ist daher

$$(f,\, f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \ ,$$

wobei auch hier wieder, da es sich um ein trigonometrisches *Polynom* handelt, in beiden unendlichen Summen nur endlich viele Summanden ungleich null sind.

$L_T(\mathbb{R},\, \mathbb{R})$ ist zwar kein EUKLIDischer Vektorraum und $L_T(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ kein HERMITEscher, aber wir hoffen doch, daß sich die trigonometrischen Funktionen *bzw.* komplexen Exponentialfunktionen wenigstens so ähnlich verhalten wie eine Orthonormalbasis; vielleicht sollte auch gelten, daß für eine Funktion $f \in L_T(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ mit FOURIER-Reihe

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{k\cdot i\omega t} \quad \text{gilt} \quad (f,\, f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \ ,$$

obwohl *hier* wirklich unendliche Summen stehen können.

Bei der Untersuchung der Konvergenz von FOURIER-Reihen wird diese Frage eine wesentliche Rolle spielen; als ersten Einstieg dazu beweisen wir die BESSELsche Ungleichung:

Lemma: Für die FOURIER-Koeffizienten $c_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\, dt$ einer Funktion $f \in L_T(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\overline{c_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \le \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{f(t)}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt\,;$$

insbesondere konvergiert die linke Summe also.

Beweis: Die rechte Seite der Ungleichung ist gerade das HERMITEsche Produkt $(f,\, f)$, und auch die FOURIER-Koeffizienten lassen sich als Produkte

$$c_k = (f,\, e^{k\cdot i\omega t})$$

schreiben. Wir wollen noch einige weitere Produkte ausrechnen.

Zunächst definieren wir die Teilsumme

$$S_N(t) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t}\,.$$

Dies ist ein trigonometrisches Polynom, und wir wissen daher schon aus §2*a),* daß

$$(S_N,\, S_N) = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2$$

ist.

Als nächstes betrachten wir das Produkt

$$(f - S_N,\, f - S_N) = (f,\, f) - (S_N,\, f) - (f,\, S_N) + (S_N,\, S_N)\,.$$

Auch wenn das HERMITEsche Produkt auf $L_T(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ nicht positiv definit ist, wissen wir doch, daß die linke (und damit auch die rechte) Seite zumindest nichtnegativ ist.

Wegen der Linearität des HERMITEschen Produkts im ersten Argument ist weiter

$$\begin{aligned}(S_N,\, f) &= \left(\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t},\, f\right) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \left(e^{k\cdot i\omega t},\, f\right)\\ &= \sum_{k=-N}^{N} c_k\overline{(f,\, e^{k\cdot i\omega t})} = \sum_{k=-N}^{N} c_k\overline{c_k} = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2\\ &= (S_N,\, S_N)\,,\end{aligned}$$

und da dies eine reelle Zahl ist, folgt auch

$$(f,\, S_N) = \overline{(S_N,\, f)} = (S_N,\, f) = (S_N,\, S_N)\,.$$

Fassen wir alles zusammen, ist also

$$0 \le (f - S_N,\, f - S_N) = (f,\, f) - (S_N,\, S_N)$$

und damit

$$(S_N,\, S_N) \le (f, f) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Ausgeschrieben wird das zu

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \le \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

und der Grenzübergang $N \to \infty$ führt zur gewünschten Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \le \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt\,,$$

wie behauptet. ■

FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784–1846) verließ die Schule schon im Alter von 14 Jahren und wurde Lehrling eines Handelshauses. Dessen Überseehandel veranlaßte ihn zur Beschäftigung mit Geographie, Spanisch und Englisch und schließlich (für die Navigation) mit Astronomie. Nachdem er 1804 die Bahn des HALLEYschen Kometen berechnet hatte, bekam er 1806 eine Stelle als Astronom eines privaten Observatoriums. Seine Beiträge zur Mathematik entstanden aus seinen astronomischen Berechnungen. 1809 wurde er zum Direktor des Königsberger Observatoriums und zum Professor der Astronomie ernannt.

Aufgrund der Beziehungen zwischen reellen und komplexen FOURIER-Reihen (für die genau dieselben Formeln gelten, die wir in Abschnitt *d)* für trigonometrische Polynome hergeleitet haben) folgt, daß für die reelle FOURIER-Reihe einer reellwertigen Funktion gilt

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \le \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt\,.$$

Insbesondere konvergieren also auch die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell^2\,.$$

h) Harmonische Analyse als lineare Abbildung

Die BESSELsche Ungleichung zeigt, daß nicht alle Folgen reeller oder komplexer Zahlen als FOURIER-Koeffizienten eine stückweise stetigen Funktion auftreten können: Zumindest muß die Summe ihrer Betragsquadrate konvergieren.

Betrachten wir den Vektorraum

$$\ell^2(\mathbb{Z},\,\mathbb{C}) \underset{\text{def}}{=} \left\{ c\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c(k)|^2 < \infty \right\};$$

so muß also die Funktion $c\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit $c(k) = c_k$ in diesem Vektorraum liegen; wir haben somit eine Abbildung

$$\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{Z},\,\mathbb{C})\,,$$

die einer Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ ihre FOURIER-Koeffizienten zuordnet.

Um den Zusammenhang zwischen Funktionen und Koeffizientenfolgen besser zu verdeutlichen, definieren wir für $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ die Funktion

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \\ k \mapsto \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt \end{cases};$$

$\widehat{f}(k)$ ist also gerade der k-te FOURIER-Koeffizient von f.

Lemma: Die Zuordnung $f \mapsto \widehat{f}$ definiert eine lineare Abbildung von $\mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ nach $\ell^2(\mathbb{Z},\,\mathbb{C})$.

Der *Beweis* ist trivial wegen der Linearität der Integration. ■

Als nächstes definieren wir auf $\ell^2(\mathbb{Z},\,\mathbb{C})$ ein HERMITEsches Skalarprodukt durch die Vorschrift

$$(c,\,d) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\overline{d_k}\,.$$

Wir müssen zeigen, daß dies erstens wohldefiniert ist, daß die Summe also überhaupt konvergiert, und daß es zweitens alle Forderungen an ein HERMITEsches Skalarprodukt erfüllt.

Da für zwei komplexe Zahlen z und w ist $\big(|z| - |w|\big)^2 \geq 0$, also

$$|zw| = |z\overline{w}| \leq \frac{1}{2}\big(|z|^2 + |w|^2\big) .$$

Für zwei Funktionen $c, d \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ ist daher für jede natürliche Zahl N

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=-N}^{N} c(k)\overline{d(k)}\right| &\leq \sum_{k=-N}^{N} \left|c(k)\overline{d(k)}\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=-N}^{N} |c(k)|^2 + \sum_{k=-N}^{N} |d(k)|^2\right) .\end{aligned}$$

Nach Definition von $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ konvergiert die rechte Seite für $N \to \infty$, also auch die linke.

Das Nachrechnen der Forderungen an ein HERMITEsches Skalarprodukt ist nun einfach: Abgesehen von der Tatsache, daß die Summen nicht mehr endlich sind, geht alles ganz genauso wie beim HERMITEschen Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$.

Mit diesem Skalarprodukt ausgedrückt bekommt die BESSELsche Ungleichung die kompakte Form

$$\left(\widehat{f}, \widehat{f}\right) \leq (f, f) \quad \text{für alle} \quad f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) .$$

§4: Periodische Faltungen

Abgesehen von den beiden Beispielen der Rechteckschwingung und des Sägezahns wissen wir bislang noch von keiner FOURIER-Reihe, ob und gegebenenfalls wohin sie konvergiert. In diesem Paragraphen soll dies zumindest für stückweise differenzierbare Funktionen geklärt werden. Als zentral wird sich dabei eine neue Konstruktion herausstellen, die *Faltung zweier Funktionen.*

a) Faltungen

Definition: Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bezeichnen wir die Funktion

$$f \star g(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

als (periodische) Faltung von f und g.

Anschaulich kann man sich die Faltung als eine Art Mittelung von f vorstellen mit einer Gewichtsfunktion g. Im zweidimensionalen (nichtperiodischen) Analogon kann man beispielsweise ein optisch defokusiertes Bild so beschreiben: Bei einer perfekten optischen Abbildung einer Ebene hängt jeder Bildpunkt von genau einem Punkt der Ebenen ab; ist das System aber defokusiert, so kommen auch noch Einflüsse der Nachbarpunkte dazu, die umso größer sind, je näher die Punkte beieinanderliegen. Eine Helligkeitsverteilung $f(s,t)$ wird dann abgebildet auf

$$F(s,t) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\left((s-\sigma)^2+(t-\tau)^2\right)/2a} f(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau ,$$

wobei der Parameter a umso größer ist, je stärker das Bild defokusiert ist. Für kleines a ist der Effekt also eher ein Weichzeichnen als eine echte Unschärfe, und dieser Glättungseffekt ist ein allgemeines Charakteristikum von Faltungen:

Lemma: Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f \star g$ eine stetige Funktion.

(Man beachte, daß f und g beide nur als stückweise stetig vorausgesetzt sind!)

Beweis: Als stückweise stetige periodische Funktion ist g insbesondere beschränkt: Für jedes offene Intervall (t_j, t_{j+1}), in dem f stetig ist, müssen nach Definition der stückweisen Stetigkeit der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{\substack{t\to t_j\\ t>t_j}} g(t)$ und der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{\substack{t\to t_{j+1}\\ t<t_{j+1}}} g(t)$ existieren; damit kann die Einschränkung von g auf das offene Intervall (t_j, t_{j+1}) fortgesetzt werden zu einer stetigen Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ (die an den Intervallenden natürlich nicht

mit g übereinstimmen muß). Damit hat der Betrag dieser Funktion ein endliches Maximum M_j, das auch eine Schranke für g im offenen Intervall $(t_j,\, t_{j+1})$ ist. Nimmt man nun als M das Maximum aller M_j sowie auch der Beträge $\left|g(t_j)\right|$ der Funktionswerte an den potentiellen Sprungstellen, so ist $|g(t)| \le M$ für alle $t \in [0,\, T]$ und damit auch für alle $t \in \mathbb{R}$.

Seien nun t_1 und t_2 Punkte aus $\mathbb{R}$; dann ist

$$\begin{aligned} |f \star g(t_1) - f \star g(t_2)| &\le \frac{1}{T}\int_0^T |f(t_1-\tau) - f(t_2-\tau)|\,|g(\tau)|\;d\tau \\ &\le \frac{M}{T}\int_0^T |f(t_1-\tau) - f(t_2-\tau)|\;d\tau\,. \end{aligned}$$

Das noch verbliebene Integral mißt die Fläche zwischen den Graphen von $f(t)$ und $f(t+t_2-t_1)$ über eine Periode von f; wegen der stückweisen Stetigkeit von f geht diese gegen null für $t_2 \to t_1$. ■

b) Die Fourier-Reihe einer Faltung

Die Nützlichkeit von Faltungen für FOURIER-Reihen ergibt sich aus folgender Formel:

Satz: Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist

$$\widehat{f \star g}(k) = \widehat{f}(k) \cdot \widehat{g}(k) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{Z}\,;$$

die komplexen FOURIER-Koeffizienten von $f \star g$ sind also gerade die Produkte der komplexen FOURIER-Koeffizienten von f und von g.

Der *Beweis* erfolgt durch Nachrechnen: Der k-te FOURIER-Koeffizient

c_k von $f \star g$ ist

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f \star g(t) e^{-k\cdot i\omega t}\,dt = \frac{1}{T^2}\int_0^T \left(\int_0^T f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right) e^{-k\cdot i\omega t}\,dt \\ &= \frac{1}{T^2}\iint\limits_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le\tau\le T}} f(t-\tau)g(\tau)e^{-k\cdot i\omega t}\,d\tau\,dt \\ &= \frac{1}{T^2}\iint\limits_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le\tau\le T}} f(t-\tau)e^{-k\cdot i\omega(t-\tau)}\cdot g(\tau)e^{-k\cdot i\omega\tau}\,dt\,d\tau \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)e^{-k\cdot i\omega(t-\tau)}\,dt\right) g(\tau)e^{-k\cdot i\omega\tau}\,d\tau\,. \end{aligned}$$

Der Inhalt der letzten Klammer kann mit Hilfe der Substitution $u = t-\tau$ im Integral berechnet werden:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)e^{-k\cdot i\omega(t-\tau)}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\tau}^{T-\tau} f(u)e^{-k\cdot i\omega u}\,du = \widehat{f}(k)\,,$$

denn wie wir uns schon überlegt haben, kommt es bei einer periodischen Funktion nicht darauf an, über welches Intervall der Länge T wir integrieren. Somit ist

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T \widehat{f}(k)\cdot g(\tau)e^{-k\cdot i\omega\tau}\,d\tau = \widehat{f}(k)\cdot\widehat{g}(k)\,,$$

wie behauptet. ■

Sind $S_f(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k\cdot i\omega t}$ und $S_g(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{k\cdot i\omega t}$ die FOURIER-Reihen von f und g, ist die FOURIER-Reihe von $f \star g$ somit

$$S_{f\star g}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{k\cdot i\omega t}\,.$$

Nach der BESSELschen Ungleichung konvergieren die Summen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_k|^2 \ ;$$

außerdem ist für jedes k

$$|c_k d_k| \le \frac{1}{2}\left(|c_k|^2 + |d_k|^2\right) ;$$

also konvergiert auch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k d_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|c_k d_k e^{k\cdot i\omega t}\right| .$$

(Man beachte, daß $\left|e^{k\cdot i\omega t}\right| = 1$ ist für jede reelle Zahl t.) Damit haben wir gezeigt, daß die FOURIER-Reihe von $f \star g$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Das hat eine wichtige Konsequenz:

Lemma: Konvergiert die FOURIER-Reihe einer Funktion h gleichmäßig gegen eine Funktion S_h, so ist S_h stetig und hat dieselben FOURIER-Koeffizienten wie h.

Beweis: Die FOURIER-Reihe von h sei

$$S_h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k\cdot i\omega t} .$$

Da alle Summanden $c_k e^{k\cdot i\omega t}$ stetige Funktionen sind, ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe auch die Summe eine stetige Funktion; deren k-ter FOURIER-Koeffizient ist

$$\widehat{S_h}(k) = \left(S_h,\ e^{k\cdot i\omega t}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\ell=-N}^{N} c_\ell \left(e^{\ell\cdot i\omega t}, e^{k\cdot i\omega t}\right) = c_k ,$$

wie behauptet. ∎

Insgesamt haben wir damit bewiesen

Satz: Für $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe von $f \star g$ absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion. Diese hat dieselben FOURIER-Koeffizienten wie $f \star g$. ∎

Damit wissen wir zwar immer noch nicht, *wohin* die FOURIER-Reihe von $f \star g$ konvergiert, aber wir wissen immerhin, *daß* sie für Funktionen, die als Faltungen darstellbar sind, konvergiert, und wir wissen auch, daß für die Differenz zwischen Ausgangs- und Grenzfunktion sämtliche FOURIER-Koeffizienten verschwinden. Wir müssen daher einerseits Funktionen mit verschwindenden FOURIER-Koeffizienten genauer untersuchen und andererseits versuchen, eine möglichst große Klasse von Funktionen als Faltungen darzustellen, auf die wir den gerade bewiesenen Satz anwenden können.

c) Faltung mit einem Sägezahn

Als erstes konkretes Beispiel (von dem sich zeigen wird, daß es zumindest einen Teil der zweiten Aufgabe lösen wird) betrachten wir für eine beliebige Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ die Faltung mit dem Sägezahn

$$s(t) = \frac{T}{2} - t \quad \text{für} \quad 0 < t < T \quad \text{und} \quad s(0) = 0 ,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T; es handelt sich hier um das Zweifache der in §2*c)* betrachteten Funktion.

Für $t, \tau \in [0,\ T)$ liegt $t - \tau$ genau dann wieder in $[0,\ T)$, wenn $\tau \le t$ ist; andernfalls liegt $t - \tau$ im Intervall $(-T,\ 0)$, wo

$$s(t) = s(t+T) = \frac{T}{2} - (t+T) = -\frac{T}{2} - t$$

ist. Somit ist für $t, \tau \in (0,\ T)$

$$s(t-\tau) = \begin{cases} \frac{T}{2} - t + \tau & \text{für } \tau < t \\ 0 & \text{für } \tau = t \\ -\frac{T}{2} - t + \tau & \text{für } \tau > t \end{cases}$$

und $s \star f(t)$ ist gleich

$$\frac{1}{T}\int_0^T s(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^t \left(\frac{T}{2}-(t-\tau)\right) f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{T}\int_t^T \left(-\frac{T}{2}-(t-\tau)\right) f(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}\int_0^t f(\tau)\,d\tau - \frac{T}{2}\int_t^T f(\tau)\,d\tau + \int_0^T (\tau-t)f(\tau)\,d\tau\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau - \int_t^T f(\tau)\,d\tau\right) + \frac{1}{T}\int_0^T (\tau-t)f(\tau)\,d\tau\,.$$

Ist $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$, so ist der erste Summand gleich

$$\frac{1}{2}\big(F(t)-F(0)-F(T)+F(t)\big) = F(t) - \frac{F(0)+F(T)}{2}\,.$$

Auch das letzte Integral läßt sich durch partielle Integration weiter ausrechnen zu

$$\int_0^T (\tau-t)f(\tau)\,d\tau = (\tau-t)F(\tau)\Big|_0^T - \int_0^T F(\tau)\,d\tau$$

$$= (T-t)F(T) + tF(0) - \int_0^T F(\tau)\,d\tau$$

$$= t\big(F(0)-F(T)\big) + TF(T) - \int_0^T F(\tau)\,d\tau\,.$$

Insgesamt ist also

$$s\star f(t) = F(t) + t\big(F(0)-F(T)\big) - \frac{F(0)+F(T)}{2} + TF(T) - \int_0^T F(\tau)\,d\tau\,.$$

Abgesehen von dem Term $t\big(F(0)-F(T)\big)$ ist das eine Stammfunktion von $f(t)$, denn die drei hinteren Terme sind Konstanten, die nicht von t abhängen. Ist also insbesondere $F(T) = F(0)$, so ist $s \star f$ eine Stammfunktion von f. Dies wollen wir ausnutzen, um differenzierbare Funktionen sowie eine leichte Verallgemeinerung davon als Faltungen auszudrücken und so die Konvergenz ihrer FOURIER-Reihen zu beweisen.

d) Fourier-Reihen stetiger stückweise differenzierbarer Funktionen

Definition: Eine stückweise stetige Funktion heißt stückweise differenzierbar, wenn es nur isolierte Punkte gibt, in denen f nicht stetig differenzierbar ist, und wenn auch in diesen Ausnahmepunkten sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert von $\dot{f}(t)$ existieren.

Hier interessieren wir uns für periodische Funktionen; für diese bedeutet die Definition, daß es pro Periodenintervall höchstens endliche viele Punkte geben darf, in denen die Ableitung nicht definiert ist, aber auch dort muß sie einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert haben.

Einfache Beispiele stückweise differenzierbarer Funktionen sind die Rechteckschwingungen aus §2*b),* die überall außer in den Sprungstellen stetig differenzierbar sind und Ableitung null haben; in den Sprungstellen verschwindet daher auch sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert. Die Funktion ist aber trotzdem nicht differenzierbar in den Sprungstellen, da sie dort nicht einmal stetig ist. (Wäre f differenzierbar, so würde die Ableitung identisch verschwinden, die Funktion müßte also nach dem üblichen Argument über den Mittelwertsatz der Differentialrechnung konstant sein.)

Genauso ist beim Sägezahn aus §2*c)* die Ableitung überall außer in den Sprungstellen gleich -1; in den Sprungstellen ist die Funktion nicht differenzierbar, aber beide Grenzwerte der Ableitung sind gleich -1.

Weiteres Beispiel einer stetigen stückweise differenzierbaren Funktion ist etwa

$$f(t) = |t| \quad \text{für} \quad |t| \le 1\,,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode zwei. Für alle $t \notin \mathbb{Z}$ ist f differenzierbar; falls die größte ganze Zahl kleiner t gerade ist, ist die Ableitung +1, ansonsten -1. Bei einer geraden ganzen Zahl ist der linksseitige Grenzwert der Ableitung -1 und der rechtsseitige +1, bei einer ungeraden ist es umgekehrt.

Für eine stückweise differenzierbare Funktion können wir nicht wirklich von der abgeleiteten Funktion reden, da diese nicht in jedem Punkt existieren muß. Wir können aber eine Funktion $\varphi(t)$ definieren, die überall dort mit $\dot{f}(t)$ übereinstimmt, wo $\dot{f}(t)$ existiert; in den übrigen Punkten setzen wir $\varphi(t)$ auf irgendeinen beliebigen Wert, zum Beispiel auf null.

Die Funktion

$$\widetilde{f}(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \,.$$

ist stetig und stückweise differenzierbar, und sie hängt nicht ab vom Wert von φ in den Ausnahmepunkten; ihre Ableitung stimmt dort, wo sie definiert ist, mit φ überein. Falls f stetig ist, unterscheidet sich $\widetilde{f}$ daher nur um eine Konstante von f, und auch f ist eine Stammfunktion von φ.

Setzen wir nun noch zusätzlich voraus, daß $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ periodisch ist, folgt aus der Rechnung im vorigen Abschnitt, daß sich $f(t)$ nur um eine Konstante vom Faltungsprodukt $s \star \varphi$ unterscheidet, denn

$$f(T) - f(0) = 0$$

für eine Funktion mit Periode T.

Aus Abschnitt *b)* wissen wir, daß die FOURIER-Reihe von $s \star \varphi$ wie auch von jeder anderen Faltung absolut und gleichmäßig konvergiert; da die Addition einer Konstanten hieran nichts ändert folgt also zusammen mit den übrigen Resultaten aus Abschnitt *b)*

Satz: Ist $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stetig und stückweise differenzierbar, konvergiert die FOURIER-Reihe von f absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion S_f, die dieselben FOURIER-Koeffizienten hat wie f. ■

e) Der Eindeutigkeitssatz

Auch wenn wir nun wissen, daß die FOURIER-Reihe zumindest für stetige stückweise differenzierbare Funktionen konvergiert, wissen wir noch nicht, wohin sie konvergiert. Diese Frage soll in diesem Abschnitt geklärt werden.

Beginnen wir mit dem einfachsten Fall einer Funktion, deren sämtliche FOURIER-Koeffizienten verschwinden, und die sich zudem noch einigermaßen anständig verhält: Bei einer stückweise stetigen Funktion existieren nach Definition in jedem Punkt die beiden Grenzwerte

$$f(t^+) \underset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{s \to t \\ s > t}} f(s) \quad \text{und} \quad f(t^-) \underset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{s \to t \\ s < t}} f(s)\,,$$

die überall dort, wo f stetig ist, miteinander und mit $f(t)$ übereinstimmen. Für die übrigen Punkte wollen wir verlangen, daß

$$f(t) = \frac{1}{2}\big(f(t+) + f(t-)\big)$$

der Mittelwert dieser beiden Werte ist.

Satz: Für $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ seien alle FOURIER-Koeffizienten null; außerdem sei in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{1}{2}\big(f(t^+) + f(t^-)\big)\,.$$

Dann ist $f(t) \equiv 0$.

Beweis: Auch hier arbeiten wir wieder mit einem Faltungsintegral, und zwar wollen wir versuchen, die Funktion f als Faltung von sich selbst mit einer geeigneten Funktion g auszudrücken; wir suchen also nach einer Funktion g, so daß $f \star g = f$ ist. Falls g diese Eigenschaft für *beliebige* Funktionen f haben soll, die durch ihre FOURIER-Reihe dargestellt werden, müssen dann alle FOURIER-Koeffizienten von g gleich eins sein, denn bei einer Faltung zweier Funktionen multiplizieren sich die FOURIER-Koeffizienten. g hat also die FOURIER-Reihe

$$S_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{k \cdot i\omega t} \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}\,,$$

was offensichtlich unmöglich ist: Nach der BESSELschen Ungleichung müßte sonst nämlich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1$$

konvergieren, was natürlich nicht der Fall ist.

Wir können aber eine kleine Modifikation dieser Reihe, betrachten, nämlich

$$I_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t} .$$

Hier sorgt der Exponent $|k|$ im Falle $|r| < 1$ für eine starke Dämpfung der Koeffizienten mit großem Index, so daß es zumindest mit der BESSELschen Ungleichung keine Probleme mehr gibt: Die entsprechende Summe ist zusammengesetzt aus zwei konvergenten geometrischen Reihen. Falls auch $I_r(t)$ selbst konvergiert, können wir damit rechnen und hoffen, daß wir irgendwann einmal den Grenzübergang $r \to 1$ machen können, was dann *ungefähr* der Faltung mit der nicht existenten Funktion g entspricht.

Wir berechnen $I_r(t)$ über zwei geometrische Reihen:

Beschränken wir uns zunächst auf positive Indizes, so ist nach der Summenformel

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t} = \frac{1}{1 - re^{i\omega t}} = \frac{1 - re^{-i\omega t}}{(1 - re^{i\omega t})(1 - re^{-i\omega t})}$$
$$= \frac{1 - r\cos\omega t + ir\sin\omega t}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t} .$$

Ersetzt man in einem der Summanden k durch $-k$, so ändert sich nichts am Koeffizienten $r^{|k|}$ und auch nichts am Realteil von $e^{k\cdot i\varphi}$; der Imaginärteil allerdings ändert sein Vorzeichen. Somit ist

$$\sum_{k=-\infty}^{0} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t} = \frac{1 - r\cos\omega t - ir\sin\omega t}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t}$$

der konjugiert komplexe Wert zu obiger Summe. Der Summand eins für $k = 0$ wurde in beiden Summen berücksichtigt, tritt aber in der Gesamtsumme nur einmal auf; also ist

$$I_r(t) = \frac{1 - r\cos\omega t + ir\sin\omega t}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t} + \frac{1 - r\cos\omega t - ir\sin\omega t}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t} - 1$$
$$= \frac{2 - 2r\cos\omega t}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t} - 1 = \frac{2 - 2r\cos\omega t - (1 + r^2 - 2r\cos\omega t)}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t}$$
$$= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\omega t} .$$

Diese Funktion wollen wir uns für verschiedene Werte von r etwas genauer ansehen.

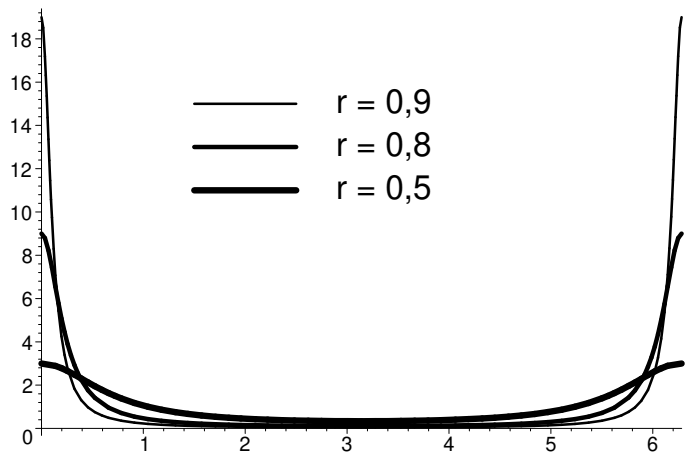

Abb. 13: $I_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}$

Abbildung 13 zeigt, daß sich I_r im offenen Intervall $(0, T)$ für $r \to 1$ immer stärker an die t-Achse annähert, wohingegen die Funktionswerte an den Intervallenden immer stärker ansteigen. In der Tat können wir für $0 < t < T$ beim Grenzübergang $r \to 1$ einfach $r = 1$ setzen und erhalten

$$I_1(t) = \frac{1 - 1^2}{2 - 2\cos\omega t} = 0 .$$

Für $t = 0$ oder T verschwindet dagegen auch der Nenner, und

$$\lim_{r\to 1} I_r(0) = \lim_{r\to 1} I_r(T) = \lim_{r\to 1} \frac{1-r^2}{1+r^2-2}$$
$$= \lim_{r\to 1} \frac{(1+r)(1-r)}{(1-r)^2} = \lim_{r\to 1} \frac{(1+r)}{(1-r)} = \infty\,.$$

Die Fläche unter der Kurve I_r im Intervall $[0,\ T]$ ist

$$\int_0^T \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\omega t}\,dt\,,$$

ein nicht sehr angenehm aussehendes Integral.

Die Mathematik stellt allerdings seit über hundert Jahren Algorithmen zur Verfügung, mit denen sich nicht nur entscheiden läßt, ob Funktionen wie I_r eine elementar ausdrückbare Stammfunktion haben, sondern auch berechnen, wie diese Stammfunktion dann aussieht. In den gängigen Computeralgebrasystemen sind diese Algorithmen zumindest teilweise implementiert, und wenn es auch zu weit führen würde, hier zu erklären, wie man eine Stammfunktion des Integranden

$$I_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\omega t}$$

findet, läßt sich doch das Ergebnis

$$F_r(t) = \int I_r(t)\,dt = -\frac{2}{\omega}\arctan\left(\frac{r+1}{r-1}\,\tan\frac{\omega t}{2}\right) + C$$

leicht verifizieren: Nach der Kettenregel ist zunächst

$$\frac{d}{dt}\arctan\left(a\tan\frac{\omega t}{2}\right) = \frac{1}{1+a^2\tan^2\frac{\omega t}{2}}\cdot\frac{a\omega}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\omega t}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{a\omega}{\cos^2\frac{\omega t}{2}+a^2\sin^2\frac{\omega t}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\omega}{1+(a^2-1)\sin^2\frac{\omega t}{2}}\,.$$

Mit der Beziehung

$$\sin^2\frac{\omega t}{2} = \frac{1-\cos\omega t}{2}$$

wird das zu

$$\frac{1}{2}\,\frac{a\omega}{1+\frac{a^2-1}{2}-\frac{a^2-1}{2}\cos\omega t} = \frac{a\omega}{(a^2+1)-(a^2-1)\cos\omega t}\,.$$

Für $a = \dfrac{r+1}{r-1}$ ist $a^2+1 = 2\cdot\dfrac{r^2+1}{(r-1)^2}$ und $a^2-1 = \dfrac{4r}{(r-1)^2}$, also wird der Ausdruck zu

$$\frac{\frac{r+1}{r-1}\cdot\omega}{2\cdot\frac{r^2+1}{(r-1)^2}-\frac{4r}{(r-1)^2}\cos\omega t} = \frac{(r^2-1)\omega}{2(r^2+1)-4r\cos\omega t}\,.$$

Um die Ableitung von F_r zu berechnen, müssen wir das noch mit $-2/\omega$ multiplizieren, was genau den Integranden ergibt. Somit ist F_r eine Stammfunktion von I_r.

Daß es mit dieser Stammfunktion ein Problem gibt, sieht man spätestens dann, wenn man naiv einsetzt und auf

$$\int_0^T I_r(t)\,dt = F_r(T) - F_r(0) = 0 - 0 = 0$$

kommt, denn aus geometrischen Gründen ist völlig klar, daß das Integral für $r < 1$ positiv sein muß.

Das Problem ist natürlich die Singularität des Tangens im Punkt $\frac{\pi}{2}$: Für $t = \frac{T}{2}$ ist F_r nicht definiert, da der Tangens dort gegen plus oder minus unendlich geht – je nachdem, von welcher Seite wir kommen. Damit ist F_r keine auf dem ganzen Integrationsintervall definierte Stammfunktion, und das Integral kann nicht einfach durch Einsetzen der oberen und der unteren Grenze berechnet werden.

Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von F_r existieren allerdings auch für $t = \frac{T}{2}$:

Für $0 < t < \frac{T}{2}$ ist $\tan\frac{\omega t}{2}$ positiv und geht gegen $+\infty$ für $t \to \frac{T}{2}$. Da der Faktor vor dem Tangens für alle $r \in (-1,\ 1)$ negativ ist, folgt

$$\lim_{\substack{t\to T/2\\ t<T/2}} F_r(t) = -\frac{2}{\omega}\lim_{u\to-\infty}\arctan u = -\frac{2}{\omega}\,\frac{-\pi}{2} = \frac{T}{2}\,.$$

Für $\frac{T}{2} < t < T$ dagegen ist $\tan\frac{\omega t}{2}$ negativ und geht gegen $-\infty$ für $t \to \frac{T}{2}$. Somit ist

$$\lim_{\substack{t\to T/2\\ t>T/2}} F_r(t) = -\frac{2}{\omega}\lim_{u\to\infty}\arctan u = -\frac{2}{\omega}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{T}{2}\,.$$

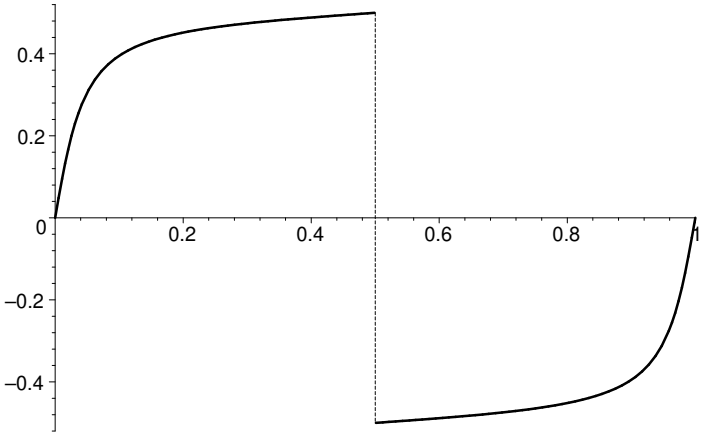

Abb. 14: $F_r(t)$ für $r = 0{,}8$ und $T = 2$

Abbildung 14 zeigt die Funktion F_r mit ihrer Sprungstelle in der Intervallmitte.

Zur Berechnung des Integrals von I_r über eine Periode spalten wir es auf in zwei Teilintegrale über Intervalle, in denen wir eine Stammfunktion haben, und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^T I_r(t)\,dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} I_r(t)\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^T I_r(t)\,dt\\ &= \lim_{\substack{t\to T/2\\ t<T/2}} F_r(t) - F_r(0) + F_r(T) - \lim_{\substack{t\to T/2\\ t>T/2}} F_r(t)\\ &= \frac{T}{2} - 0 + 0 + \frac{T}{2} = T\,.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_r(t)\,dt = 1 \quad \text{für alle} \quad r \in (-1,\,1)$$

und

$$\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_r(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^T I_r(t)\,dt = \frac{1}{2}\,.$$

Lassen wir nun r gegen eins gehen, ändert sich natürlich nichts an diesen Formeln, aber die beiden Integrale konzentrieren sich immer mehr auf die Umgebung von $t = 0$ *bzw.* $t = T$. Damit ist anschaulich ziemlich klar, daß für eine Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R},\,\mathbb{C})$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 1} I_r \star f(t) &= \lim_{r\to 1}\frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)I_r(\tau)\,d\tau\\ &= \lim_{r\to 1}\frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} f(t-\tau)I_r(\tau)\,d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^T f(t-\tau)I_r(\tau)\,d\tau\right)\\ &= \frac{1}{2}\big(f(t^-) + f(t^+)\big)\,,\end{aligned}$$

denn für $r \to 1$ geht $I_r(t)$ gegen null für alle t im Integrationsbereich außer $t = 0$ und $t = T$. Auf die genauen Abschätzungen zum Beweis dieser Aussage sei verzichtet.

Stattdessen wenden wir die Aussage an auf die Funktion f aus dem Satz; dafür besagt sie, daß

$$\lim_{r\to 1} I_r \star f(t) = f(t) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Für $|r| < 1$ ist

$$I_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t}$$

absolut und gleichmäßig konvergent; deshalb kann die Summation mit Integration vertauscht werden und wir erhalten für $I_r \star f$ auch den Ausdruck

$$\begin{aligned} I_r \star f(t) &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t} \cdot \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau) e^{-k\cdot i\omega\tau}\,d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k\cdot i\omega t} \cdot \widehat{f}(k)\,. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung alle FOURIER-Koeffizienten von f verschwinden, ist also $I_r \star f(t) = 0$ für alle r vom Betrag kleiner eins. Damit ist aber auch

$$f(t) = \lim_{r\to 1} I_r \star f(t) = 0 \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

wie behauptet. ∎

Das war ein langer Beweis für eine nicht sonderlich aufregende Aussage; der Satz hat jedoch weitreichende Konsequenzen:

Eindeutigkeitssatz: Haben zwei Funktionen $f, g \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dieselben FOURIER-Koeffizienten, so unterscheiden sie sich höchstens an Unstetigkeitsstellen.

Beweis: Wir definieren zwei neue Funktion

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{2}\big(f(t^+) + f(t^-)\big) \quad \text{und} \quad \widetilde{g}(t) = \frac{1}{2}\big(g(t^+) + g(t^-)\big)\,;$$

dann unterscheiden sich f von $\widetilde{f}$ und g von $\widetilde{g}$ höchstens in den Unstetigkeitsstellen von f *bzw.* g. Insbesondere haben f und $\widetilde{f}$ sowie g und $\widetilde{g}$ dieselben FOURIER-Koeffizienten, also auch $\widetilde{f}$ und $\widetilde{g}$.

Somit erfüllt $\widetilde{f} - \widetilde{g}$ alle Voraussetzungen des gerade bewiesenen Satzes, verschwindet also identisch. Damit ist $\widetilde{f} = \widetilde{g}$; die ursprünglichen Funktionen f und g unterscheiden sich davon höchstens in ihren jeweiligen Unstetigkeitsstellen. ∎

Speziell können wir diesen Satz anwenden auf eine stetige stückweise differenzierbare Funktion f: Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir, daß deren FOURIER-Reihe absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion S_f konvergiert, die dieselben FOURIER-Koeffizienten wie f hat. Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt also

Satz: Die FOURIER-Reihe einer stetigen stückweise differenzierbaren Funktion $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert absolut und gleichmäßig gegen f. ∎

Kombinieren wir dies mit den speziellen Beispielen aus §3, so erhalten wir den folgenden

Hauptsatz: $f \in \mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sei stückweise stetig differenzierbar.
a) Ist f in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig, so konvergiert die FOURIER-Reihe dort gleichmäßig gegen f.
b) In jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die FOURIER-Reihe gegen

$$\frac{1}{2}\big(f(t^+) + f(t^-)\big)\,.$$

c) In jeder Sprungstelle von f tritt das GIBBS-Phänomen auf, d.h. die Teilsummen der FOURIER-Reihe überschwingen die Funktion um einen Betrag, der asymptotisch gleich der Sprunghöhe mal einem Faktor

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}(\pi) - 1\right) \approx 0.089489872$$

ist.

Beweis: Für stetiges f ist *a)* klar nach dem vorigen Satz und sowohl *b)* als auch *c)* sind auch klar, da es keine Sprungstellen gibt, so daß der Wert in *b)* immer gleich $f(t)$ ist.

Für unstetiges f seien $t_1, \ldots, t_r$ die Unstetigkeitsstellen im Intervall $[0, T)$; die Sprunghöhen dort seien

$$a_i \underset{\text{def}}{=} f(t_i^-) - f(t_i^+)\,.$$

Mit der aus §3*c)* bekannten Sägezahnschwingung

$$s(t) = \begin{cases} \frac{T}{4} - \frac{t}{2} & \text{für } 0 < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases} ,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T, ist dann

$$s_i(t) \underset{\text{def}}{=} \frac{2a_i}{T} s(t - t_i)$$

eine weitere stückweise differenzierbare Funktion, die ebenfalls Sprunghöhe a_i an der Stelle t_i hat. Also ist auch

$$\widetilde{f}(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{r} s_j(t)$$

eine stückweise differenzierbare Funktion, die nun aber *keine* Sprungstellen mehr hat; $\widetilde{f}$ ist also stetig und erfüllt daher alle Behauptungen des Satzes.

Für die Funktion s haben wir die drei Behauptungen des Satzes in §3*e)* und *f)* explizit nachgerechnet; da sie unter Verschiebung und Reskalierung invariant sind, gelten sie auch für die Funktionen s_i. Damit gelten sie aber auch für

$$f(t) = \widetilde{f}(t) + \sum_{j=1}^{r} s_j(t) ,$$

wie behauptet. ■

Da praktisch alle Funktionen, deren FOURIER-Reihen man in technischen Anwendungen betrachtet, stückweise differenzierbar sind, wollen wir es für die punktweise Konvergenz bei diesem Satz bewenden lassen; für sonstige stückweise stetige Funktionen wollen wir uns im nächsten Abschnitt mit einer schwächeren Konvergenzaussage begnügen.

f) Der Satz von Parseval

Im Zusammenhang mit der BESSELschen Ungleichung haben wir bereits die HERMITEschen Produkte in $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ miteinander verglichen; jetzt wollen wir sehen, daß sie dieselben Werte liefern. Auch

hierbei arbeiten wir mit Faltungen; wesentliches Hilfsmittel ist der folgende, implizit schon im vorigen Abschnitt verwendete

Satz: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe von $f \star g$ überall gleichmäßig gegen $f \star g$; sind $c_k = \widehat{f}(k)$ und $d_k = \widehat{g}(k)$ die FOURIER-Koeffizienten von f und g, ist also für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$f \star g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{-k \cdot i\omega t} .$$

■

Aus diesem Satz lassen sich sehr einfach Eigenschaften der Faltung ableiten, z.B. gilt

Lemma: *a)* Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f \star g = g \star f$
b) Für $f, g, h \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$

Beweis: Betrachtet man die FOURIER-Reihen, werden die Behauptungen einfach zum Kommutativ- und Assoziativgesetz der Multiplikation komplexer Zahlen. ■

(Man könnte das Lemma natürlich auch direkt durch Integration beweisen.)

Wir wollen den obigen Satz verwenden, um folgende Formel zu beweisen:

Satz von Parseval: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist

$$(f, g) = \left(\widehat{f}, \widehat{g}\right) ,$$

d.h. für die FOURIER-Koeffizienten c_k von f und d_k von g ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} \, dt .$$

Zum *Beweis* brauchen wir eine Funktion, deren FOURIER-Koeffizienten die Zahlen $\overline{d_k}$ sind. Komplexe Konjugation der FOURIER-Reihe zu g

führt zu

$$\overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{k\cdot i\omega t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k e^{k\cdot i\omega t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k} e^{-k\cdot i\omega t} .$$

Ersetzen wir hierin noch t durch $-t$, erhalten wir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k} e^{k\cdot i\omega t}$$

als FOURIER-Reihe von $\widetilde{g}(t) = \overline{g(-t)}$.

Somit ist $f \star \widetilde{g}$ eine Funktion mit FOURIER-Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k} e^{k\cdot i\omega t} .$$

Da die FOURIER-Reihe einer Faltung stets gleichmäßig konvergiert und dieselben FOURIER-Koeffizienten hat wie die Faltung selbst, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz des vorigen Abschnitts, daß diese Reihe in jedem Punkt t gegen $f \star \widetilde{g}(t)$ konvergiert. Speziell für $t = 0$ ist daher einerseits

$$f \star \widetilde{g}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

und andererseits

$$f \star \widetilde{g}(0) = \widetilde{g} \star f(0) = \frac{1}{T} \int_0^T \widetilde{g}(-\tau) f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) \overline{g(\tau)}\, d\tau .$$

Damit ist der Satz bewiesen. ■

Korollar: Sind $c_k = \widehat{f}(k)$ die FOURIER-Koeffizienten von f, so ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt .$$

Gelegentlich wird auch dieses Korollar als Satz von PARSEVAL bezeichnet.

Der französische Mathematiker MARC-ANTOINE PARSEVAL DES CHÊNES (1755–1836) publizierte nur fünf mathematische Arbeiten; die 1799 veröffentlichte zweite davon enthält den hier betrachteten Satz.
Als überzeugter Royalist kam PARSEVAL während der französischen Revolution 1792 ins Gefängnis; später mußte er aus Frankreich fliehen, weil ihn NAPOLEON wegen regimekritischer Gedichte verhaften lassen wollte.

Obiges Korollar liefert oft interessante spezielle Werte unendlicher Reihen: Für den Sägezahn mit Periode 2π etwa ist im Intervall $(0, 2\pi)$

$$s(t) = \frac{\pi - t}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2ki} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

mit

$$c_k = \begin{cases} -\frac{i}{2k} & \text{für } k > 0 \\ 0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{i}{2k} & \text{für } k < 0 \end{cases} .$$

Somit ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} .$$

Außerdem ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \, dt = \frac{1}{8\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{12} .$$

Somit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Der Satz von PARSEVAL liefert auch schnell die im vorigen Abschnitt angekündigte schwächere Konvergenzaussage für beliebige stückweise stetige periodische Funktionen: Mit dem HERMITEschen Produkt in $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ können wir in der üblichen Weise eine Norm

$$\|f\|_{2,T} = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt}$$

definieren und sagen, eine Folge $f_1, f_2, \ldots$ konvergiere in der L^2-Norm gegen f, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{2,T} = 0$$

ist. Dann gilt:

Satz: Für jedes $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe in der L^2-Norm gegen f.

Beweis: Wie wir beim Beweis der BESSELschen Ungleichung gesehen haben, gilt mit $c_k = \widehat{f}(k)$ für die Teilsumme

$$S_N = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t},$$

daß

$$\|f - S_N\|_{2,T}^2 = (f - S_N, f - S_N) = (f, f) - \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 .$$

Nach dem Satz von PARSEVAL geht die rechts stehende Differenz für $N \to \infty$ gegen null, also auch $\|f - S_N\|_{2,T}$. ■

g) Hilbert-Räume

In §2 hatten wir das Problem der harmonischen Analyse verglichen mit dem Problem, einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ bezüglich einer Orthonormalbasis darzustellen; die einfachste Lösung besteht bekanntlich darin, die Skalarprodukte von $\vec{v}$ mit den Basisvektoren $\vec{b}_i$ zu bilden; dann ist

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} (\vec{v}\cdot\vec{b}_k)\,\vec{b}_k .$$

Genauso haben wir nun bei der Berechnung einer komplexen FOURIER-Reihe einer Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Skalarprodukte $c_k = (f, e^{k\cdot i\omega t})$ gebildet für alle ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ und gesehen, daß zumindest für stückweise differenzierbare Funktionen für die in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ die Mittelwertbedingung

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

erfüllt ist,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{k\cdot i\omega t}$$

ist, eine sehr ähnliche Situation also.

Es gibt allerdings einen entscheidenden Unterschied: Im Gegensatz zur endlichen Summe oben haben wir hier eine Summe, in der im allgemeinen unendlich viele der Summanden von Null verschieden sind. Eine solche unendliche Summe kann nur sinnvoll definiert werden, wenn wir einen Konvergenzbegriff haben, wie dies etwa in $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ der Fall ist; über Körpern wie $\mathbb{Q}$ oder auch über endlichen Körpern hätten unendliche Summen überhaupt keine sinnvolle Interpretation.

In der linearen Algebra verlangt man daher aus gutem Grund von einer Basis, daß sich alle Vektoren als *endliche* Linearkombinationen von Basisvektoren darstellen lassen, auch wenn die Basis selbst unendlich sein kann.

Aus diesem Grund bilden die Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ keine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, und sie sind auch keine Basis des Untervektorraums aus allen stückweise differenzierbaren Funktionen mit der Mittelwerteigenschaft: Sie bilden nur eine Basis des sehr viel kleineren Untervektorraums der (komplexen) trigonometrischen Polynome. Die in §3*b)* betrachtete Rechteckschwingung f mit Periode T gehört bereits nicht mehr zu diesem Untervektorraum und ist in der Tat linear unabhängig von den Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$: Andernfalls gäbe es nämlich eine nichttriviale endliche Linearkombination

$$\lambda_0 f(t) + \lambda_1 e^{k_1\cdot i\omega t} + \cdots + \lambda_r e^{k_r\cdot i\omega t} = 0 ,$$

in der λ_0 nicht verschwinden darf, da sonst die $e^{k\cdot i\omega t}$ linear abhängig wären.

Also ist

$$f(t) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} e^{k_1\cdot i\omega t} + \cdots - \frac{\lambda_r}{\lambda_0} e^{k_r\cdot i\omega t} ,$$

und das ist offensichtlich eine FOURIER-Reihe von f. Da wir die FOURIER-Reihe

$$f(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sin(2\ell+1)\omega t}{2\ell+1} = -\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{i}{4\ell+2} e^{(2\ell+1)\cdot i\omega t}$$

bereits kennen, wissen wir aber nach dem Eindeutigkeitssatz, daß das nicht stimmen kann.

Wenn wir die reinen Schwingungen zu einer Basis von $\mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ergänzen wollen, können wir also beispielsweise den Rechteckimpuls als neues Basiselement dazunehmen und, wie man sich leicht überlegt, auch noch den Sägezahn. Tatsächlich muß man noch eine ganze Reihe anderer Funktionen mit hinzunehmen, und bis heute hat es niemand geschafft, eine Basis von $\mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ hinzuschreiben.

Der letzte Satz sollte zumindest diejenigen nicht verwundern, die sich aus dem letzten Semester noch an die dortige Diskussion im Zusammenhang mit der Existenz von Basen erinnern: Wir hatten dies nur für endlichdimensionale Vektorräume bewiesen, da es im unendlichdimensionalen Fall logische Schwierigkeiten gibt: Man muß das absolut nichtkonstruktive Auswahlaxiom benutzen, das zu allem Überfluß auch noch von den restlichen Axiomen der Mengenlehre unabhängig ist, so daß zumindest im Prinzip auch eine Mathematik ohne Auswahlaxiom möglich ist. Dort ist dann nicht beweisbar, daß jeder Vektorraum eine Basis hat – was freilich nicht bedeutet, daß nun beweisbar wäre, daß irgendein Vektorraum *keine* Basis hätte.

Von daher ist zumindest für alle praktischen Zwecke das System der Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$ die beste Annäherung an eine Basis, die man bekommen kann.

Sie ist in vielfacher anderer Hinsicht eine Verallgemeinerung der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$: Beispielsweise besagt der Satz von PARSEVAL, daß wir den Abstand (bezüglich der L_2-Norm) zwischen zwei Funktionen, die beide bezüglich dieser Basis dargestellt sind, genauso ausrechnen können, wie wir das vom EUKLIDischen oder HERMITEschen Abstand her gewohnt sind – nur daß wir es jetzt eben mit einer unendlichen Summe von Quadraten zu tun haben.

Da eine solche Situation in Funktionenräumen alles andere als selten vorkommt und FOURIER-Reihen beileibe nicht die einzigen unendlichen Summen ihrer Art mit praktischer Bedeutung sind, hat die Mathematik

hierfür einen Begriffsapparat nebst zugehörigen Techniken entwickelt, die wir hier in dieser Vorlesung zwar nicht unbedingt brauchen, die aber in manchen Gebieten beispielsweise der Signalverarbeitung oder der optischen Übertragungstechnik eine wichtige Rolle spielen, die Theorie der HILBERTräume:

Definition: Ein EUKLIDischer oder HERMITEscher Vektorraum V heißt HILBERT-Raum, wenn jede CAUCHY-Folge aus V gegen ein Element von V konvergiert.

DAVID HILBERT (1862–1943) wurde in Königsberg geboren, wo er auch zur Schule und zur Universität ging. Er promovierte dort 1885 mit einem Thema aus der Invariantentheorie, habilitierte sich 1886 und bekam 1893 einen Lehrstuhl. 1895 wechselte er an das damalige Zentrum der deutschen wie auch internationalen Mathematik, die Universität Göttingen, wo er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1930 lehrte. Seine Arbeiten umfassen ein riesiges Spektrum aus unter anderem Invariantentheorie, Zahlentheorie, Geometrie, Funktionalanalysis, Logik und Grundlagen der Mathematik sowie auch zur Relativitätstheorie. Er gilt als einer der Väter der modernen Algebra.

Für unsere bislang betrachteten Räume nützt uns der Begriff des HILBERT-Raums leider nichts: Im Falle endlicher Dimension ist jeder EUKLIDische oder HERMITEsche Vektorraum ein HILBERT-Raum, denn wir können den Raum vermöge irgendeiner Orthonormalbasis mit $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{C}^n$ identifizieren und das CAUCHYsche Konvergenzkriterium komponentenweise anwenden. Von den unendlichdimensionalen Vektorräumen $\mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $\mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, die uns in Augenblick interessieren, ist leider keiner ein HILBERT-Raum, denn wie wir schon gesehen haben ist weder $\mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein EUKLIDischer noch $\mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ein HERMITEscher Vektorraum, da es stückweise stetige Funktionen gibt, deren Norm $\sqrt{(f, f)}$ verschwindet, ohne daß f die Nullfunktion wäre.

Dieses Problem wollen wir üblich weitgehend ignorieren; wir bezeichnen einfach für *jeden* $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum V mit einem Produkt, das bis auf die Forderung

$$(f, f) = 0 \Longrightarrow f \equiv 0$$

EUKLIDsch *bzw.* HERMITEsch ist, eine Teilmenge $H \subseteq V$ als HILBERT-*Raumbasis*, wenn es für jedes Element $f \in V$ eine Folge $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus H und eine Folge $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gibt, so daß

$$\delta_n \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i h_i - f$$

für $N \to \infty$ die Eigenschaft hat, daß

$$\lim_{N\to\infty} (\delta_n, \delta_N) = 0$$

ist. Die Grenzwerte sind dabei natürlich bezüglich der L^2-Norm zu verstehen.

In diesem Sinne ist das System der Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$ nach der Diskussion im vorigen Abschnitt eine HILBERT-Raumbasis von $\mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (auch wenn wir das nur für den Untervektorraum der stückweise differenzierbaren Funktionen beweisen haben), und damit ist auch das System der Funktionen $1, \sin k\omega t, \cos \ell\omega t$ eine HILBERT-Raumbasis von $\mathrm{L}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solche HILBERT-Raumbasen sind in dieser Allgemeinheit leider noch nicht sonderlich nützlich für praktische Anwendungen: Will man einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ als Linearkombination von *irgendeiner* Basis $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ darstellen, muß man ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen in n Unbekannten lösen. Für endliches n ist das für große n zwar nicht mehr sehr angenehm, aber doch grundsätzlich möglich und per Computer auch noch für n in der Größenordnung von hundert Tausend durchaus praktikabel.

Wird die Dimension allerdings unendlich, so läßt sich ein System aus unendlich vielen Gleichungen in unendlich vielen Variablen nur in sehr speziellen Fällen wirklich lösen; einer davon ist der, den wir bei der Berechnung des FOURIER-Reihe ausgenutzt haben: Im Falle einer abzählbaren orthogonalen HILBERT-Raumbasis $\left\{\vec{b}_i \;\middle|\; i \in \mathbb{N}\right\}$ ist

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\vec{v}\cdot\vec{b}_i}{\vec{b}_i\cdot\vec{b}_i}$$

leicht berechenbar; noch einfacher wird es, wenn wir von einer orthonormalen HILBERT-Raumbasis ausgehen, da dann alle Nenner eins sind.

Solche orthogonale *bzw.* orthonormale HILBERT-Raumbasen bezeichnet man als *vollständige Orthogonalsysteme* bzw. *vollständige Orthonormalsysteme.*

h) Die Poisson-Formel

Der Konvergenzbeweis für FOURIER-Reihen war sehr abstrakt; in diesem Anschnitt wollen wir sehen, daß die Methoden, die wir dabei kennengelernt haben, auch nützlich sein können bei der Lösung eines praktischen Problems:

Bei bildgebenden Verfahren der Medizintechnik, bei Werkstoffuntersuchungen, Wärmeleitungsproblemen und vielen anderen Anwendungen hat man es oft mit folgendem *Randwertproblem* zu tun: Man kennt eine Funktion am Rand einer Fläche oder eines Volumens und möchte sie auch im (physikalisch oft unzugänglichen) Innern berechnen.

Sofern man keine einschränkenden Annahmen über die Funktion macht, ist dieses Problem natürlich weit von einer eindeutigen Lösbarkeit entfernt; in vielen interessanten Fällen ist es allerdings eindeutig lösbar.

Wir wollen hier nur ein ganz einfaches Beispiel betrachten: eine auf der Kreislinie bekannte Funktion, die ins Kreisinnere hinein fortgesetzt werden soll. Dabei wollen wir verlangen, daß die Funktion überall der *Kontinuitätsgleichung* $\Delta u = 0$ genügt, wie das beispielsweise für elektrische Potentiale in Abwesenheit von Ladungen der Fall ist. Solche Funktionen haben wir bereits in §1 betrachtet und dort als *harmonische* Funktionen bezeichnet; wir wissen, daß sie gerade die Realteile holomorpher Funktionen sind.

Aus §1*d)* wissen wir, daß holomorphe Funktionen nach der CAUCHYschen Integralformel im Innern eines einfach zusammenhängenden Gebiets durch ihre Werte auf der Randkurve bestimmt sind; hier wollen mit Hilfe von FOURIER-Reihen eine entsprechende Formel für harmonische Funktionen finden.

In Polarkoordinaten ausgedrückt ist der LAPLACE-Operator nach **[HM1]**, Kap. 2, §2*g1)* gleich

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}\,;$$