

für jede Funktion  $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  läßt sich  $|T_f(g)|$  also abschätzen durch ein von  $g$  unabhängiges Vielfaches der  $L^2$ -Norm von  $g$ .

Diese Eigenschaft hat nicht jede stetige lineare Abbildung von  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  nach  $\mathbb{C}$ : Beispielsweise ist für die Fortsetzung

$$\tilde{\Delta}_0: \begin{cases} L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ g \mapsto g(0) \end{cases}$$

der DIRAC-Distribution  $\Delta_0$  auf  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  und den Rechteckimpuls

$$g_a: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } |t| \leq \frac{1}{a} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

die  $L^2$ -Norm unabhängig von  $a$  gleich

$$\|g_a\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g_a|^2(t) dt} = \sqrt{\int_{-1/a^2}^{1/a^2} a^2 dt} = \sqrt{2},$$

aber  $\Delta_0(g_a) = g_a(0) = a$  kann beliebig große Werte annehmen. Hier kann  $|\Delta_0(g)|$  also nicht durch ein konstantes Vielfaches von  $\|g\|_2$  abgeschätzt werden.

**Definition:** Eine lineare Abbildung  $T: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  gibt, so daß

$$|T(g)| \leq c \|g\|_2 \quad \text{für alle } g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Das Infimum aller Zahlen  $c$ , die diese Eigenschaft haben, bezeichnen wir dann als die *Norm*  $\|T\|$  von  $T$ .

Für  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ist  $\tilde{T}_f$  also beschränkt und hat die Norm  $\|f\|_2$ .

Das Schöne an quadratintegrierbaren Funktionen ist, daß sich diese Aussage auch umkehren läßt. Zum Beweis brauchen wir unter anderem, daß  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  bis auf das Problem mit den Nullfunktionen ein HILBERT-Raum ist, d.h.

**Lemma:** In  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  hat jede CAUCHY-Folge einen Grenzwert.

Dieses Lemma ist, so wie wir  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  definiert haben, leider falsch; es gilt nur, wenn wir  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ersetzen durch den etwas größeren Raum aller LEBESGUE-integrierbarer Funktionen, für die das Integral über das Betragsquadrat endlich bleibt. Da LEBESGUE-Integrale in dieser Vorlesung nicht definiert wurden, muß also hier eine Lücke bleiben; wo es Probleme gibt, zeigt der

„Beweis“:  $g_n$  sei eine CAUCHY-Folge von Funktionen aus  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , d.h. zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N > 0$ , so daß für  $n, m \geq N$  gilt

$$\|g_n - g_m\|_2 < \varepsilon.$$

Offensichtlicher Kandidat für eine Grenzfunktion ist jene Funktion  $g$ , die jedem Wert  $t$  den Limes der  $g_n(t)$  zuordnet; leider gibt es aber zunächst keinen Grund, warum diese Folge von Funktionswerten für jedes  $t$  konvergieren sollte. Wir müssen daher etwas härter arbeiten.

Wir verschaffen uns zunächst eine Folge von Werten  $\varepsilon_\nu > 0$ , für die

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu < \infty$$

konvergiert – beispielsweise können wir  $\varepsilon_\nu = \frac{1}{\nu^2}$  setzen. Da  $(g_n)$  eine CAUCHY-Folge ist, gibt es zu jedem dieser  $\varepsilon_\nu$  ein  $n_\nu$ , so daß

$$\|g_n - g_m\|_2 \leq \varepsilon_\nu \quad \text{für alle } n, m > n_\nu.$$

Insbesondere ist also

$$\|g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu}\|_2 \leq \varepsilon_\nu.$$

Damit ist für jede natürliche Zahl  $k$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=k}^{\infty} \varepsilon_\nu &\geq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{\nu=k}^{\ell} \|g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu}\|_2 \geq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\nu=k}^{\ell} (g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu}) \right\|_2 \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|g_{n_{\ell+1}} - g_{n_k}\|_2. \end{aligned}$$

Da die linke Seite für  $k \rightarrow \infty$  wegen der Konvergenz der Summe der  $\varepsilon_\nu$  gegen null geht, gilt dies auch für die rechte. Daher muß es eine

Funktion  $g$  geben, die fast überall mit

$$t \mapsto \lim_{\nu \rightarrow \infty} g_{n_\nu}(t)$$

übereinstimmt und für die

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\tilde{g} - g_{n_\nu}\|_2 = 0$$

ist. Da alle  $g_{n_\nu}$  in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  liegen, zeigt die Dreiecksungleichung, daß auch  $g$  dort liegen muß – falls  $g$  integrierbar ist. Man kann zeigen, daß  $g$  in jedem Fall LEBESGUE-integrierbar ist, auch wenn die  $g_n$  ebenfalls nur LEBESGUE-integrierbar sind;  $g$  muß aber nicht RIEMANN-integrierbar sein. Eine letzte Anwendung der Dreiecksungleichung zeigt noch, daß nicht nur die Teilfolge der  $g_{n_k}$ , sondern die Folge aller  $g_n$  in der  $L^2$ -Norm gegen  $g$  konvergiert. ■

Damit kommen wir zum eigentlich interessanten

**Satz von Riesz:** Zu jeder beschränkten und stetigen linearen Abbildung  $T: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  gibt es eine Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , so daß  $T = T_f$  ist und  $\|f\|_2 = \|T\|$ . Die Funktion  $f$  ist bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmt.

Der Beweis ist etwas langwierig, aber seine Grundidee ist einfach:

Angenommen, wir betrachteten anstelle von  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  den endlichdimensionalen Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  und eine lineare Abbildung  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann wissen wir natürlich, daß sich  $T(\vec{x})$  schreiben läßt als

$$T(\vec{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

mit geeigneten reellen Zahlen  $a_1, a_2$  und  $a_3$ . Diese können wir zusammenfassen zu einem Vektor  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ , für den

$$T(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$$

ist. Dieser Vektor  $\vec{a}$  entspricht der gesuchten Funktion  $f$ ; er steht offensichtlich senkrecht auf dem Untervektorraum

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x}) = 0\},$$

der außer für  $\vec{a} = \vec{0}$  eine Ebene beschreibt, und er ist durch  $E$  bis auf eine Proportionalitätskonstante eindeutig bestimmt.

In Analogie dazu betrachten wir auch für den Satz von RIESZ den Kern

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid T(g) = 0\}$$

von  $T$ . Falls  $N = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ist, sind wir fertig: Dann verschwindet  $T(g)$  überall, und  $f \equiv 0$  erfüllt alle Behauptungen.

Andernfalls gibt es eine Funktion  $h \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , die nicht in  $N$  liegt.

Der erste und umständlichste Beweisschritt besteht darin, daß wir uns überlegen, daß es in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \setminus N$  auch eine Funktion  $f$  gibt, die auf  $N$  senkrecht steht, für die also  $(f, g) = 0$  ist für alle  $g \in N$ .

Dazu betrachten wir den Abstand  $d \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g \in N} \|h - g\|_2$  von  $g$  und  $h$ .

*Zur Erinnerung:* In der Schule definiert man den Abstand eines Punkts von einer Ebene als den Abstand zum nächstgelegenen Punkt der Ebene. Dieser Punkt ist der Fußpunkt des Lots vom gegebenen Punkt auf die Ebene; der Verbindungsvektor steht also senkrecht auf der Ebene. Bei einem unendlichdimensionalen Raum wie  $N$  können wir nicht sicher sein, daß es so etwas wie einen „Lotfußpunkt“ gibt – in der Tat besteht die Hauptarbeit des ersten Beweisschritts genau darin, dies zu zeigen. Deshalb können wir (noch) nicht von einem minimalen Abstand reden, sondern müssen uns zunächst mit einem Infimum begnügen. Wir hoffen aber (zu recht, wie sich bald zeigen wird), daß der „Lotfußpunkt“ auch in unserem Fall existiert und daß der „Lotvektor“ senkrecht auf  $N$  steht.

Obwohl  $h$  nicht in  $N$  liegt, können wir zumindest *a priori* nicht sicher sein, daß obiges Infimum positiv ist – wenn wir anstelle einer beschränkten stetigen linearen Abbildung  $T$  beispielsweise die stetige lineare Abbildung  $\tilde{\Delta}_0$  betrachten würden, wäre  $d = 0$ .

Da unser  $T$  aber beschränkt ist, haben wir eine Konstante  $c > 0$ , so daß

$$|T(g)| \leq c \|g\|_2 \quad \text{für alle } g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Insbesondere ist für jedes  $g \in N$

$$|T(h)| = |T(h) - T(g)| = |T(h - g)| \leq c \|h - g\|_2.$$

$T(h)$  verschwindet nicht, da  $h$  nicht in  $N$  liegt; folglich ist

$$\|h - g\|_2 \geq \frac{|T(h)|}{c} \quad \text{für alle } g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Damit ist auch das Infimum  $d$  aller dieser Werte größer oder gleich  $|T(h)|/c$ , also positiv.

Ein Infimum muß nicht angenommen werden, man kann ihm aber beliebig nahekommen. Somit gibt es eine Folge  $(g_n)$  von Funktionen aus  $N$ , so daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h - g_n\|_2 = d$  ist.

Eine (ziemlich langweilige) Abschätzung zeigt, daß diese Folge eine CAUCHY-Folge ist, d.h. für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es eine natürliche Zahl  $n_0$ , so daß

$$\|g_m - g_n\|_2 \leq \varepsilon \quad \text{für } n, m > n_0.$$

Die Einzelheiten seien zum leichteren Überlesen im Kleindruck angegeben:

Zunächst ist für beliebige Funktionen  $p$  und  $q$

$$\|p + q\|_2^2 = (p + q, p + q) = (p, p) + (q, q) + (q, p) + (p, q)$$

und

$$\|p - q\|_2^2 = (p - q, p - q) = (p, p) - (q, p) - (p, q) + (q, q),$$

also

$$\|p + q\|_2^2 + \|p - q\|_2^2 = 2 \left( \|p\|_2^2 + \|q\|_2^2 \right).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \|g_m - g_n\|_2^2 &= \|(h - g_m) - (h - g_n)\|_2^2 \\ &= 2 \left( \|h - g_m\|_2 + \|h - g_n\|_2 \right) - \|2h - g_m - g_n\|_2^2 \\ &= 2 \left( \|h - g_m\|_2 + \|h - g_n\|_2 \right) - 4 \left\| h - \frac{g_m - g_n}{2} \right\|_2^2 \\ &\leq 2 \left( \|h - g_m\|_2 + \|h - g_n\|_2 \right) - 4d^2, \end{aligned}$$

denn mit  $g_m$  und  $g_n$  liegt auch  $(g_m + g_n)/2$  in  $N$ , hat also mindestens Abstand  $d$  von  $h$ .

Da für die Folge der  $g_n$  die Abstände  $\|h - g_n\|_2$  gegen  $d$  konvergiert, konvergiert auch die Folge der Abstandsquadrate gegen  $d^2$ , und es gibt zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$ , so daß

$$\|h - g_n\|_2^2 \leq d^2 + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für } n > n_0.$$

Für  $n, m > n_0$  ist daher

$$\|g_m - g_n\|_2^2 \leq 2 \left( d^2 + \frac{\varepsilon}{4} + d^2 + \frac{\varepsilon}{4} \right) - 4d^2 = \varepsilon,$$

wie behauptet.

Da in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  nach dem vorigem Lemma jede CAUCHY-Folge konvergiert, folgt daß der Grenzwert

$$\tilde{g} = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$$

in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  existiert. Da

$$T(\tilde{g}) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

ist, liegt  $\tilde{g}$  in  $N$ .

Die Funktion  $\tilde{g}$  entspricht dem „Lotfußpunkt“; der „Lotvektor“

$$\tilde{f} = h - \tilde{g},$$

von dem wir bislang nur wissen, daß  $\|\tilde{f}\|_2 = d$  ist, sollte also orthogonal zu  $N$  sein.

Für eine beliebige Funktion  $g \in N$  und eine reelle Zahl  $\lambda \neq 0$  betrachten wir den Abstand

$$\|h - (\tilde{g} + \lambda g)\|_2.$$

Da  $\tilde{g} + \lambda g$  in  $N$  liegt, ist dieser Abstand mindestens gleich  $d$ , d.h.

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|h - (\tilde{g} + \lambda g)\|_2^2 = \|(h - \tilde{g}) - \lambda g\|_2^2 = \|\tilde{f} - \lambda g\|_2^2 \\ &= (\tilde{f} - \lambda g, \tilde{f} - \lambda g) = \|\tilde{f}\|_2^2 + \lambda^2 \|g\|_2^2 - \lambda(g, \tilde{f}) - \overline{\lambda}(\tilde{f}, g). \end{aligned}$$

Da  $\|\tilde{f}\|_2 = d^2$  und  $\overline{\lambda} = \lambda$  ist, folgt nach Division durch  $\lambda$ , daß

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda \|g\|_2^2 - \left( (g, \tilde{f}) + (\tilde{f}, g) \right) = \lambda \|g\|_2^2 - \left( (g, \tilde{f}) + \overline{(g, \tilde{f})} \right) \\ &= \lambda \|g\|_2^2 - 2 \Re(g, \tilde{f}) \end{aligned}$$

für alle reellen  $\lambda \neq 0$ . Lassen wir  $\lambda$ , sowohl von links, als auch von rechts, gegen null gehen, folgt also

$$\Re(g, \tilde{f}) = 0.$$

Die Funktion  $g \in N$  war beliebig; da mit  $g$  auch  $ig$  in  $N$  liegt, ist also auch

$$\Re(i g, \tilde{f}) = \Re(i \cdot (g, \tilde{f})) = -\Im(g, \tilde{f}) = 0,$$

also verschwindet auch der Imaginärteil von  $(g, \tilde{f})$  und damit  $(g, \tilde{f})$  selbst.  $\tilde{f}$  steht also in der Tat senkrecht auf allen  $g \in N$ .

$\tilde{f}$  ist nur bis auf eine Konstante bestimmt; wir wollen uns überlegen, daß

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|^2} \cdot \tilde{f}$$

das richtige Vielfache mit  $T_f = T$  ist: Für  $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ist

$$\begin{aligned} \tilde{T}_f(g) &= (g, \tilde{f}) = \left( g, \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|^2} \cdot \tilde{f} \right) = \left( g, \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|^2} \cdot \tilde{f} \right) \\ &= \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|^2}(g, \tilde{f}). \end{aligned}$$

Insbesondere ist also  $\tilde{T}_f(g) = 0$  für alle  $g \in N$  nach Konstruktion von  $\tilde{f}$ .

Für ein Vielfaches  $\lambda \tilde{f}$  von  $\tilde{f}$  ist

$$\tilde{T}_f(\lambda \tilde{f}) = \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|^2}(\lambda \tilde{f}, \tilde{f}) = \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|^2} \lambda \|\tilde{f}\|^2 = \lambda T(\tilde{f}) = T(\lambda \tilde{f}),$$

auch in diesem Fall stimmen  $T_f$  und  $T$  somit überein. Wegen der Linearität von  $T$  und von  $\tilde{T}_f$  ist daher

$$\tilde{T}_f(g + \lambda \tilde{f}) = T(g + \lambda \tilde{f}) \quad \text{für alle } g \in N, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Eine beliebige Funktion  $h \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  können wir in der Form

$$h = \left( h - \frac{T(h)}{T(\tilde{f})} \tilde{f} \right) + \frac{T(h)}{T(\tilde{f})} \tilde{f}$$

darstellen. Da

$$T\left( h - \frac{T(h)}{T(\tilde{f})} \tilde{f} \right) = T(h) - \frac{T(h)}{T(\tilde{f})} T(\tilde{f}) = T(h) - T(h) = 0$$

verschwindet, liegt der erste Summand in  $N$ , und der zweite ist natürlich ein Vielfaches von  $\tilde{f}$ . Also läßt sich jede quadratintegrierbare Funktion darstellen als Summe einer Funktion aus  $N$  und einem Vielfachen von  $\tilde{f}$ , die linearen Abbildungen  $T$  und  $\tilde{T}_f$  stimmen also überein.

Damit sind wir fast fertig: Wenn  $T = \tilde{T}_f$  ist, haben beide Abbildungen natürlich auch dieselbe Norm, und wir wissen bereits, daß  $\tilde{T}_f$  dieselbe Norm hat wie  $f$ , d.h.

$$\|T\| = \|\tilde{T}_f\| = \|f\|_2. \quad \blacksquare$$



FRIGYES RIESZ (1880–1956) studierte Mathematik in Budapest, Göttingen und Zürich. 1902 promovierte er in Budapest mit einer Arbeit über Geometries, 1911 wurde er Professor an der damals ungarischen Universität Kolozsvár. Nachdem Kolozsvár 1920 rumänisch wurde, zog er mit der Universität um nach Szeged. 1945 bekam er einen Lehrstuhl an der Universität Budapest.

RIESZ ist einer der Väter der *Funktionalanalysis*, jener mathematischen Disziplin also, die Funktionsräume mit analytischen Methoden untersucht und insbesondere auch fundamental für die FOURIER-Analyse ist. Den obigen Satz bewies er 1907.

**e) Die Plancherel-Formel**

Der Satz von RIESZ sagt uns, wann lineare Funktionen auf  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  in der Form  $\tilde{T}_f$  geschrieben werden können mit einer Funktion  $f$  aus  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Da wir die FOURIER-Theorie auf  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  zurückführen wollen auf die für Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum, müssen wir daher versuchen, solche Distributionen auf  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  fortzusetzen. Als erstes wollen wir uns dazu überlegen, daß wir jede Funktion aus  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  als Grenzwert einer Folge von Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum  $S(\mathbb{R})$  schreiben können.

Wir beginnen mit dem Beispiel des Rechteckimpulses

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } a \leq t \leq b, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

der offensichtlich in  $L^2(\mathbb{R}, C)$  liegt, wegen der beiden Unstetigkeitsstellen aber natürlich nicht in  $S(\mathbb{R})$ .

Wir kennen bereits eine Funktion in  $S(\mathbb{R})$ , die auch außerhalb des Intervalls  $[a, b]$  verschwindet und in dessen Innern positiv ist, nämlich die Funktion

$$g: \begin{cases} t \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Allgemeiner hat für jede reelle Zahl  $r > 0$  auch

$$g_r: \begin{cases} t \mapsto \begin{cases} -r & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

dieselbe Eigenschaft. Da  $(t - a)(b - t)$  bei  $t = (a + b)/2$  maximal wird, hat  $g_r$  dort sein einziges Maximum und

$$g_r \left( \frac{a+b}{2} \right) = e^{\frac{-4r}{(b-a)^2}}.$$

Unser Rechteckimpuls hat eins als Maximalwert; deshalb betrachten wir besser anstelle der  $g_r$ , die mit dem Kehrwert des Maximums multiplizierten Funktionen

$$f_r: \begin{cases} t \mapsto \begin{cases} \frac{4r}{e(b-a)^2} e^{(t-a)(b-t)} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases},$$

die alle bei  $(a + b)/2$  ihren Maximalwert eins annehmen.

Abbildung 24 zeigt für  $a = 2$  und  $b = 7$  die entsprechenden Funktionen mit  $r = 10$ ,  $r = 1$  und für  $r = 0,1$ . Die innerste Kurve für  $r = 10$  zeigt noch ein klar ausgeprägtes Maximum, die Kurve für  $r = 1$  ist schon deutlich flacher im mittleren Teil, und die für  $r = 0,1$  schließlich erinnert schon recht gut an den Rechteckimpuls  $f$ .

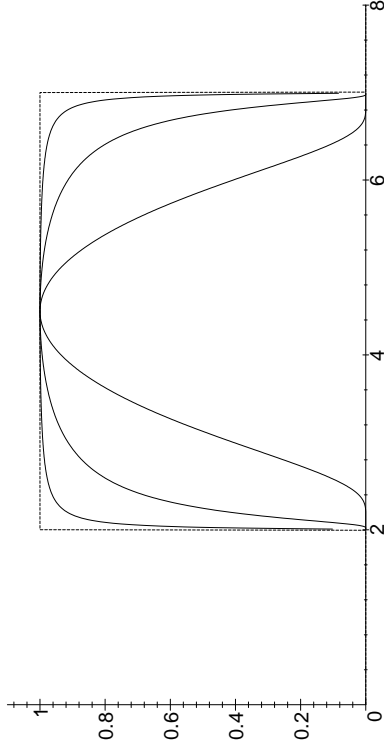


Abb. 24: Approximation des Rechteckimpulses durch stark abfallende Funktionen

Diese Abbildung legt die Vermutung nahe, daß die  $f_r$  für  $r \rightarrow 0$  in der  $L^2$ -Norm gegen  $f$  konvergieren. Leider können wir aber  $\|f - f_r\|_2$  nicht ausrechnen, da wir keine Stammfunktion von  $f_r$  kennen. (Schon  $e^{-t^2}$  ist schließlich nicht elementar integrierbar.) Deshalb müssen wir uns mit Abschätzungen begnügen. Wir erwarten, daß  $f_r$  im mittleren Bereich immer besser mit der Geraden auch Höhe eins übereinstimmt, während es am Rand des Intervalls immer steiler gegen null geht. Daher wählen wir ein  $\delta > 0$  und betrachten getrennt denn mittleren Teil  $[a + \delta, b - \delta]$  des Intervalls und die beiden Randintervalle  $[a, a + \delta]$  und  $[b - \delta, b]$ .

Über das Verhalten von  $f_r$  in den Randintervallen können wir so gut wie nichts sagen; wir wissen nur, daß auf jeden Fall  $0 \leq f_r(t) \leq 1$  ist und schätzen die Differenz zwischen  $f(t) = 1$  und  $f_r(t)$  daher ab durch eins.

Im mittleren Intervall ist die Differenz zwischen  $f(t)$  und  $f_r(t)$  im Intervallmittelpunkt  $(a + b)/2$  gleich null und wächst dann, wie man sich durch Ableiten von  $f_r$  leicht überzeugt, monoton. Insbesondere ist  $f_r$  monoton wachsend sowohl in  $t - a$  als auch in  $b - t$ ; wir erhalten daher für das mittlere Intervall eine untere Schranke, wenn wir für beide Differenzen den Wert  $\delta$  einsetzen, was auf

$$\frac{4r}{e(b-a)^2} e^{\delta(1-\delta)} = e^{-r \left( \frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2} \right)}$$

führt. Für  $t \in [a + \delta, b - \delta]$  gilt daher

$$f(t) - f_r(t) \leq 1 - e^{-r} \left( \frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2} \right).$$

Dieser Ausdruck ist nicht sehr angenehm, wir wollen ihn noch weiter abschätzen. Nach Konstruktion von  $f_r$  ist der Exponent negativ, und für alle  $x \geq 0$  ist  $1 - e^{-x} \leq x$ , denn dies gilt für  $x = 0$ , und die Ableitung  $e^{-x}$  von  $1 - e^{-x}$  ist für jedes positive  $x$  kleiner als die Ableitung eins von  $x$ . Daher ist für  $t \in [a + \delta, b - \delta]$

$$\begin{aligned} f(t) - f_r(t) &\leq 1 - e^{-r} \left( \frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2} \right) \\ &\leq r \left( \frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2} \right). \end{aligned}$$

Wir interessieren uns vor allem für kleine Werte von  $\delta$ ; deshalb betrachten wir im folgenden nur noch Werte  $\delta \leq \frac{1}{2}$ . Dann ist  $1 - \delta \geq \frac{1}{2}$  und

$$f(t) - f_r(t) \leq r \left( \frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2} \right).$$

Damit können wir die  $L^2$ -Norm der Differenz abschätzen:

$$\begin{aligned} \|f - f_r\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)|^2 dt \\ &= \int_a^{\alpha+\delta} |f(t) - f_r(t)|^2 dt + \int_{\alpha+\delta}^{b-\delta} |f(t) - f_r(t)|^2 dt \\ &\quad + \int_{b-\delta}^b |f(t) - f_r(t)|^2 dt \\ &\leq \delta + r^2(b-a) \left( \frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2} \right) + \delta. \end{aligned}$$

Setzen wir hier speziell  $\delta = \sqrt{r}$ , was wir für hinreichend kleine  $r$  dürfen, so wird dies zu

$$\begin{aligned} \sqrt{r} + r^2(b-a) \left( \frac{2}{\sqrt{r}} - \frac{4}{(b-a)^2} \right) + \sqrt{r} \\ = 2\sqrt{r} + r(b-a) \left( 2 - \frac{4\sqrt{r}}{(b-a)^2} \right), \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck geht gegen null für  $r \rightarrow 0$ . Also konvergieren die  $f_r$  für  $r \rightarrow \infty$  in der  $L^2$ -Norm gegen  $f$ .

Der Vollständigkeit halber wollen wir uns noch überlegen, daß auch die Fläche zwischen den Graphen von  $f_r$  und von  $f$  für  $r \rightarrow \infty$  gegen null geht: Wenn wir wie eben vorgehen, erhalten wir die Ungleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)| dt \leq \delta + r(b-a) \left( \frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2} \right) + \delta,$$

und wenn wir hier wieder spezialisieren auf  $\delta = \sqrt{r}$  wird dies zu

$$\sqrt{r} \left( 2 + (b-a) \left( 2 - \frac{4\sqrt{r}}{(b-a)^2} \right) \right),$$

was für  $r \rightarrow \infty$  gegen null geht.

Da  $f$  sowie sämtliche  $f_r$  außerhalb des Intervalls  $[a, b]$  verschwinden, geht damit auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)| dt$$

für  $r \rightarrow \infty$  gegen null. Dieses Integral bezeichnet man als die  $L^1$ -Norm von  $f - f_r$ ; die Folge der Funktionen  $f_r$  konvergiert also auch in der  $L^1$ -Norm gegen  $f$ .

Diese Annäherung des Rechteckimpulses durch stark abfallende Funktionen wollen wir im nächsten Lemma auf beliebige quadratintegrierbare Funktionen ausdehnen:

**Lemma:** Zu jeder Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  gibt es eine Folge von Funktionen  $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_2 = 0$$

ist;  $f$  läßt sich also bezüglich der  $L^2$ -Norm beliebig gut durch stark abfallende Funktionen annähern.

*Beweis:* In einem ersten Schritt sollten wir uns überlegen, daß  $f$  bezüglich der  $L^2$ -Norm als Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen  $\tau_n$  mit jeweils nur endlich vielen Sprungstellen dargestellt werden kann.

Da  $f$  nach Voraussetzung integrierbar ist, können wir die Funktion zumindest auf jedem endlichen Intervall durch solche Treppenfunktionen annähern, und indem wir die Intervallgrenzen gegen unendlich gehen lassen, gilt dasselbe für ganz  $f$ . Der Beweis, daß wir so eine Folge von Treppenfunktionen bekommen, die *bezüglich der  $L^2$ -Norm* gegen  $f$  konvergiert ist ziemlich technisch und muß die ganze Konstruktion des RIEMANN-Integrals nachvollziehen; wir wollen daher auf die Einzelheiten verzichten und obige Aussage einfach glauben.

Jede der Treppenfunktionen  $\tau_n$  ist eine Summe von endlich vielen Rechteckimpulsen  $R_{ni}$ , von denen wiederum jeder als Grenzwert einer Folge  $(\psi_{nij})_{j \in \mathbb{N}}$  stark abfallender Funktionen geschrieben werden kann. Mit

$$\varphi_{nj} = \sum_i \psi_{nij}$$

ist dann auch

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{nj} = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_i \psi_{nij} = \sum_i R_{ni} = \tau_n,$$

denn die Summen über  $i$  sind endlich. Genau deshalb liegen die Funktionen  $\varphi_{ni}$  auch in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , und damit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{nn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = f,$$

wie behauptet. ■

**Korollar:** Zu jeder Distribution  $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  gibt es eine stetige lineare Abbildung  $\tilde{T}: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ , die auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $T$  übereinstimmt.

*Beweis:* Jede Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  läßt sich als Limes einer Folge  $\varphi_n$  stark abfallender Funktionen schreiben; wir setzen einfach

$$\tilde{T}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n).$$

Damit haben wir alle Vorbereitungen zusammen und können endlich beweisen, worauf es wirklich ankommt:

**Satz von Plancherel:** Zu jeder Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  gibt es Funktionen  $\hat{f}$  und  $\check{f}$  in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , so daß

$$\hat{T}_f = T_{\check{f}} \quad \text{und} \quad \check{T}_f = T_{\hat{f}}$$

ist; FOURIER-Transformierte und inverse FOURIER-Transformierte von  $f$  existieren also als Funktionen.  $\check{f}$  und  $f$  unterscheiden sich höchstens durch eine Nullfunktion. Außerdem ist

$$\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2 \quad \text{und} \quad \|\check{f}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_2.$$

*Beweis:* Nach der CAUCHY-SCHWARZSchen Ungleichung ist für jede stark abfallende Funktion  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$|\hat{T}_f(\varphi)| = |T_f(\hat{\varphi})| = |(f, \hat{\varphi})| \leq \|f\|_2 \|\hat{\varphi}\|_2.$$

Wie wir aus §7c wissen, ist  $\|\hat{\varphi}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|\varphi\|_2$ , also

$$|\hat{T}_f(\varphi)| \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_2 \|\varphi\|_2.$$

Nach dem Satz von RIESZ gibt es daher eine Funktion  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , für die

$$\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$$

ist. Ihre Norm ist gleich der von  $\hat{T}_f$ , also ist nach obiger Abschätzung

$$\|\hat{f}\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_2.$$

Genauso zeigt man auch die Existenz von  $\check{f}$  und daß gilt

$$\|\check{f}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_2.$$

Da die Distributionen  $\check{f}$  und  $T$  übereinstimmen, unterscheiden sich  $\check{f}$  und  $f$  höchstens durch eine Nullfunktion, haben also insbesondere dieselbe Norm. Nach den bislang bewiesenen Ungleichungen ist

$$\|\check{f}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_2 \leq \|f\|_2;$$

da links und rechts dieselbe Zahl steht, muß in beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen gelten, und der Satz ist bewiesen. ■



MICHEL PLANCHEREL (1885–1967) war Professor für höhere Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, publizierte seine Arbeiten aber in französischer Sprache. Diese befassen sich nicht nur mit der FOURIER-Theorie einer und mehrerer Veränderlicher, sondern enthalten beispielsweise auch wichtige Sätze aus der sogenannten Ergodentheorie, der allgemeinen Theorie dynamischer Systeme. Seine letzte, 1962 erschienene Arbeit, befaßt sich mit dem Einfluß der Steuergesetze auf die Stabilität einer Volkswirtschaft. Den obigen Satz bewies er 1910; oft wird auch nur dessen letzte Aussage als PLANCHEREL-Formel bezeichnet.

Der gerade bewiesene Satz sagt uns also, daß die FOURIER-Transformation auch auf  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  zumindest bis auf Nullfunktionen wohldefiniert ist, was für die meisten Zwecke genügt. Außerdem gibt er uns eine Aussage über die Normen, die dem Satz von PARSEVAL aus der Theorie der FOURIER-Reihen periodischer Funktionen entspricht und die Aussage, daß FOURIER-Transformation und inverse FOURIER-Transformation zumindest bis auf Nullfunktionen tatsächlich invers zueinander sind.

Gelegentlich wollen wir aber die FOURIER-Transformation an einer bestimmten Stelle wirklich kennen, und dazu ist der obige Satz zu schwach: Da die Distribution  $T_f$  die Funktion  $F$  nur bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmt, legt  $T_f$  für kein einziges Argument  $t$  den Wert  $f(t)$  wirklich fest.

Im Rest dieses Abschnitts wollen wir uns überlegen, daß auch der Funktionswert von  $f$  an allen Stetigkeitsstellen von  $f$  durch  $T_f$  eindeutig bestimmt ist.

Wir gehen also aus von zwei stückweise stetige Funktionen  $f$  und  $g$  mit  $T_f = T_g$  ist. Für jede stark abfallende Funktion  $\varphi$  ist dann

$$T_f(\varphi) = T_g(\varphi) \quad \text{oder} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi(t) dt.$$

Dies wollen wir anwenden auf die zu Beginn dieses Abschnitts betrachteten Funktionen und dort einfach mit  $f_r$  bezeichneten Funktionen

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi_{a,b,r}: \begin{cases} t \mapsto \begin{cases} 4r & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ t \mapsto \begin{cases} \frac{4r}{e(b-a)^2} e^{-(t-a)(b-t)} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

von denen wir dort gezeigt hatten, daß sie für feste Werte von  $a, b$  und ein variables  $r > 0$  für  $r \rightarrow 0$  gegen den Rechteckimpuls

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad R_{a,b}: \begin{cases} t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

konvergieren. Diese Konvergenz haben wir sowohl bezüglich der  $L^2$ -Norm als auch bezüglich der  $L^1$ -Norm nachgerechnet. Wegen letzterer können wir aus den Gleichungen

$$T_f(\varphi_{a,b,r}) = T_g(\varphi_{a,b,r})$$

oder

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)R_{a,b}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)R_{a,b}(t) dt$$

schließen, daß auch

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt \quad \text{für alle } a, b.$$



Als integrierbare Funktionen haben  $f$  und  $g$  Stammfunktionen  $F$  und  $G$ ; damit ausgedrückt ist

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}.$$

(Strenggenommen haben wir das nur gezeigt für  $b > a$ , aber im Falle  $b < a$  können wir einfach obige Überlegung für das Intervall  $[b, a]$  wiederholen.) Setzen wir  $b = a + h$ , so gilt daher auch

$$F(a + h) - F(a) = G(a + h) - G(a)$$

und

$$\frac{F(a + h) - F(a)}{h} = \frac{G(a + h) - G(a)}{h}$$

für alle  $a, h \in \mathbb{R}$  mit  $h \neq 0$ .

Lassen wir in dieser Gleichung  $h$  gegen null gehen, erhalten wir, sofern  $F$  bzw.  $G$  im Punkt  $a$  differenzierbar ist, den Wert der jeweiligen Ableitung im Punkt  $a$ .

Falls die Funktionen  $f$  und  $g$  in der Umgebung eines Punkts stetig sind, habe sie dort differenzierbare Stammfunktionen und sind gleich deren ableitung; damit ist

$$f(t) = g(t) \quad \text{falls } f \text{ und } g \text{ im Punkt } t \text{ stetig sind.}$$

Die Funktionen  $f$  und  $g$  können sich also höchstens an ihren Unstetigkeitsstellen unterscheiden.

Sind  $f$  und  $g$  sogar stetig, ist also  $f = g$ , und das gilt auch, wenn sowohl  $f$  als auch  $g$  nur stückweise stetig sind und zusätzlich die in §4e) betrachtete Mittelwertigkeit

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \quad \text{und} \quad g(t) = \frac{g(t^+) + g(t^-)}{2}$$

erfüllen, denn die links- und rechtsseitigen Grenzwerte hängen nur von den Werten ab, die die Funktionen an Stellen annehmen, an denen sie stetig sind.

Das wird uns in den meisten Fällen reichen, insbesondere wenn wir uns auf absolut integrierbare Funktionen beschränken:

**Lemma:** Ist die Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  absolut integrierbar, so existiert die FOURIER-Transformierte von  $f$  als Funktion; diese Funktion ist stetig und beschränkt.

*Beweis:* Nach Definition ist

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Der Betrag des Integranden ist  $|f(t)|$ ; da  $f$  absolut integrierbar ist, konvergiert das Integral absolut und ist damit insbesondere konvergent.

Der Integrand  $f(t)e^{-i\omega t}$  ist als Funktion von  $\omega$  für jeden Wert von  $t$  stetig und als Funktion von  $t$  immerhin noch stückweise stetig. Daher zeigt das Lemma aus §6a) zunächst, daß für Intervalle  $[a, b]$ , in denen  $f$  stetig ist, auch

$$\int_a^b f(t)e^{-i\omega t} dt$$

eine stetige Funktion von  $\omega$  ist. Damit gilt dasselbe für jedes endliche Intervall, denn endliche Summen stetiger Funktionen sind wieder stetig. Für  $a \rightarrow -\infty$  und  $b \rightarrow \infty$  schließlich konvergiert das Integral nach Voraussetzung absolut, also auch gleichmäßig, und damit ist auch die Grenzfunktion  $\hat{f}(\omega)$  stetig und beschränkt. ■

Damit folgt insbesondere der z.B. für die Identifikation von Lösungen von Differentialgleichungen wichtige

**Satz:**  $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  seien stetige Funktionen.

a) Falls die FOURIER-Transformierten  $\hat{f}$  und  $\hat{g}$  übereinstimmen, ist  $f = g$ .  
 b) Falls es ein  $r > 0$  gibt, so daß  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$  für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\Re s = r$ , ist  $f(t) = g(t)$  für alle  $t > 0$ .

*Beweis:* a) folgt unmittelbar aus dem gerade bewiesenen Lemma, und b) folgt daraus, daß man dieses Lemma auf die Funktionen

$$f_r: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

und

$$g_r: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ g(t)e^{-rt} & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

anwendet, die zumindest für  $t > 0$  stetig sind, und deren FOURIER-Transformationen gerade die LAPLACE-Transformationen von  $f$  und  $g$  für  $\Re s = r$  sind. ■

### f) Ableitungen von Distributionen

Wie wir in §6b) gesehen haben, ist für alle mindestens  $r$ -fach stetig differenzierbare Funktionen  $f$ , sofern alle vorkommenden FOURIER-Transformierten existieren,

$$\frac{d^r}{d\omega^r} \widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{t^r f}(\omega)$$

und

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega);$$

eine ähnliche, leicht komplexere Formel gilt auch für die LAPLACE-Transformation. Dies hatten wir im weiteren Verlauf von §6 zur Lösung erster Differentialgleichungen verwendet.

Inzwischen können wir die Voraussetzungen etwas präziser formulieren; insbesondere ist klar, daß diese Formeln für alle stark abfallenden Funktionen und alle  $r \in \mathbb{N}$  gelten. Auch wissen wir, daß sie für quadratintegrierbare Funktionen gelten, falls auch alle Ableitungen bis zur jeweils betrachteten quadratintegrierbar sind.

In diesem Paragraphen wollen wir uns überlegen, wie man diesen Formeln auch für beliebige quadratintegrierbare Funktionen mit Hilfe von Distributionen zumindest bis auf Nullfunktionen einen Sinn geben kann.

Dazu überlegen wir uns zunächst, was Ableitungen auf dem Niveau der Distributionen bedeuten, wie man also beispielsweise eine Ableitung der DIRACSchen  $\delta$ -Distribution definieren kann. Es ist klar, daß ein Ansatz wie

$$\delta'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h}$$

zu keinem vernünftigen Ergebnis führen kann; wir müssen unserer alten Strategie folgen und für eine differenzierbare Funktion  $f$  die Distribution  $T_f$  ausrechnen in der Hoffnung, das dies zu einer Formel führt, die sich auf beliebige Distributionen verallgemeinern läßt.

Für eine differenzierbare Funktion  $f$  mit der Eigenschaft, daß sowohl  $f$  als auch die Ableitung  $f'$  höchstens polynomiales Wachstum haben, ist

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt.$$

Nach der Regel für partielle Integration ist daher

$$T_{f'}(\varphi) = f(t)\varphi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot{\varphi}(t) dt.$$

Da  $f$  höchstens polynomiales Wachstum hat, ist  $|f(t)|$  kleiner oder gleich einem Ausdruck der Form  $c|t|^k$  für eine reelle Zahl  $c > 0$  und eine natürliche Zahl  $k$ . Da außerdem  $\varphi$  eine stark abfallende Funktion ist, bleibt  $|t^{k+1}\varphi(t)|$  beschränkt für alle  $t$ , d.h.

$$|\varphi(t)| \leq \frac{M}{|t|^{k+1}}$$

für eine reelle Zahl  $M > 0$ . Damit ist

$$|f(t)\varphi(t)| \leq |ct^k \cdot \frac{M}{t^{k+1}}| \leq \frac{cM}{|t|}.$$

Somit geht das Produkt  $\varphi(t)f(t)$  gegen Null für  $t \rightarrow \pm\infty$  und

$$T_{f'}(\varphi) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot{\varphi}(t) dt = -T_f(\dot{\varphi}).$$

Damit ist klar, wie wir die Ableitung einer Distribution definieren:

**Definition:** Die Ableitung einer Distribution  $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  ist die Distribution

$$\dot{T}: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto -T_f(\dot{\varphi}) \end{cases},$$

die  $n$ -te Ableitung entsprechend

$$T^{(n)}: \begin{cases} S(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto (-1)^n T_f(\varphi) \end{cases}.$$

Zum Nachweis, daß  $\dot{T}$  und allgemeiner auch  $T^{(n)}$  Distributionen sind, müssen wir zeigen, daß dies lineare Abbildungen sind – angesichts der Linearität der Differentiation ist das klar. Zum Nachweis der Stetigkeit aber müssen wir wissen, daß für eine konvergente Folge von Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum auch die Folge der abgeleiteten Funktionen konvergiert; dies gilt nur deshalb, weil wir die Konvergenz im SCHWARTZ-Raum so definiert haben, daß auch alle Ableitungen und deren Produkte mit  $t$ -Potenzen konvergieren müssen.

Beispielsweise ist also für die DIRAC-Distribution

$$\Delta_a^{(n)}(\varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(a)$$

oder, mit der  $\delta$ -„Funktion“ ausgedrückt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t - a) \varphi(t) dt = (-1)^n \varphi^{(n)}(a).$$

Auch Sprungfunktionen wie

$$\vartheta: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

lassen sich in der schönen neuen Welt der Distributionen problemlos differenzieren:

$$T_\vartheta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t) \varphi(t) dt = \int_0^{\infty} \varphi(t) dt$$

hat als Ableitung die Distribution  $\dot{T}_\vartheta$  mit

$$\dot{T}_\vartheta(\varphi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t) \dot{\varphi}(t) dt = - \int_0^{\infty} \dot{\varphi}(t) dt = -\varphi(t) \Big|_0^{\infty} = \varphi(0),$$

da  $\varphi(t)$  bei einer stark abfallenden Funktion für  $t \rightarrow \infty$  gegen null geht. Diese Distribution kennen wir aber: Es ist gerade die DIRAC-Distribution  $\Delta_0$ . Also ist

$$\dot{T}_\vartheta = \Delta_0,$$

was sich in Funktionen ausgedrückt (mit aller gebotenen Vorsicht) auch als

$$\dot{\vartheta}(t) = \delta(t)$$

schreiben läßt. Entsprechend lassen sich im Distributionensinne auch andere Sprungfunktionen differenzieren; die Ableitung an einer Sprungstelle  $t = t_0$  ist jeweils Sprunghöhe mal  $\delta(t - t_0)$ .

Auch mit der Ableitung der Betragsfunktion haben wir auf Distributionenniveau keine Probleme: Für  $f(t) = |t|$  zeigt partielle Integration, daß

$$\begin{aligned} \dot{T}_f(\varphi) &= - \int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^0 t \cdot \varphi(t) dt - \int_0^{\infty} t \cdot \varphi(t) dt \\ &= t\varphi(t) \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt - t\varphi(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \varphi(t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt + \int_0^{\infty} \varphi(t) dt = T_g(\varphi) \end{aligned}$$

mit

$$g(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}.$$

An der Stelle  $t = 0$  können wir einen beliebigen Funktionswert wählen, denn  $T_g$  hängt nicht von diesem Wert ab. Wir bekommen also für  $t \neq 0$ , wo  $f(t) = |t|$  differenzierbar ist, die erwarteten Ergebnisse, und für  $t = 0$  keine Aussage. Nichtsdestoweniger ist die *Distribution*  $\dot{T}_f$  wohldefiniert. Auf dem Niveau der Distributionen sind Ableitungen also ziemlich problemlos – auch für nichtdifferenzierbare Funktionen.

Das Produkt einer Distribution mit einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion mit höchstens polynomialem Wachstum haben wir

bereits definiert; das können wir insbesondere anwenden auf die Funktion

$$\Pi_r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \quad t \mapsto t^r.$$

Wir erwarten

**Lemma:** Für jede Distribution  $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  und jede natürliche Zahl  $r$  ist

$$\widehat{T}^{(r)} = (-i)^r \widehat{\Pi_r T} \quad \text{und} \quad \Pi_r \widehat{T} = (-i)^r T^{(r)}.$$

*Beweis:* Für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt nach den entsprechenden Formeln für stark abfallende Funktionen aus §6b)

$$\begin{aligned} \widehat{T}^{(r)}(\varphi) &= (-1)^r \widehat{T}(\varphi^{(r)}) = (-1)^r T(\widehat{\varphi^{(r)}}) = (-1)^r T(i^r \Pi_r \widehat{\varphi}) \\ &= (-i)^r T(\Pi_r \widehat{\varphi}) = (-i)^r \Pi_r T(\widehat{\varphi}) = (-1)^r \widehat{\Pi_r T}(\varphi), \end{aligned}$$

denn aus der Formel  $\omega^r \widehat{\varphi}(\omega) = (-i)^r \widehat{\varphi^{(r)}}(\omega)$  folgt

$$\widehat{\varphi^{(r)}}(\omega) = i^r \omega^r \widehat{\varphi}(\omega).$$

Entsprechend zeigt man auch die zweite Formel

$$\begin{aligned} \Pi_r \widehat{T}(\varphi) &= \widehat{T}(\Pi_r \varphi) = T(\widehat{\Pi_r \varphi}) = T(i^r \widehat{\varphi^{(r)}}) \\ &= i^r T(\widehat{\varphi^{(r)}}) = (-i)^r T^{(r)}(\widehat{\varphi}) = (-i)^r \widehat{T}^{(r)}(\varphi). \end{aligned}$$

■

Rückübersetzt für Funktionen heißt das, daß die Formeln

$$\frac{d^r}{d\omega^r} \widehat{f}(\omega) = (-i)^r t^r \widehat{f}(\omega)$$

und

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega);$$

zumindest bis auf Nullfunktionen auch dann für quadratintegrierbare Funktionen gelten, wenn diese nur im Distributionensinn differenzierbar sind. Die entsprechende Formel für die LAPLACE-Transformation, die zusätzlich die Funktions- und Ableitungswerte an der Stelle Null enthält, ist natürlich (auch modulo Nullfunktionen) nur dann sinnvoll, wenn diese Werte wohldefiniert sind.

### g) Faltungen

Bei der Untersuchung von FOURIER-Reihen in §4a) erwies sich die (periodische) Faltung zweier Funktionen als wichtiges Instrument zum Nachweis der Konvergenz; außerdem war sie oft nützlich, um ohne großen Aufwand neue FOURIER-Reihen aus bekannten herzuleiten.

Hier im nichtperiodischen Fall ist sie einfacher und anschaulicher zu verstehen als im periodischen Fall:  $f(\star g)(t)$  ist einfach das gewichtete Mittel der Funktionswerte von  $f$  in der Umgebung von  $t$ , wobei  $g$  die Gewichtsfunktionen ist. Am einfachsten ist es, wenn man sich  $g$  als eine Funktion vorstellt, die im Punkt Null ein Maximum hat und dann nach beiden Seiten monoton abfällt; dann kann man sich  $f \star g$  als eine „verschmierte“ (oder auch geglättete) Version von  $f$  vorstellen. Indem man für  $g(t)$  GAUSSsche Glockenkurven nimmt, kann man beispielsweise unscharfe (oder weichgezeichnete) Photographien simulieren – je größer der Parameter  $\sigma$ , desto unschärfer ist das Resultat.

Für die formale Definition lassen wir allerdings beliebige Funktionen  $f$  und  $g$  zu; später werden wir sogar Faltungen von Funktionen mit Distributionen betrachten.

**Definition:** Für zwei Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt

$$f \star g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s) ds \end{cases},$$

falls dieses Integral existiert, *Faltung* von  $f$  mit  $g$ .

**Lemma:** Für  $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  existiert die Faltung  $f \star g$ .

*Beweis:* Mit  $f$  liegt für jedes  $t \in \mathbb{R}$  auch die Funktion  $s \mapsto f(t-s)$  in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ; die Abschätzungen aus §8a) zeigen daher die Existenz des Integrals  $f \star g(t)$ . ■

Ebenfalls in völliger Analogie zum periodischen Fall gilt

**Lemma:** Falls die FOURIER-Transformationen von  $f, g$  und von  $h(t) = (f \star g)(t)$  als Funktionen existieren, ist  $\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)$ .

*Beweis:* Nach dem Satz von FUBINI ist

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{u-t-s}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s) ds \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s) e^{-i\omega t} dt \right) ds \\ &= \int_{u=t-s}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(s) e^{-i\omega(u+s)} du \Big) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \right) g(s) e^{-i\omega s} ds \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{-i\omega s} ds \right) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega), \end{aligned}$$

wie behauptet. ■

Als erste Anwendung hiervon können wir die FOURIER-Transformierte eines Produkts durch die FOURIER-Transformierten der Faktoren ausdrücken:

**Korollar:**  $\widehat{f g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} (\widehat{f} \star \widehat{g})(\omega)$ .

*Beweis:* Wir wenden das gerade bewiesenen Lemma an auf die FOURIER-Transformierten von  $f$  und  $g$ ; dann ist

$$\widehat{f \star g}(t) = \widehat{f}(t) \cdot \widehat{g}(t).$$

Wie wir wissen, unterscheiden sich FOURIER-Transformation und inverse FOURIER-Transformation durch den Faktor  $1/2\pi$  vor der inversen

Transformation und das Vorzeichen des Argument, d.h.

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi \cdot f(-t), \quad \widehat{\widehat{g}}(t) = 2\pi \cdot g(-t) \quad \text{und} \quad \widehat{\widehat{f \star g}}(t) = 4\pi^2 \cdot f(-t)g(-t).$$

Aus dem gleichen Grund ist  $\widehat{\widehat{f \star g}}(t) = 2\pi \cdot (\widehat{f \star g})(-t)$ , also

$$2\pi \cdot (\widehat{f \star g})(-t) = 4\pi^2 \cdot \widehat{f g}(-t) \quad \text{oder} \quad (f g)(-t) = \frac{1}{2\pi} (\widehat{f \star g})(-t).$$

Dies gilt für alle reellen Zahlen  $t$ , deshalb können wir das Minuszeichen links und rechts auch weglassen und haben dann die Behauptung des Korollars. ■

Wie im periodischen Fall folgt auch, daß die Faltung (abgesehen von eventuell vorhandenen Unstetigkeitsstellen) kommutativ und assoziativ ist:

$$f \star g = g \star f \quad \text{und} \quad f \star (g \star h) = (f \star g) \star h,$$

denn für die FOURIER-Transformationen der beiden Seiten sind jeweils gleich nach dem Kommutativitätsgesetz und Assoziativitätsgesetz für die Multiplikation komplexer Zahlen.

Eine weitere interessante Konsequenz dieses Lemmas ist, daß sich Faltungen gelegentlich rückgängig machen lassen:  $f \star g$  ist durch seine FOURIER-Transformation  $\widehat{f} \cdot \widehat{g}$  (fast überall) bestimmt; falls  $g(\omega)$  keine Nullstellen hat, kann man die Multiplikation mit  $g(\omega)$  durch eine Division rückgängig machen. Eine Grundidee zum Rückgängigmachen der Faltung wäre also die folgende: Ist  $h(t)$  die inverse FOURIER-Transformation von  $1/\widehat{g}(\omega)$ , so hat  $(f \star g) \star h$  FOURIER-Transformierte

$$\widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega) \cdot \widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega) \cdot \frac{1}{\widehat{g}(\omega)} = \widehat{f}(\omega),$$

$(f \star g) \star h$  stimmt also fast überall mit  $f$  überein.

Leider ist die Sache aber doch nicht ganz so einfach, denn die Existenz von  $h$  ist alles andere als klar: Für eine stark abfallende Funktion  $g(\omega)$  ist  $1/g(\omega)$  „stark ansteigend“, und natürlich gibt es auch Probleme mit den Nullstellen von  $g$ . Die Mathematik kennt jedoch eine ganze Reihe von Regularisierungstechniken, mit denen man solche Probleme umgehen kann. Insbesondere kann man für praktische Zwecke sowohl

den Frequenzbereich, über den integriert wird, als auch den Zeit- oder Ortsbereich oft abschneiden, so daß nur ein Integral über ein endliches Intervall betrachtet werden muß.

Die Formel, die wir gerade benutzt haben, gelten, wenn man solche Techniken benutzt, natürlich nicht mehr exakt, aber doch oft mit einer Genauigkeit, die für praktische Zwecke völlig ausreicht. So konnte beispielsweise die NASA die Bilder des falsch fokussierten HUBBLE-Teleskops durch digitale Nachbehandlung so deutlich verbessern, daß die Bildqualität auch von der Reperatur nicht viel schlechter war als bei einem korrekt fokussierten Teleskop.

Eine neuere Anwendung ist die sogenannte *brennpunktfreie Optik*, die von CMD Optics in Boulder, Colorado entwickelt wurde. Dort benutzt man eine (von Zeiss speziell zu diesem Zweck konstruierte) Linse ohne Brennpunkt; parallele einfallende Strahlen gehen also *nie* durch denselben Punkt der Bildebene, so daß grundsätzlich jedes Bild unscharf ist. Diese Unschärfe wird durch digitale Nachbearbeitung in der oben skizzierten Weise so geht es geht kompensiert.

Zweck dieser auf den ersten Blick unsinnigen Vorgehensweise ist die Erhöhung der Tiefenschärfe: Ein klassisches optisches System bildet, insbesondere wenn es mit wenig Licht auskommen muß und daher eine große Blende braucht, nur in einem sehr kleinen Entfernungsbereich scharf ab. Die brennpunktfreie Linse bildet natürlich überhaupt nirgends scharf ab, aber das Gesamtsystem aus Linse und digitaler Nachbearbeitung liefert scharfe Bilder aus einem deutlich größeren Entfernungsbereich als dies mit konventioneller Optik möglich ist.

Besonders einfach sind Faltungen mit  $\delta$ -Funktionen zu berechnen: Für  $\eta(t) = \delta(t - t_0)$  zeigt die Substitutionsregel mit  $u = t - t_0 - s$ , daß

$$\eta * f = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - s)g(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)g(t - t_0 - u) du = g(t - t_0)$$

ist, Faltung mit  $\delta(t - t_0)$  verschiebt also einfach das Argument um  $t_0$ . Insbesondere ist  $\delta * f = f$ .

Im Falle einer Funktion, die außerhalb eines gewissen Intervalls null (oder praktisch null) ist, läßt sich durch Faltung mit einer Summe von

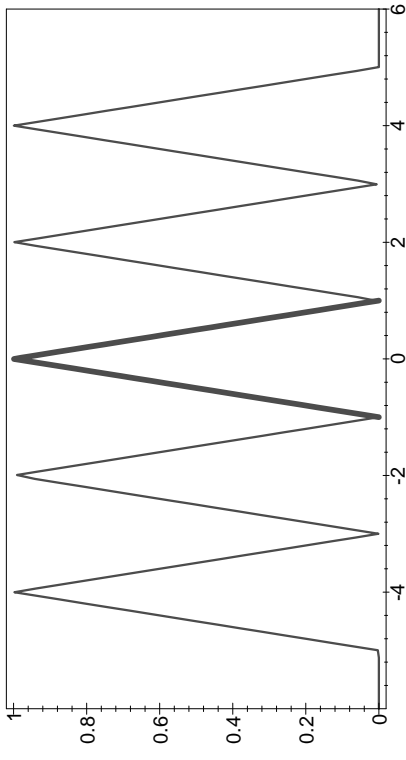


Abb. 25: Faltung eines Dreiecksimpuls mit einer Summe von  $\delta$ -Distributionen  $\delta$ -Funktionen der Graph an verschiedene Stellen verschoben; Abbildung 25 zeigt dies für die Faltung eines (fett eingezeichneten) Dreiecksimpulses auf  $[-1, 1]$  und die Distribution

$$\delta(t - 4) + \delta(t - 2) + \delta(t) + \delta(t + 2) + \delta(t + 4).$$

## h) Der Abtastatz von Nyquist

Egal ob es um die automatische Erfassung von Meßwerten geht oder um die Aufzeichnung von Musik: Die digitale Darstellung analoger Daten ist wesentlicher Bestandteil der Informationsverarbeitung. Nun ist aber eine beliebige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sicherlich nicht durch ihre Funktionswerte an endlich vielen Stellen oder auch an ein einer diskreten Menge von Stellen bestimmt: Auch wenn wir wissen, daß  $f(t) = 0$  ist für jedes ganzzahlige Vielfache von 0,001, wissen wir noch nicht, daß  $f$  die Nullfunktion ist: Auch die Funktionen  $f(t) = \sin(1000\pi t)$  und  $f(t) = -3 \sin(5000\pi t)$  haben diese Eigenschaft. Auch bei von null verschiedenen Abtastwerten tritt dieses Problem auf: Beispielsweise stimmen auch die Funktionen

$$f(t) = \cos(500\pi t) \quad \text{und} \quad g(t) = \cos(1500\pi t)$$

für alle ganzzahligen Vielfachen von 0,001 überein, aber sie nehmen hier abwechselnd die Werte 1, 0, -1, 0 an; siehe Abbildung 26. Da der

Frequenzunterschied zwischen den beiden Schwingungen fast dem zwi- schen Baß und Sopran entspricht, ist klar, daß man die beiden Schwin- gungen zumindest auf einer Musik-CD nicht miteinander verwechseln darf.

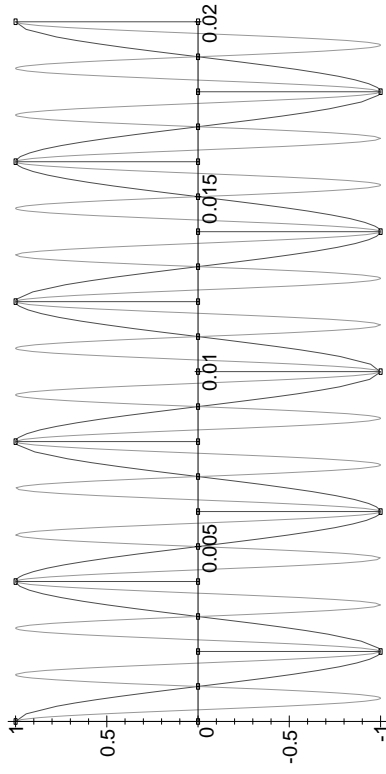


Abb. 26: Abtastung zweier Schwingungen

Die Probleme bei den obigen Beispielen beruhen offensichtlich darauf, daß es zu jedem gegebenen Signal auch höherfrequente Signale gibt, die an vorgegebenen Abtastpunkten mit ihm übereinstimmen; eine eindeu- tige Rekonstruktion ist höchstens dann möglich, wenn man eine Grenze festlegt, oberhalb derer Frequenzen nicht mehr berücksichtigt werden sollen. Der Abtastatz von NYQUIST sagt, daß dann in der Tat eine Re- konstruktion möglich ist, und er sagt auch, wo die Grenze liegen soll, oberhalb derer man die Frequenzen abschneiden muß: Die Abtastfre- quenz muß mehr als doppelt so hoch sein als die höchste im Signal vorkommende Frequenz.

Die genaue Formulierung des Satzes ist etwas technischer; insbesondere müssen wir berücksichtigen, daß die Kreisfrequenz  $\omega$ , mit der wir immer arbeiten, etwas anderes ist, als die Frequenz: Eine reine Schwingung mit einer Frequenz von 1000 Hz ist nicht gegeben durch eine Funktion wie  $\sin 1000t$ , sondern – bei in Sekunden gemessener Zeit – durch

sin  $2000\pi t$ . Entsprechend kommt auch jetzt bei der Formulierung des Abtastatzes von NYQUIST ein Faktor  $2\pi$  ins Spiel:

**Satz:**  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  habe die Eigenschaft, daß  $\hat{f}(\omega)$  außerhalb eines Intervalls der Länge  $\Omega$  verschwinde. Dann ist  $f$  eindeutig bestimmt durch die Werte  $f(2k\pi/\Omega)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis:*  $(\omega_1, \omega_2)$  sei ein Intervall der Länge  $\Omega$  derart, daß  $\hat{f}(\omega)$  außerhalb dieses Intervalls verschwindet. Dann ist bis auf eine Nullfunktion

$$f(t) = \check{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Indem wir  $f$  durch die rechte Seite ersetzen (was nichts wesentliches ändert) können wir annehmen, daß diese Gleichung wirklich gilt. Also ist insbesondere

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \hat{f}(\omega) e^{2k\pi i\omega/\Omega} d\omega. \quad (*)$$

Nun betrachten wir jene Funktion  $g(\omega)$ , die auf dem Intervall  $[\omega_1, \omega_2)$  mit  $\hat{f}(\omega)$  übereinstimmt und die periodisch mit Periode  $\Omega$  in  $\omega$  auf  $\mathbb{R}$  fortgesetzt ist. Für diese Funktion ist natürlich auch

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega) e^{2k\pi i\omega/\Omega} d\omega,$$

denn im Integrationsintervall stimmen  $\hat{f}$  und  $g$  überein.

$g$  als periodische Funktion in  $\omega$  mit Periode  $\Omega$  hat eine Darstellung als FOURIER-Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\lambda\omega} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\Omega};$$

der  $k$ -te FOURIER-Koeffizient ist

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{\Omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega) e^{-ik\lambda\omega} d\omega = \frac{1}{\Omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega) e^{-2\pi i\omega k/\Omega} d\omega \\ &= \frac{2\pi}{\Omega} f\left(\frac{-2k\pi}{\Omega}\right), \end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen (\*) gilt.

Durch die Werte  $f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right)$  sind also alle FOURIER-Koeffizienten von  $g$  bestimmt, damit auch (fast überall) die Funktion  $g(\omega)$ , und damit auch die Funktion  $\hat{f}(\omega)$ , die im Intervall  $[\omega_1, \omega_2]$  mit  $g(\omega)$  übereinstimmt und außerhalb (außer eventuell im Punkte  $\omega_2$ ) verschwindet. Damit ist auch  $f(t) = \check{f}(t)$  fast überall durch diese Werte bestimmt. ■



HARRY NYQUIST (1889–1976) wurde in Schweden geboren, arbeitete aber ab Anfang der zwanziger Jahre bei den Bell Laboratories; das Bild zeigt ihn um 1960 mit seinen dortigen Kollegen JOHN PIERCE (*links*) und RUDOLF KOMPNER (*Mitte*). Seine Arbeit von 1924 über die Übertragungsgeschwindigkeit von Telegraphen gilt als eine der Begründungen der Informationstheorie. Den Abtatsatz, den CAUCHY bereits 1841 postuliert hatte, bewies er 1928. Weitere wichtige Arbeiten befassen sich mit der quantitativen Erforschung des thermischen Rauschens und der Stabilität von Verstärkern.

Bei praktischen Anwendungen dieses Satzes wird  $f(t)$  im allgemeinen eine reelle Funktion sein; dann verschwindet

$$\begin{aligned} \hat{f}(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(-\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t) e^{-i\omega t}} dt \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt} = \overline{\hat{f}(\omega)} \end{aligned}$$

genau dann, wenn auch  $\hat{f}(\omega)$  verschwindet. Daher wird in diesem Fall alles einfacher, wenn man das Intervall, außerhalb dessen  $\hat{f}(\omega)$  verschwindet, symmetrisch zum Nullpunkt wählen kann, also von der Form

$(-\omega_0, \omega_0)$ . Die zur Kreisfrequenz  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$  gehörende Frequenz  $\nu_0$  wird in diesem Zusammenhang oft als *Bandbreite* bezeichnet. Hier ist  $\Omega = 2\omega_0$ , zur Rekonstruktion der Funktion  $f$  brauchen wir also die Funktionswerte

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = f\left(\frac{k\pi}{\omega_0}\right) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Ein Signal der Bandbreite  $\nu_0$  muß also mit einer Frequenz von mindestens  $2\nu_0$  abgetastet werden, damit man es eindeutig rekonstruieren kann.

Bekanntestes Beispiel hierfür sind Musik-CDs: Praktisch niemand kann Töne mit Frequenzen von mehr als 20kHz hören; für Aufnahmen auf CD wird 44 100 Mal pro Sekunde der Schalldruck gemessen und gespeichert, für Signale die nicht allzuweit oberhalb von 20kHz abgeschnitten werden, ist also eine perfekte Rekonstruktion möglich.

Auch in der Computergraphik spielt der Satz von NYQUIST eine wichtige Rolle, denn Pixelgraphik ist schließlich nichts anderes als die (zweidimensionale) diskrete Abtastung eines kontinuierlichen Bilds. Falls das Bild zu hochfrequente Anteile enthält, entstehen sogenannte *alias-Effekte*, da das Auge diese Anteile anhand des Pixelbilds als niedrigere Frequente Strukturen mit gleichen Abtastwerten interpretiert. Vor der Abtastung muß das Bild daher tiefpaßgefiltert werden; da die Funktion  $\frac{\sin ax}{ax}$ , die FOURIER-Transformierte des Rechteckimpulses, einigmaßen schnell abfällt, wendet man dazu meist das Lemma aus dem letzten Abschnitt an und faltet mit einer geeigneten solchen Funktion. Falls das Ursprungsbild auch schon als (höher aufgelöste) Pixelgraphik gegeben war, wird die Faltung hier einfach zu einer Summation über nicht garzu viele Nachbarpixel, was sehr effizient durchgeführt werden kann.

## §9: Ausblick: Mehrdimensionale Fourier-Theorie

### a) Faltungen und Fourier-Integrale

In völliger Analogie zum eindimensionalen Faltungsintegral läßt sich auch ein  $n$ -dimensionales definieren: Für zwei Funktionen

$$f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C},$$