \mathbf{0} & \boxed{B} \end{pmatrix}$$

mit einer $r \times r$-Matrix A, der Abbildungsmatrix von $\varphi_{|U}: U \to U$, einer $(n-r)\times(n-r)$-Matrix B und einer $(n-r)\times r$-Matrix C. Die fette Null soll hier, wie auch in den noch folgenden Matrizen, stets eine Nullmatrix der jeweils korrekten Größe bezeichnen.

Noch besser wird die Situation, wenn U ein φ-invariantes Komplement hat, wenn es also einen weiteren φ-invarianten Untervektorraum W gibt, so daß $V = U + W$ ist und $U \cap W = \{\vec{0}\}$. (Wir sagen dann, $V = U \oplus W$ sei die *direkte Summe* von U und W.) In diesem Fall können wir für $\vec{b}_{r+1}$ bis $\vec{b}_n$ die Vektoren einer Basis von W nehmen, und da nun auch W auf sich selbst abgebildet wird, haben wir eine Abbildungsmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} \boxed{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{B} \end{pmatrix} .$$

Allgemein sagen wir für s Untervektorräume $U_1, \ldots, U_s$ von V, daß V die direkte Summe

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s = \bigoplus_{i=1}^{s} U_i$$

sei, wenn

$$V = U_1 + \cdots + U_s = \sum_{i=1}^{s} U_i \quad \text{und} \quad U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{\vec{0}\}$$

ist. Falls hierbei die U_i allesamt φ-invariant sind, können wir ihre Basen aneinandersetzen und erhalten eine Basis, bezüglich derer die Abbildungsmatrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{A_2} & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

hat, wobei die A_i die Abbildungsmatrizen der Einschränkungen $\varphi_{|U_i}$ zu Abbildungen von U_i nach U_i sind.

Kandidaten für Untervektorräume U_i liefern die Haupträume:

Definition: *a)* Ein Vektor $\vec{v} \in V$ heißt *Hauptvektor* von φ zum Eigenwert λ, wenn es ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ gibt, so daß $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell(\vec{v}) = \vec{0}$ ist. Falls $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell-1} \neq \vec{0}$ ist, bezeichnen wir ℓ als die *Stufe* des Hauptvektors.

b) Die Menge aller Hauptvektoren von φ zum Eigenwert λ heißt *Hauptraum* zu λ und wird mit H_λ bezeichnet.

Insbesondere sind die Hauptvektoren der Stufe eins genau die Eigenvektoren zum Eigenwert λ: Der Nullvektor ist nämlich kein Hauptvektor erster Stufe, da er bereits von $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^0 = \mathrm{id}$ auf $\vec{0}$ abgebildet wird.

Es ist klar, daß die Hauptvektoren einen Untervektorraum bilden, denn mit $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})$ sind auch dessen Schachtelungen

$$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})$$

lineare Abbildungen, und die Hauptvektoren der Stufe höchstens ℓ sind gerade die Elemente des Kerns dieser Abbildung. Da wir von einem endlichdimensionalen Vektorraum V ausgehen, kann die Folge dieser Kerne nicht unbeschränkt wachsen, es gibt also ein maximales ℓ, das als Stufe eines Hauptvektors auftreten kann. Mit diesem ℓ ist der Hauptraum H_λ gerade der Kern von $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell$.

Der Nutzen der Haupträume ergibt sich aus folgendem

Lemma: H_λ ist ein φ-invarianter Unterraum von V. Bezeichnet ℓ die größte Stufe eines Hauptvektors aus H_λ, so ist $\mathrm{Bild}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell$ ein φ-invariantes Komplement.

Beweis: Beginnen wir mit der Invarianz von H_λ unter φ.

Ist $\vec{v}$ ein Hauptvektor der Stufe j, so ist

$$\begin{aligned}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^j(\vec{v}) &= (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{j-1}\big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(\vec{v})\big) \\ &= (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{j-1}\big(\varphi(\vec{v}) - \lambda\vec{v}\big) = \vec{0}\,,\end{aligned}$$

$\varphi(\vec{v}) - \lambda\vec{v}$ ist also ein Hauptvektor der Stufe höchstens $j - 1$ und somit insbesondere ein Element von H_λ. Da mit $\vec{v}$ auch $\lambda\vec{v}$ in H_λ liegt, ist damit auch

$$\varphi(\vec{v}) = \big(\varphi(\vec{v}) - \lambda\vec{v}\big) + \lambda\vec{v} \in H_\lambda$$

ein Hauptvektor.

Für $\vec{v} \in \operatorname{Bild}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell$ liegt zunächst auch $\varphi(\vec{v}) - \lambda\vec{v}$ im Bild von $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell$, denn das Bild von $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell$ enthält das Bild von $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell-1}$. Da mit $\vec{v}$ auch $\lambda\vec{v}$ im Bild liegt, folgt wie oben die Behauptung.

Als nächstes müssen wir zeigen, daß der Durchschnitt der beiden Summanden nur aus dem Nullvektor besteht. Dazu sei $\vec{v}$ ein Vektor aus diesem Durchschnitt. Dann liegt $\vec{v}$ sowohl im Kern als auch im Bild der linearen Abbildung $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell$, es gibt also einen Vektor $\vec{w} \in v$, so daß $\vec{v} = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell(\vec{w})$ ist, und $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell(\vec{v}) = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{2\ell}(\vec{w}) = \vec{0}$. Damit liegt $\vec{w}$ aber im Hauptraum zu λ, d.h. $\vec{v} = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell(\vec{w}) = \vec{0}$.

Nach der Dimensionsformel ist

$$\dim \operatorname{Bild}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell = \dim V - \dim \operatorname{Kern}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell ,$$

also ist

$$\dim \operatorname{Kern}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell + \dim \operatorname{Bild}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell = \dim V ,$$

die beiden Untervektorräume erzeugen somit ganz V.

■

Die Zerlegung von V nach diesem Lemma heißt FITTING-Zerlegung.

Der deutsche Mathematiker HANS FITTING (1906–1938) beschäftigte sich vor allem mit der Untersuchung von Operatoren (und Operatorenringen). Trotz seines frühen Todes konnte er damit wesentliche Beiträge zur Algebra leisten, vor allem auch zur Erforschung der Struktur von Gruppen.

Das Schöne an der FITTING-Zerlegung ist, daß sie rekursiv fortgesetzt werden kann: Da $\operatorname{Bild}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell$ auch φ-invariant ist, können wir für die Einschränkung von φ auf diesen Unterraum einen Hauptraum zu einem anderen Eigenwert abspalten *usw.* Bevor wir uns das genauer überlegen, wollen wir uns aber zunächst eine gute Basis für den Hauptraum H_λ verschaffen.

Lemma: Der Hauptraum H_λ hat eine Basis, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ eine obere Dreiecksmatrix ist. Alle Hauptdiagonaleinträge dieser Matrix sind gleich λ.

Beweis: Wir beginnen mit einer Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{r_1}\}$ des Eigenraums zu λ und ergänzen diese zu einer Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{r_2}\}$ des Raums aller Hauptvektoren der Stufe höchstens zwei und so weiter, bis eine Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$ des gesamten Hauptraums erreicht ist.

Der Vektor $\vec{b}_i$ sei Hauptvektor der Stufe ℓ; dann ist

$$\begin{aligned}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell(\vec{b}_i) &= (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell-1}\big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(\vec{b}_i)\big)\\ &= (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell-1}\big(\varphi(\vec{b}_i) - \lambda\vec{b}_i\big) = \vec{0} ,\end{aligned}$$

$\varphi(\vec{b}_i) - \lambda\vec{b}_i$ ist also ein Hauptvektor der Stufe höchstens $\ell - 1$. Nach Konstruktion der Basis ist $\varphi(\vec{b}_i) - \lambda\vec{b}_i$ daher eine Linearkombination von Basisvektoren $\vec{b}_j$ mit Indizes echt kleiner i, d.h.

$$\varphi(\vec{b}_i) = \lambda\vec{b}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\vec{b}_j .$$

Bezüglich der Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$ hat die Abbildungsmatrix daher in der Tat die gewünschte Form.

■

Abspaltung immer weiterer Haupträume auch vom invarianten Komplement führt schließlich zum

Satz: Zu einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ eines endlichdimensionalen k-Vektorraums V gibt es genau dann eine Basis von V, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ eine Dreiecksmatrix ist, wenn das charakteristische Polynom von φ über k als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann. Alsdann kann die Basis so gewählt werden, daß die Abbildungsmatrix die Form

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{A_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

hat mit Dreiecksmatrizen A_i, die auf der Hauptdiagonalen den i-ten Eigenwert λ_i stehen haben.

Beweis: Falls es zu φ eine Basis gibt, bezüglich derer die Abbildungsmatrix A von φ eine Dreiecksmatrix ist, ist bezüglich dieser Basis auch $A-\lambda E$ eine Dreiecksmatrix. Da die Determinante einer Dreiecksmatrix gerade das Produkt der Diagonaleinträge ist, bekommen wir als charakteristisches Polynom $\det(A-\lambda E)$ ein Produkt von Linearfaktoren.

Falls umgekehrt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, gibt es auf jeden Fall Eigenwerte; λ_1 sei einer davon, und H_1 sei der zugehörige Hauptraum. Dazu gibt es nach dem gerade bewiesenen Lemma eine Basis, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von $\varphi_{|H_{\lambda_1}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, deren sämtliche Hauptdiagonaleinträge gleich λ_1 sind.

Nach dem Lemma von der FITTING-Zerlegung gibt es zu H_{λ_1} ein φ-invariantes Komplement V_1, so daß $V = H_{\lambda_1} \oplus V_1$ ist. Wir ergänzen die Basis von H_{λ_1} durch eine Basis von V_1 zu einer Basis von V; bezüglich dieser Basis hat φ dann eine Abbildungsmatrix der Form

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{B_1} \end{pmatrix}$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Entwicklung des charakteristischen Polynoms $\det(A-\lambda E)$ nach der ersten Spalte, gefolgt von der Entwicklung des Rests nach seiner ersten Spalte und so weiter, bis die ersten $r_1 = \dim H_{\lambda_1}$ Spalten aufgebraucht sind, zeigt, daß

$$\det(A_1-\lambda E) = (\lambda_1-\lambda)^{r_1}\cdot\det(B_1-\lambda E)$$

ist, das charakteristische Polynom von $\varphi_{|V_1}$ ist also ein Teiler des charakteristischen Polynoms von φ und zerfällt somit auch in Linearfaktoren.

Insbesondere hat es (mindestens) eine Nullstelle λ_2; wir können deren Hauptraum H_{λ_2} in V_1 betrachten und damit V_1 genau wie oben weiter zerlegen in H_{λ_2} und dessen invariantes Komplement V_2. Nimmt man nun als Basisvektoren von V zunächst die Basisvektoren von H_{λ_1} wie oben, dann entsprechende Basisvektoren für H_{λ_2} und schließlich noch solche für V_2, hat die Abbildungsmatrix A_2 bezüglich dieser neuen Basis die Form

$$A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{D_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{B_2} \end{pmatrix}$$

mit einer neuen Dreiecksmatrix

$$D_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Auf diese Weise lassen sich sukzessive immer weitere Haupträume abspalten, bis schließlich eine Basis erreicht ist, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ die Form

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{D_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boxed{D_s} \end{pmatrix}$$

hat mit oberen Dreiecksmatrizen

$$D_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_i & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

zu den Eigenwerten von φ. Ist D_i eine $r_i \times r_i$-Matrix, so ist das charakteristische Polynom von φ

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1}(\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \cdots (\lambda_1 - \lambda)^{r_s} ,$$

die r_i sind also gerade die algebraischen Vielfachheiten der λ_i. ■

Für spätere Anwendungen wollen wir das gerade bewiesene Ergebnis noch etwas umformulieren:

Satz: Falls das charakteristische Polynom von $\varphi: V \to V$ in Linearfaktoren zerfällt, gibt es eine Basis von V, bezüglich derer die Abbildungsmatrix A von φ als $A = D + N$ geschrieben werden kann, wobei D eine Diagonalmatrix ist und N eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen. Außerdem ist $DN = ND$.

Beweis: Wir nehmen natürlich die Basis aus dem gerade beendeten Beweis; die Diagonalmatrix D soll genau aus den Diagonalelementen der Abbildungsmatrix A bestehen, also die Eigenwerte entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheiten als Diagonalelemente enthalten, und $N = A - D$. Für jede einzelne Dreiecksmatrix D_i aus dem obigen Beweis kommutiert der Diagonalanteil mit dem Rest, da der Diagonalanteil gerade das λ_i-fache der Einheitsmatrix ist. Damit ist auch $DN = ND$, denn bei beiden Multiplikationen treffen, abgesehen von den Nullen, immer nur Einträge aus einem D_i aufeinander. ■

Diese Zerlegung aus diesem Satz bezeichnet man nach dem französischen Mathematiker CAMILLE JORDAN als JORDAN-Zerlegung.

MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (1838–1922) arbeitete bei der Herleitung dieser und weiterer Zerlegungen nicht mit komplexen Matrizen, sondern mit Matrizen über endlichen Körpern, motiviert durch Fragen aus der Gruppentheorie und Lösbarkeitsfragen für nichtlineare Gleichungen. Weitere Arbeiten beschäftigen sich mit der Anwendung gruppentheoretischer Methoden auf die Geometrie sowie mit der Topologie, wo er z.B. bewies, daß jede doppeltpunktfreie geschlossene Kurve die Ebene in zwei Gebiete zerlegt. Außerdem entwickelte er neue Methoden zum Nachweis der Konvergenz von FOURIER-Reihen.

Ziel unserer Betrachtungen in diesem Paragraphen war die Berechnung von Potenzen und Exponentialfunktionen einer Matrix. Mit der JORDAN-Zerlegung ist dies im wesentlichen erreicht: Da D und N miteinander kommutieren, gilt für Potenzen der Summe $D + N$ der „übliche“ binomische Lehrsatz, d.h.

$$(D + N)^m = \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} D^{m-\ell} N^\ell ,$$

und

$$e^{D+N} = e^D \cdot e^N .$$

Die Potenzen von D sind sehr einfach zu berechnen: D^j ist wieder eine Diagonalmatrix, ihre Diagonalelemente sind die j-ten Potenzen der Diagonalelemente von D; genauso ist e^D einfach die Diagonalmatrix mit den Exponentialfunktionen der Einträge von D als Einträgen.

N ist eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen, wir wissen also bereits, daß es einen Exponenten gibt, ab dem alle Potenzen gleich der Nullmatrix sind, so daß die Exponentialreihe zu einer endlichen Summe wird und auch in der binomischen Formel selbst für große m nur relativ wenige Summanden auftreten.

Mit der JORDAN-Zerlegung können wir diese Aussage nun noch etwas präzisieren: Die lineare Abbildung ψ zu N bildet den i-ten Basisvektor $\vec{b}_i$ ab in den von Basisvektoren $\vec{b}_j$ mit $j \le i - 1$ erzeugten Unterraum. Für diese Basisvektoren gilt eine analoge Aussage, $\psi^{(2)}(\vec{b}_i)$ liegt daher im Unterraum, den die $\vec{b}_j$ mit $j \le i - 2$ aufspannen. Induktiv folgt, daß $\psi^{(\ell)}(\vec{b}_i)$ im von den $\vec{b}_j$ mit $j \le i - \ell$ aufgespannten Untervektorraum liegt; falls $i - \ell$ negativ wird, ist das natürlich der Nullraum.

Die Abbildungsmatrix N^ℓ von $\psi^{(\ell)}$ ist daher ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen; zusätzlich stehen auch noch in den $\ell - 1$ schrägen Reihen oberhalb und parallel zur Hauptdiagonale lauter Nullen, und spätestens wenn ℓ größer oder gleich der größten Stufe eines Hauptvektors wird, ist N^ℓ gleich der Nullmatrix.

Als Beispiel betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die offensichtlich von der oben betrachteten Form ist; hier ist

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine kurze Rechnung zeigt, daß

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N^3 = 0$$

ist, also ist beispielsweise

$$A^{10} = D^{10} + 10\,D^9 N + 45\,D^8 N^2 = \begin{pmatrix} 1024 & 5120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 20 & 390 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mehr als Potenzen interessiert uns die Exponentialfunktion einer Matrix; auch diese läßt sich über die JORDAN-Zerlegung berechnen: Da D und N kommutieren, ist $e^A = e^{D+N} = e^D \cdot e^N$ mit

$$e^D = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

und

$$e^N = E + N + \frac{1}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also ist

$$e^A = e^D \cdot e^N = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 2e & 7e \\ 0 & 0 & 0 & e & 4e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

Entsprechend läßt sich auch e^{At} berechnen:

$$e^{Nt} = E + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2t & 3t + 4t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und da auch Dt und Nt kommutieren, ist

$$e^{At} = e^{Dt} \cdot e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 2te^t & 3te^t + 4t^2e^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t & 4te^t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Zur Vorsicht sei noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß es für diese Rechnungen sehr wesentlich war, daß D und N miteinander kommutieren; es reicht nicht, wenn wir die Matrix A nur auf *irgendeine* Dreiecksgestalt bringen und dann als Summe einer Diagonalmatrix und einer oberen Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen schreiben. Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{def}}{=} D + N$$

beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

und in der Tat ist

$$D^2 + 2DN + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

verschieden von

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

und genauso ist

$$e^A = \begin{pmatrix} e & 3e^2 - 3e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \neq e^D \cdot e^N = \begin{pmatrix} e & 3e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Der Grund für die Verschiedenheit der Ergebnisse beim Quadrat liegt natürlich darin, daß wir im allgemeinen nur sagen können, daß

$$(D+N)^2 = D(D+N) + N(D+N) = D^2 + DN + ND + N^2$$

ist, aber wir können $DN + ND$ nicht zusammenfassen zu $2DN$. Mit wachsendem Exponenten verschlimmert sich die Situation drastisch; schon

$$(D+N)^3 = D^3 + D^2N + DND + ND^2 + DN^2 + NDN + N^2D + N^3$$

hat acht Summanden; die m-te Potenz hat 2^m, und von denen überleben viele auch dann, wenn N^r schon für relativ kleine r verschwindet. Für die Matrixexponentialfunktion, in die alle Potenzen eingehen, ist also ziemlich klar, daß es für nichtkommutierende Matrizen D und N keinen vernünftigen Zusammenhang zwischen e^{D+N} und $e^D \cdot e^N$ geben kann.

g) Ein Beispiel

Wir haben Eigenvektoren und Hauptvektoren in erster Linie eingeführt, um Differentialgleichungen zu lösen; daher soll das etwas ausführlichere Beispiel in diesem Abschnitt ebenfalls mit einer Differentialgleichung beginnen: Gesucht sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) - y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + 5y(t) + 2z(t) \\ \dot{z}(t) &= -x(t) - 2y(t) + z(t). \end{aligned}$$

Hier ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

und das charakteristische Polynom von A ist

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 21\lambda + 18 = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2.$$

Wir haben also den Eigenwert zwei mit algebraischer und somit auch geometrischer Vielfachheit eins und den Eigenwert drei mit algebraischer Vielfachheit zwei. In der Matrix

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ist die mittlere Spalte gleich der Summe der beiden äußeren,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt also den Eigenraum. In

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

stimmen die zweite und die dritte Spalte miteinander überein,

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist also ein Eigenvektor und erzeugt auch den Eigenraum, denn da die erste Spalte kein Vielfaches der zweiten ist, hat die Matrix den Rang zwei. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts drei ist also nur eins: Um zu einer Dreiecksmatrix zu kommen, müssen wir einen Hauptvektor zweiter Stufe berechnen. Aus

$$(A - 3E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sieht man, daß sich
$$\vec v_3 = \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$
als von $\vec v_2$ linear unabhängiger Kandidat anbietet. Da
$$A\vec v_3 = \begin{pmatrix} 3\\ -4\\ 1\end{pmatrix} = 3\vec v_3 - \vec v_2$$
ist, hat A bezüglich der Basis $\vec v_1, \vec v_2, \vec v_3$ die Form
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},$$
der erste „Kasten“ ist also einfach eine 1×1-Matrix und der zweite ist
$$\begin{pmatrix} 3 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$
Da das Quadrat des zweiten Summanden verschwindet, ist
$$e^{\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 & -t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
und
$$e^{\begin{pmatrix} 3 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}t} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & -t\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & -te^{3t}\\ 0 & e^{3t}\end{pmatrix}.$$
Damit ist
$$e^{Mt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0\\ 0 & e^{3t} & -te^{3t}\\ 0 & 0 & e^{3t}\end{pmatrix}.$$
Um daraus e^{At} zu berechnen, müssen wir die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ durch die Hauptvektoren ausdrücken; man überzeugt sich leicht, daß
$$\vec e_1 = \vec v_1 + \vec v_2, \quad \vec e_2 = \vec v_1 + \vec v_2 - \vec v_3 \quad \text{und} \quad \vec e_3 = \vec v_1 - \vec v_3$$
ist. Bezüglich der Basis $\vec v_1, \vec v_2, \vec v_3$ ist also
$$e^{At}\vec e_1 = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0\\ 0 & e^{3t} & -te^{3t}\\ 0 & 0 & e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}\\ e^{3t}\\ 0\end{pmatrix},$$

was bezüglich der Standardbasis der Vektor
$$e^{2t}\vec v_1 + e^{3t}\vec v_2 = \begin{pmatrix} e^{2t}\\ -e^{2t}\\ e^{2t}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\ e^{3t}\\ -e^{3t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}\\ e^{3t}-e^{2t}\\ e^{2t}-e^{3t}\end{pmatrix}.$$
Also ist, bezüglich der Standardbasis ausgedrückt,
$$e^{At}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}\\ e^{3t}-e^{2t}\\ e^{2t}-e^{3t}\end{pmatrix}.$$
Genauso überlegt man sich, daß
$$e^{At}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = e^{2t}\vec v_1 + \left(e^{3t}+te^{3t}\right)\vec v_2 - e^{3t}\vec v_3 = \begin{pmatrix} e^{2t}-e^{3t}\\ 2e^{3t}-e^{2t}+te^{3t}\\ e^{2t}-e^{3t}-te^{3t}\end{pmatrix}$$
und
$$e^{At}\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}-e^{3t}\\ e^{3t}-e^{2t}+te^{3t}\\ e^{2t}-te^{3t}\end{pmatrix}$$
ist. Da in den Spalten einer Matrix die Bilder der Basisvektoren stehen, ist somit
$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t}-e^{3t} & e^{2t}-e^{3t}\\ e^{3t}-e^{2t} & 2e^{3t}-e^{2t}+te^{3t} & e^{3t}-e^{2t}+te^{3t}\\ e^{2t}-e^{3t} & e^{2t}-e^{3t}-te^{3t} & e^{2t}-te^{3t}\end{pmatrix}.$$
Die Lösung, die den Anfangsbedingungen
$$x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0 \quad \text{und} \quad z(0)=z_0$$
genügt, ist also
$$\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t}-e^{3t} & e^{2t}-e^{3t}\\ e^{3t}-e^{2t} & 2e^{3t}-e^{2t}+te^{3t} & e^{3t}-e^{2t}+te^{3t}\\ e^{2t}-e^{3t} & e^{2t}-e^{3t}-te^{3t} & e^{2t}-te^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (x_0+y_0+z_0)e^{2t} - (y_0+z_0)e^{3t}\\ \left(x_0+(t+2)y_0+(t+1)z_0\right)e^{3t} - (x_0+y_0+z_0)e^{2t}\\ (x_0+y_0+z_0)e^{2t} - \left(x_0+(t+1)y_0+tz_0\right)e^{3t}\end{pmatrix}.$$

h) Ergänzung: Die Jordan-Normalform

Die im vorigen Abschnitt konstruierte Normalform für Abbildungsmatrizen wird für alle Zwecke dieser Vorlesung ausreichen. Trotzdem ist sie nicht ganz befriedigend, da die Dreiecksmatrizen immer noch sehr willkürlich und damit komplizierter als notwendig sind. Für Interessenten sei in diesem Abschnitt gezeigt, wie sich die bislang erreichte Dreiecksgestalt noch weiter vereinfachen läßt, indem man die bislang noch ziemlich willkürlichen Basen der Haupträume etwas geschickter wählt. Für das folgende werden wir die Ergebnisse dieses Abschnitts nicht benötigen; er kann also gefahrlos überlesen werden.

Die Potenzen einer oberen Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen verschwinden, wie wir gesehen haben, ab einem meist überschaubar kleinen Exponenten, aber die Potenzen bis dahin muß man doch mühsam von Hand ausrechnen. Eine Ausnahme, bei der alles klar ist, bilden Matrizen der Form

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

bei denen direkt oberhalb der Hauptdiagonale lauter Einsen stehen, während alle anderen Einträge verschwinden, d.h.

$$N = (n_{ij}) \quad \text{mit} \quad n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j - i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Bei der sukzessiven Potenzierung von N verschiebt sich einfach die Reihe von Einsen jeweils um eins weiter nach außen, d.h.

$$N^\ell = (n_{ij}^{(\ell)}) \quad \text{mit} \quad n_{ij}^{(\ell)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j - i = \ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

denn die zu N gehörige lineare Abbildung ψ bildet einfach den i-ten Basisvektor auf den $(i-1)$-ten ab oder auf den Nullvektor, falls es keinen $(i-1)$-ten Basisvektor mehr gibt, und entsprechend ist $\psi^{(\ell)}(\vec{b}_i) = \vec{b}_{i-\ell}$ beziehungsweise $\vec{0}$.

In diesem speziellen Fall sind die Potenzen von N also ohne jeden Aufwand zu berechnen, und tatsächlich genügen solche Matrizen N schon

vollständig für eine Normalform der Abbildungsmatrix, die sogenannte JORDAN-Normalform:

Satz: Falls das charakteristische Polynom von $\varphi\colon V \to V$ als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann, gibt es eine Basis von V, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ die Form

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{J_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boxed{J_s} \end{pmatrix}$$

hat mit oberen Dreiecksmatrizen

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

zu den Eigenwerten von φ. Die Anzahl der Kästchen J_i zu einem festen Eigenwert ist die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwerts, die Summe ihrer Zeilenzahlen die algebraische.

Beweis: Wir gehen aus von der Zerlegung von V in die Haupträume zu den Eigenwerten von φ und betrachten einen festen Hauptraum H_λ. Die Einschränkung von φ auf diesen Untervektorraum läßt sich zerlegen in eine Summe

$$\varphi_{|H_\lambda} = \lambda\,\mathrm{id} + \psi ;$$

dabei ist die Abbildungsmatrix von λ id bezüglich jeder beliebigen Basis gleich dem λ-fachen der Einheitsmatrix, und zumindest bezüglich der im vorigen Abschnitt konstruierten Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$ ist die Abbildungsmatrix von ψ eine obere Dreiecksmatrix N mit Nullen in der Hauptdiagonalen.

ψ bildet den Basisvektor $\vec{b}_i$ daher ab in das Erzeugnis der Basisvektoren $\vec{b}_1$ bis $\vec{b}_{i-1}$; insbesondere geht $\vec{b}_1$ auf den Nullvektor. Wiederholte Anwendung von ψ zeigt, daß für jeden Basisvektor $\vec{b}_i$ gilt: $\psi^{(i-1)}(\vec{b}_i) = \vec{0}$, wobei der Exponent von ψ für die wiederholte Anwendung der Abbildung stehen soll. Insbesondere ist also $\psi^{(r)}(\vec{v}) = \vec{0}$ für alle $\vec{v} \in H_\lambda$. Es könnte sein, daß es schon eine kleinere Zahl s gibt, so daß $\psi^{(s)}$ die Nullabbildung ist; die kleinste solche Zahl bezeichnen wir als den *Nilpotenzgrad* von ψ.

Hat der Nilpotenzgrad seinen größtmöglichen Wert r, so sind die Vektoren

$$\vec{b}_r,\ \psi(\vec{b}_r),\ \dots,\ \psi^{(s-1)}(\vec{b}_r)$$

allesamt ungleich dem Nullvektor. Sie sind auch linear unabhängig, denn ist

$$\alpha_0\vec{b}_r + \alpha_1\psi(\vec{b}_r) + \cdots + \alpha_{r-1}\psi^{(r-1)}(\vec{b}_r) = \vec{0}\,,$$

so ist auch für jedes j

$$\begin{aligned} &\psi^{(j)}\big(\alpha_0\vec{b}_s + \alpha_1\psi(\vec{b}_s) + \cdots + \alpha_{r-1}\psi^{(r-1)}(\vec{b}_r)\big) \\ &= \alpha_0\psi^{(j)}(\vec{b}_r) + \alpha_1\psi^{(j+1)}(\vec{b}_r) + \cdots + \alpha_{r-1}\psi^{(j+r-1)}(\vec{b}_r)\big) = \vec{0}\,. \end{aligned}$$

Da $\psi^{(s)}$ für $s \geq r$ die Nullabbildung ist, treten hier nur die Summanden $\alpha_i\psi^{(i+j)}(\vec{b}_s)$ mit $i < r - j$ wirklich auf, für $j = r - 1$ also nur der Summand $\alpha_0\psi^{(r-1)}(\vec{b}_r)$. Da $\psi^{(r-1)}(\vec{b}_r)$ ungleich dem Nullvektor ist, muß also $\alpha_0 = 0$ sein. Anwendung von $\psi^{(r-2)}$ zeigt als nächstes, daß $\alpha_1 = 0$ ist, und genauso zeigt man sukzessive das Verschwinden aller α_i. Also können wir

$$\vec{c}_1 = \psi^{(r-1)}(\vec{b}_r), \quad \vec{c}_2 = \psi^{(r-2)}(\vec{b}_r), \quad \dots, \quad \vec{c}_r = \vec{b}_r$$

als Basisvektoren von H_λ wählen, und bezüglich dieser Basis ist

$$\psi(\vec{c}_i) = \begin{cases} c_{i-1} & \text{für } i > 1 \\ \vec{0} & \text{für } i = 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi(\vec{c}_i) = \begin{cases} \lambda\vec{c}_i + \vec{c}_{i-1} & \text{für } i > 1 \\ \lambda\vec{c}_1 & \text{für } i = 1 \end{cases}\,.$$

Die Abbildungsmatrix von φ hat somit die einfache Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

und das ist gerade eines der JORDAN-Kästchen aus der Formulierung des Satzes.

Falls der Nilpotenzgrad s von ψ kleiner als r ist, können wir nicht so argumentieren. Wir können aber immerhin einen Vektor $\vec{v} \in H_\lambda$ finden, so daß $\psi^{(s-1)}(\vec{v}) \neq \vec{0}$ ist, denn erst $\psi^{(s)}$ ist die Nullabbildung. Genau wie oben folgt, daß

$$\vec{c}_1 = \psi^{(s-1)}(\vec{v}), \quad \vec{c}_2 = \psi^{(s-2)}(\vec{v}), \quad \dots, \quad \vec{c}_s = \vec{v}$$

linear unabhängig sind, allerdings spannen sie nur einen s-dimensionalen Teilraum U von H_λ auf. Dieser Teilraum ist ψ-invariant und damit auch φ-invariant, denn ψ bildet einfach die Basisvektoren aufeinander beziehungsweise auf den Nullvektor ab, und die Abbildungsmatrizen bezüglich dieser Basis sehen genauso aus wie oben; auch zu U gehört also ein JORDAN-Kästchen.

Um weitere Kästchen zu bekommen, brauchen wir ein invariantes Komplement von U in H_λ. Dazu wählen wir irgendeine lineare Abbildung $\omega\colon V \to k$, für die $\omega(\vec{v}) \neq 0$ ist und setzen

$$W = \big\{\vec{w} \in H_\lambda \bigm| \omega(\vec{w}) = \omega\big(\psi(\vec{w})\big) = \cdots = \omega\big(\psi^{(s-1)}(\vec{w})\big) = 0i\big\}\,.$$

Der Durchschnitt $U \cap W$ besteht nur aus dem Nullvektor, denn jeder Vektor aus U läßt sich als

$$\vec{w} = \alpha_1\vec{c}_1 + \ldots + \alpha_s\vec{c}_s$$

schreiben, und wenn $\vec{w}$ auch in W liegt, ist

$$\omega\big(\psi^{(j)}(\vec{w})\big) = \alpha_1\psi^{(j+s-1)}(\vec{v}) + \ldots + \alpha_{s-1}\psi^{j+1}(\vec{v}) + \alpha_s\psi^{(j)}(\vec{v}) = 0$$

für $j = 0, \dots, s-1$. Da $\psi^{(\ell)}(\vec{v})$ für $\ell \geq s$ gleich dem Nullvektor ist, folgt für $j = s-1$, daß $\alpha_{s-1} = 0$ ist, und erniedrigt man j immer weiter, folgt nacheinander das Verschwinden aller Koeffizienten α_i. Somit ist $U \cap W$ in der Tat der Nullraum.

Die Dimension von W läßt sich zumindest nach unten leicht abschätzen: Bezüglich einer Basis von H_λ wird jede Gleichung $\omega\big(\psi^{(j)}(\vec{w})\big) = 0$ zu einer linearen Gleichung in den Koeffizienten von $\vec{w}$, der Untervektorraum W ist also die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems aus s Gleichungen in $\dim H_\lambda$ Variablen. Daher ist

$$\dim W \geq \dim H_\lambda - s \quad \text{und} \quad \dim U \oplus W = \dim U + \dim W \geq \dim H_\lambda\,.$$

Da $U \oplus W$ Untervektorraum von H_λ ist, geht das nur, wenn das Gleichheitszeichen gilt, d.h. $H_\lambda = U \oplus W$.

Wir müssen uns noch überlegen, daß W unter ψ invariant ist. Dazu müssen wir zeigen, daß für alle $\vec{w} \in W$ gilt

$$\omega\big(\psi(\vec{w})\big) = \omega\Big(\psi\big(\big(\psi(\vec{w})\big)\Big) = \cdots = \omega\Big(\psi^{(s-1)}\big((\vec{w})\big)\Big) = 0\,,$$

d.h.

$$\omega\big(\psi(\vec{w})\big) = \omega\big(\psi^{(2)}(\vec{w})\big) = \cdots = \omega\big(\psi^{(s)}(\vec{w})\big) = 0$$

falls

$$\omega(\vec{w}) = \omega\big(\psi(\vec{w})\big) = \cdots = \omega\big(\psi^{(s-1)}(\vec{w})\big) = 0$$

ist. Die einzige neue Bedingung ist $\omega\big(\psi^{(s)}(\vec{w})\big) = 0$, und die ist trivialerweise erfüllt, da $\psi^{(s)}$ die Nullabbildung ist. Also ist W invariant unter ψ und somit ein invariantes Komplement von U.

Auch $\psi_{|W}$ ist eine nilpotente Abbildung von einem Nilpotenzgrad $s' \leq s$; wenn wir also einen Vektor $\vec{w} \in W$ hernehmen, für den $\psi^{(s')}(\vec{w}) \neq \vec{0}$ ist, können wir die gleiche Kontruktion wie oben mit $\vec{v}$ noch einmal durchführen und erhalten einen neuen invarianten Unterraum $U' \leq W$ mit einer Basis, bezüglich derer φ ein JORDAN-Kästchen als Abbildungsmatrix hat.

Falls $U' = W$ ist, sind wir damit fertig; anderfalls können wir wieder wie oben ein invariantes Komplement W' von U' in W finden und einen weiteren Teilraum abspalten, *usw.* Jeder solche Teilraum führt auf ein JORDAN-Kästchen, und das Verfahren bricht schließlich ab, da wir in einem endlichdimensionalen Vektorraum arbeiten.

In jedem der konstruierten Teilräume liegt genau ein eindimensionaler Teilraum aus Eigenvektoren (und dem Nullvektor), nämlich der vom ersten Basisvektor aufgespannte. Der Eigenraum zu λ wird also von diesen ersten Basisvektoren aufgespannt und seine Dimension, die geometrische Vielfachheit von λ, ist damit gleich der Anzahl der JORDAN-Kästchen zu λ. Die algebraische Vielfachheit ist wegen der speziellen Gestalt der Abbildungsmatrix natürlich die Anzahl der λ in der Hauptdiagonalen, d.h. gleich der Summe der Zeilenzahlen der JORDAN-Kästchen zu λ. ■

Um wenigstens ein ganz einfaches Beispiel zu sehen, betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vom Ende des vorigen Abschnitts. Links oben steht schon ein JORDAN-Kästchen zum Eigenwert zwei, rechts unten müssen wir noch etwas arbeiten.

Die Basis des $\mathbb{R}^5$ sei $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_5\}$; davon können wir $\vec{b}_1 = \vec{e}_1$ und $\vec{b}_2 = \vec{e}_2$ als Basis von H_2 gleich übernehmen. H_1 wird von $\vec{e}_3, \vec{e}_4$ und $\vec{e}_5$ aufgespannt; ein Vektor aus diesem dreidimensionalen Raum, der unter

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

den maximalen Nilpotenzgrad hat, ist etwa $\vec{e}_5$, denn $\vec{e}_5$ wird abgebildet auf $3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4$; da e_3 auf den Nullvektor geht und $\vec{e}_4$ auf $2\vec{e}_3$, wird dieser Vektor weiter abgebildet auf $8\vec{e}_3$, was schließlich auf den Nullvektor abgebildet wird. Mit

$$\vec{b}_3 = 2\vec{e}_3, \quad \vec{b}_4 = 3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 \quad \text{und} \quad \vec{b}_5 = \vec{e}_5$$

geht also $\vec{b}_5$ unter N auf $\vec{b}_4$ und weiter auf $\vec{b}_3$; daher ist

$$A\vec{b}_3 = \vec{b}_3, \quad A\vec{b}_4 = \vec{b}_4 + \vec{b}_3 \quad \text{und} \quad A\vec{b}_5 = \vec{b}_5 + \vec{b}_4\,,$$