

Nach der dritten binomischen Formel ist $(z^4 + 1)(z^4 - 1) = (z^8 - 1)$, also

$$z^4 + 1 = \frac{z^8 - 1}{z^4 - 1}.$$

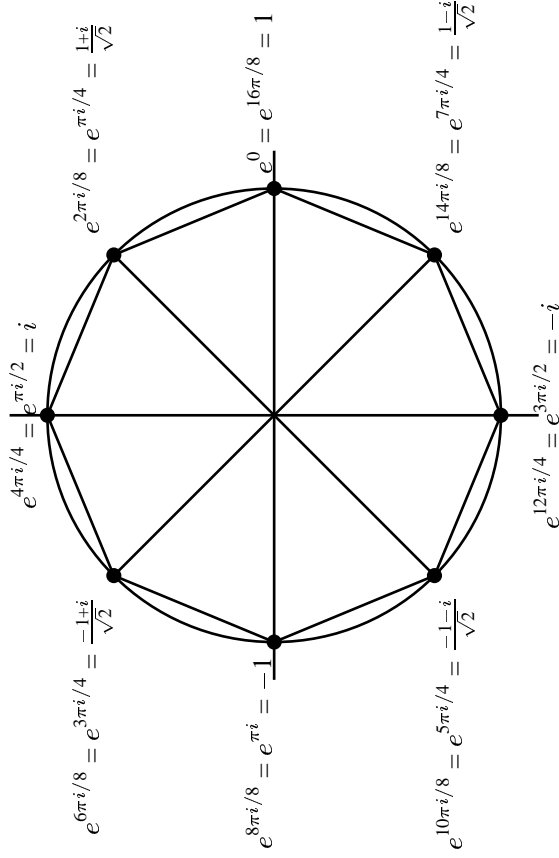
Die Nullstellen des Polynoms $z^8 - 1$ sind jene komplexen Zahlen, deren n -te Potenz gleich Eins ist; man bezeichnet sie als die n -ten Einheitswurzeln. Da ein Polynom vom Grad n über einem Körper höchstens n Nullstellen haben kann, kann es höchstens n von ihnen geben; da für jede natürliche Zahl k

$$(e^{2k\pi i/n})^n = e^{n \cdot 2k\pi i/n} = e^{2k\pi i} = 1$$

ist, gibt es genau die n Einheitswurzeln

$$1 = e^0, \quad e^{2k\pi i/n}, \quad e^{4k\pi i/n}, \quad \dots, \quad e^{(n-1) \cdot 2\pi i/n}.$$

Auf dem Einheitskreis sind sie die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks, was die folgende Zeichnung für den Fall $n = 8$ illustriert:



Ist m ein Teiler von n , so ist jede m -te Einheitswurzel erst recht eine m -ten Einheitswurzel; wir bezeichnen eine m -te Einheitswurzel als *primitiv*, wenn es keinen echten Teiler m von n gibt, für den sie bereits m -te Einheitswurzel ist.

Eine achte Einheitswurzel ist offenbar genau dann primitiv, wenn sie nicht gleichzeitig vierte Einheitswurzel ist; die Nullstellen von $z^4 + 1$ sind also genau die primitiven achten Einheitswurzeln

$$e^{\pi i/4}, \quad e^{3\pi i/4}, \quad e^{5\pi i/4} \quad \text{und} \quad e^{7\pi i/4}.$$

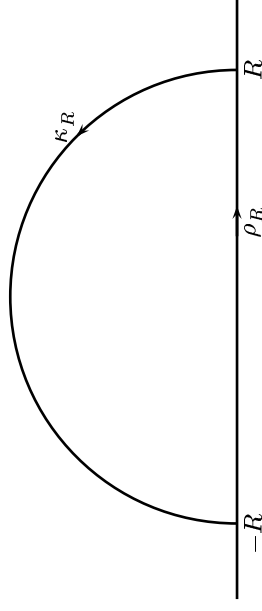
Wir betrachten nun für $R > 1$ einen Integrationsweg γ_R , der zusammengesetzt ist aus dem eigentlich interessierenden reellen Integrationsweg

$$\rho_R: \begin{cases} [-R, R] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto t \end{cases}$$

von $-R$ bis R und einem Halbkreis

$$\kappa_R: \begin{cases} [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto Re^{it} \end{cases}$$

in der oberen Halbebene von \mathbb{C} , der von R im Gegenzeigersinn nach $-R$ führt.



Beides zusammen bildet eine geschlossene Kurve, und Polstellen des Integranden gibt es nur bei den primitiven achten Einheitswurzeln, von denen allerdings nur $e^{\pi i/4}$ und $e^{3\pi i/4}$ im Halbkreis liegen. Nach dem

Residuensatz ist daher für $R > 1$

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = 2\pi i (\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f + \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f).$$

Die Residuen lassen sich wie oben bestimmen, beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{z - e^{\pi i/4}}{z^4 + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{z - e^{\pi i/4}}{(z - e^{\pi i/4})(z + e^{\pi i/4})(z - e^{3\pi i/4})(z + e^{3\pi i/4})} \\ &= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(e^{\pi i/4} - e^{3\pi i/4})(e^{\pi i/4} + e^{3\pi i/4})} \\ &= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(e^{\pi i/2} - 2e^{3\pi i/2})} \\ &= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(i - (-i))} = \frac{e^{-\pi i/4}}{4i} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)}{4i} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}(-1 - i), \end{aligned}$$

und genauso könnte man auch

$$\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f = \frac{\sqrt{2}}{8}(1 - i)$$

berechnen. Einfacher geht es allerdings zumindest in diesem Fall mit der Regel von DE L'HOSPITAL: Danach ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{z - e^{\pi i/4}}{z^4 + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4e^{3\pi i/4}} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f &= \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/4}} \frac{z - e^{3\pi i/4}}{z^4 + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4e^{9\pi i/4}} = \frac{1}{4}e^{-9\pi i/4} = \frac{1}{4}e^{-\pi i/4}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f + \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f = \frac{e^{-3\pi i/4} + e^{-\pi i/4}}{4}.$$

Um dies weiter auszurechnen kann man entweder, in diesem Fall sehr einfach, die Polarkoordinatendarstellungen $e^{-3\pi i/4}$ und $e^{-\pi i/4}$ verwenden, oder aber man versucht, die Summe über die EULERSchen Formeln als trigonometrische Funktion zu interpretieren:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-3\pi i/4} + e^{-\pi i/4}}{4} &= e^{-\pi i/2} \cdot \frac{e^{-\pi i/4} + e^{\pi i/4}}{4} = \frac{2}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{i}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{i\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Damit ist also

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = 2\pi i (\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f + \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f) = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Für alle, die noch nie einen Beweis der DE L'HOSPITALschen Regel gesehen haben, hier zunächst eine einfache Version:

Verschwinden für zwei stetig differenzierbare Funktionen $g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$ für $x_0 \in U$ sowohl $f(x_0)$ als auch $g(x_0)$, nicht aber $g'(x_0)$, so ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Zum Beweis benötigen wir lediglich die Definition der Differenzierbarkeit:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)}{g(x_0) + hg'(x_0) + o(h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0) + o(h)/h}{g'(x_0) + o(h)/h} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt sogar etwas mehr: Wir können die Regel, hinreichend häufige Differenzierbarkeit vorausgesetzt, auch mehrfach anwenden, denn wir haben auch folgende Verschärfung: Verschwinden für zwei stetig differenzierbare Funktionen $g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$ für $x_0 \in U$ sowohl $f(x_0)$ als auch $g(x_0)$, so ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Der Beweis ist im wesentlichen derselbe, allerdings müssen wir etwas genauer rechnen und den *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* anwenden: Danach gibt es zu jedem x reelle Zahlen η_x, ζ_x zwischen x_0 und x , so daß gilt

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(\eta_x) \quad \text{und} \quad g(x) = g(x_0) + (x - x_0)g'(\zeta_x).$$

Daher können wir auch schreiben

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) + (x - x_0)f'(\eta_x)}{g(x_0) + (x - x_0)g'(\zeta_x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)f'(\eta_x)}{(x - x_0)g'(\zeta_x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\eta_x)}{g'(\zeta_x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},\end{aligned}$$

denn $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta_x = \lim_{x \rightarrow x_0} \zeta_x = x_0$.

Was uns wirklich interessiert ist allerdings nicht das Integral über γ_R , sondern das über ρ_R . Wir können es aus dem über γ_R berechnen, wenn wir das Integral über den Halbkreisbogen κ_R kennen. Dieses Integral kennen wir zwar nicht, aber wir wissen, daß es für $R \rightarrow \infty$ gegen Null geht, denn

$$\int_{\kappa_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{R^4 e^{4it} + 1} dt,$$

und der Integrand rechts geht für $R \rightarrow \infty$ überall gegen Null, also auch das Integral über das endliche Intervall $[0, \pi]$. Somit ist

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^4 + 1} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4 + 1} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4 + 1} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\kappa_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.\end{aligned}$$

Ähnlich kann man bei anderen uneigentlichen Integralen vorgehen, vorausgesetzt der Integrand hat keine Polstellen auf der reellen Achse, die Residuen der Polstellen in der oberen Halbebene sind bekannt und für das Integral über den Halbkreisbogen κ_R kann zumindest der Grenzwert für $R \rightarrow \infty$ bestimmt werden.

Letzteres ist zumindest für rationale Integranden kein Problem, falls der Nenner um mindestens zwei größeren Grad als der Zähler hat:

Lemma: Für zwei Polynome $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ und $Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0$ mit $m \geq n + 2$ ist für κ_R

wie oben $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\kappa_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$, und falls Q keine reellen Nullstellen hat ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ gleich $2\pi i$ mal der Summe der Residuen von $\frac{P(z)}{Q(z)}$ an den Polstellen mit positivem Imaginärteil.

Beweis: Wir können argumentieren wie im obigen Beispiel:

$$\begin{aligned}\int_{\kappa_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz &= \int_0^\pi \frac{P(Re^{it})}{Q(e^{it})} \cdot iRe^{it} dt \\ &= i \int_0^\pi \frac{a_n R^{n+1} e^{i(n+1)t} + a_{n-1} R^{n-1} e^{int} + \dots + a_1 R^2 e^{2it} + a_0 R e^{it}}{b_m R^m e^{imt} + b_{m-1} R^{m-1} e^{i(m-1)t} + \dots + b_1 R e^{it} + b_0} dt,\end{aligned}$$

und der Integrand rechts geht für $R \rightarrow \infty$ überall gegen Null, da der Grad $n + 1$ des Zählers kleiner ist als der Grad m des Nenners. Da der Nenner nur endlich viele Nullstellen hat, liegen genau die mit positivem Imaginärteil für hinreichend große R im Innern eines jeden Halbkreises mit Radius R um Null in der oberen Halbebene. ■

Genauso kann man natürlich mit der unteren Halbebene argumentieren; man muß dabei nur beachten, daß der geschlossene Integrationsweg dann *im Uhrzeigersinn* durchlaufen wird, so daß der Wert des Integrals dann $-2\pi i$ mal der Residuensumme ist.

Ob man im konkreten Fall lieber mit der oberen oder der unteren Halbebene arbeitet, wird in erster Linie davon abhängen, wo man die Residuen einfacher bestimmen kann; im Zweifelsfall wird man die Halbebene wählen, in der weniger Polstellen liegen. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die obige Methode nicht anwendbar ist, wenn der Integrand Nullstellen auf der reellen Achse selbst hat, denn wir wissen nicht, wie man ein komplexes Integral berechnet, dessen Integrand auf dem Integrationsweg eine Polstelle hat.

Gelegentlich läßt sich ein reelles Integral auch über eine direkte Substitution in ein komplexes Integral über eine geschlossene Kurve überführen,

beispielsweise kann ein Integral von 0 bis 2π über einen Ausdruck in $\sin t$ und $\cos t$ manchmal direkt als komplexes Integral über eine Kreislinie interpretiert und dann nach dem Residuensatz ausgerechnet werden; wie man solche Substitutionen findet, ist wie üblich Erfahrungssache, auch wenn es dazu einige Faustregeln gibt.

Als ein Beispiel dazu betrachten wir das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

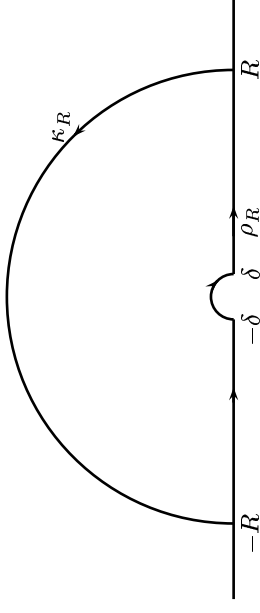
das wir beispielsweise bei der Untersuchung der Konvergenz von FOURIER-Reihen benötigen werden. Es hat auch sonst viele Anwendungen, denn der Integrand, die sogenannte sinc-Funktion spielt in der Elektrotechnik eine große Rolle als, wie wir im entsprechenden Teil der Vorlesung sehen werden, FOURIER-Transformierte eines Rechteckimpulses.

Da wir $\frac{\sin z}{z}$ auf einem Kreis um den Nullpunkt für immer größeren Radius nicht abschätzen können, hat es keinen Sinn, das Integral über einen Halbkreis zu berechnen – ganz abgesehen davon, daß es wegen der Holomorphie des Integranden ohnehin verschwindet.

Wie sich zeigen wird, kommen wir ans Ziel, wenn wir den CAUCHYSchen Hauptwert des etwas allgemeineren Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t} dt$$

für ein reelles $\omega > 0$ berechnen, wobei im Augenblick nur der Fall $\omega = 1$ interessant ist. Dazu betrachten wir, der Philosophie dieses Abschnitts entsprechend, ein komplexes Kurvenintegral über $e^{i\omega z}/z$. Da der Integrand an der Stelle $z = 0$ eine Polstelle hat, können wir allerdings nicht einfach auf der reellen Achse von $-R$ nach R integrieren, sondern müssen den Nullpunkt auf einem kleinen Halbkreisbogen β_δ vom Radius δ umfahren. Diese Umleitung wird im Uhrzeigersinn durchlaufen:



Für $z = x + iy$ hat $e^{i\omega z} = e^{-\omega y} e^{i\omega x}$ Betrag $e^{-\omega y}$. Damit ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\kappa R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} \cdot iRe^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} \cdot iRe^{it} \right| dt \\ &= \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt. \end{aligned}$$

Um die rechte Seite weiter abzuschätzen, wählen wir ein $\eta > 0$ und schreiben

$$\int_0^\pi e^{-R \sin t} dt = \int_0^\eta e^{-R \sin t} dt + \int_\eta^{\pi-\delta} e^{-R \sin t} dt + \int_{\pi-\delta}^\pi e^{-R \sin t} dt.$$

Im ersten und im dritten Integral schätzen wir den Integranden ab durch eins und erhalten somit η als obere Schranke für das Integral; beim mittleren Integral ist der Integrand höchstens gleich $e^{-R \sin \eta}$. Wählen wir nun für ein $\varepsilon > 0$ den Winkel δ so, daß $\eta < \frac{1}{3}\varepsilon$ ist, und wählen wir dazu den Radius R so groß, daß

$$e^{-R \sin \eta} < \frac{\varepsilon}{3\pi}$$

ist, erhalten wir die Abschätzung

$$\left| \int_{\kappa R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq 2\eta + (\pi - 2\eta) e^{-R \sin \eta} < \varepsilon.$$

Somit verschwindet auch hier das Integral längs κ_R für $R \rightarrow \infty$.

Für $R \rightarrow \infty$ verschwindet damit auf Grund des CAUCHYSCHEN Integralsatzes auch

$$\int_{-\infty}^{\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z} dz + \int_{\beta_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z} dz + \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{i\omega z}}{z} dz$$

d.h. der CAUCHYSCHEN Hauptwert des Integrals von $-\infty$ nach ∞ ist gleich

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z} dz,$$

wobei α_δ den im *Gegenuhreigersinn* durchlaufenen Halbkreisbogen β_δ bezeichnet. In der Summenentwicklung

$$\int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z} dz = \int_{\alpha_\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k z^{k-1}}{k!} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k}{k!} \int_{\alpha_\delta} z^{k-1} dz$$

ist das rechtsstehende Integral für $k = 0$

$$\int_{\alpha_\delta} z^{-1} dz = \text{Ln}(\delta) - \text{Ln}(-\delta) = \text{Ln}(-1) = -\pi i$$

unabhängig von δ ; im Falle $k \neq 0$ verschwindet

$$\int_{\alpha_\delta} z^{k-1} dz = \frac{\delta^k - (-\delta)^k}{k}$$

für gerade k und ist gleich $2\delta^k/k$ für ungerade k . Da die geometrische Reihe $2 \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k$ eine konvergente Majorante der Summe aller solcher Terme ist und für $\delta \rightarrow 0$ gegen Null geht, folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t} dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z} dz = \pi i.$$

Vergleich der Imaginärteile zeigt, daß dann für den CAUCHYSCHEN Hauptwert gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt = \pi \quad \text{für alle } \omega > 0.$$

Tatsächlich kann man sich leicht überlegen, daß dies nicht nur der CAUCHYSCHEN Hauptwert ist, sondern daß dieses uneigentliche Integral existiert und somit den Wert π hat.

k) Harmonische Funktionen

Wie wir gesehen haben, ist (stetige) Differenzierbarkeit im Komplexen eine erheblich stärkere Forderung ist als im Reellen. Die vielen schönen Eigenschaften einer holomorphen Funktion sollten ihre Auswirkungen auf deren Real- und Imaginärteil haben, reelle Funktionen, die als Real- oder Imaginärteil einer holomorphen Funktion aufgefaßt werden können, sollten also interessante analytische Eigenschaften haben. Beispielsweise ist eine holomorphe Funktion beliebig oft stetig differenzierbar; also gilt dies auch für ihren Real- und Imaginärteil.

Wenn die zweifach differenzierbare Funktion $u(x, y)$ Realteil einer holomorphen Funktion ist und $v(x, y)$ der zugehörige Imaginärteil, so ist nach den CAUCHY-RIEMANNSSCHEN Differentialgleichungen

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y),$$

also folgt nach dem Lemma von SCHWARZ, daß

$$u_{xx}(x, y) = v_{yx}(x, y) = v_{xy}(x, y) = -u_{yy}(x, y),$$

d.h.

$$\Delta u(xy) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) \equiv 0.$$

Der LAPLACE-Operator, angewandt auf den Realteil einer holomorphen Funktion, liefert also die Nullfunktion.

Die Gleichung $\Delta u = 0$ dürfte den meisten aus der Physik in Erinnerung sein: Ist u ein elektrisches Potential und $\vec{E} = \nabla u$ das zugehörige elektrische Feld, so ist $\Delta u = \text{div } E$, die sogenannte *Kontinuitätsgleichung*

$\Delta u = 0$ besagt somit, daß ∇u ein quellenfreies Feld ist; es gibt also keine Ladungen.

Solche Funktionen spielen nicht nur in der Elektrodynamik eine Rolle, sondern beispielsweise auch bei der Wärmeleitung und einer ganzen Reihe weiterer Anwendungen; sie haben daher einen eigenen Namen verdient (und eine umfangreiche Theorie, die sich mit ihren Eigenschaften beschäftigt).

Definition: Eine Funktion $u \in C^2(D, \mathbb{R})$ heißt *harmonisch* auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn dort überall gilt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Im Zweidimensionalen hängt dies eng mit holomorphen Funktionen zusammen:

Lemma: *a)* Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind harmonisch.

b) Zu jeder harmonischen Funktion $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt es für jeden Punkt $(a, b) \in D$ eine Umgebung U und eine auf U holomorphe Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, so daß u auf U der Realteil von f ist.

Beweis: *a)* Wir haben bereits nachgerechnet, daß der Realteil einer holomorphen Funktion f harmonisch ist; da mit f auch $-if$ holomorph ist und den Imaginärteil von f als Realteil hat, gilt dasselbe für den Imaginärteil.

b) Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} -u_y(x, y) \\ u_x(x, y) \end{pmatrix}$$

auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $U \subseteq D$, die den Punkt (a, b) enthält, z.B. eine Kreisscheibe um (a, b) , die noch ganz in D liegt. Da

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = -u_{yy} - u_{xx} = -\Delta u = 0$$

auf U identisch verschwindet, hat das Vektorfeld \vec{V} nach dem zweidimensionalen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus Kap. II, §6f), eine Stammfunktion; es gibt also eine Funktion $v: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$v_x = V_1 = -u_y \quad \text{und} \quad v_y = V_2 = u_x.$$

Damit erfüllt das Paar (u, v) die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen; und da die Ableitungen der zweimal stetig differenzierbaren Funktion u natürlich stetig ist, ist

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

holomorph auf U mit u als Realteil. ■

Als Beispiel, wie Sätze über holomorphe Funktionen auf harmonische Funktionen zweier Veränderlicher übertragen werden können, sei hier nur die Mittelwertseigenschaft erwähnt:

Satz: $u(x, y)$ sei harmonisch auf einem Gebiet G , das die offene Kreisscheibe D vom Radius r um (x_0, y_0) enthalte. Dann ist

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) dt$$

der Mittelwert der auf der Kreislinie angenommenen Werte.

Beweis: Wie wir bereits wissen, gibt es eine holomorphe Funktion f , die u als Realteil hat. Mit $z = x + iy$ kann die CAUCHYSche Integralformel als eine Mittelwertausgabe für f interpretiert werden: Für den Integrationsweg $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}; t \mapsto z_0 + re^{it}$ ist

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{z - z_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(w + re^{it})}{re^{it}} \cdot ire^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + re^{it}) dt \end{aligned}$$

gleich dem Mittelwert der Funktion $f(z_0 + re^{it})$ über die Kreislinie. Nimmt man auf beiden Seiten den Realteil, folgt die Behauptung. ■

§2: Reelle und komplexe Fourier-Reihen

Wir beginnen mit einem einfachen und anschaulichen Beispiel für den Aufbau einer komplizierten Funktion aus reinen Schwingungen; Ziel des Paragraphen wird sein, eine (fast) *beliebige* periodische Funktion möglichst exakt als Überlagerung solcher Schwingungen darzustellen.

a) Die schwingende Saite

Ein Ton werde erzeugt durch eine schwingende Saite. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß diese ausschließlich senkrecht zu ihrer Ruhelage schwingt und daß ihre Schwingung auf eine feste Ebene begrenzt ist; die Physiker bezeichnen dies als eine transversale linear polarisierte Schwingung. Zumindest in erster Näherung kann man, bei nicht zu extremer Auslenkung der Saiten, einige Musikinstrumente so beschreiben.

Der Zustand der Saite zu einem *festen Zeitpunkt* wird beschrieben durch eine Funktion der Längenkoordinate, die wir wie üblich mit x bezeichnen wollen. Der Wert dieser Funktion an jeder Stelle x ist aber, da die Saite schwingt, auch eine Funktion der Zeit. Wir haben also insgesamt eine Funktion $f(x, t)$ sowohl der Längenkoordinate als auch der Zeit, die angibt, wie weit der Punkt mit Längenkoordinate x zum Zeitpunkt t von seiner Ruhelage entfernt ist. Falls wir annehmen, daß die Schwingung in der (x, y) -Ebene stattfindet, ist $f(x, t)$ also die y -Koordinate des Punktes mit Längenkoordinate x zum Zeitpunkt t . Da wir nur transversale linear polarisierte Schwingungen betrachten, hat dieser Punkt die Koordinaten

$$(x, f(x, t));$$

falls wir auch longitudinale Schwingungen zugelassen hätten, würde auch die x -Koordinate von der Zeit abhängen, und falls wir uns nicht auf linear polarisierte Schwingungen festgelegt hätten, gäbe es noch eine z -Koordinate.

Die Saite ist an beiden Enden fest eingespannt; wir wählen die Koordinaten auf der x -Achse so, daß diese Enden den Werten $x = 0$ und $x = L$ entsprechen, wobei $L \in \mathbb{R}$ die Länge der Saite bezeichnet. Da die Enden

nicht schwingen können, muß notwendigerweise

$$f(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad f(L, t) = 0$$

sein; nur für $0 < x < L$ kann $f(x, t)$ wirklich von t abhängen.

Wie könnte f aussehen? In ihrer Ruhelage ist die Saite eine Strecke; die einfachste Form einer Schwingung könnte darin bestehen, daß diese Strecke durch einen Teil einer Sinuslinie ersetzt wird. Da die Funktion an den Stellen 0 und L verschwinden muß und der Sinus bei allen ganzzahligen Vielfachen von π verschwindet, kommen daher Funktionen der Art

$$f(x, t) = A(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

in Frage, wobei $A(t)$ irgendeine Funktion der Zeit ist und k eine natürliche Zahl. Abbildung zwei zeigt die entsprechenden Funktionen für $k = 1$ bis 4 und $A(t) \equiv 1$.

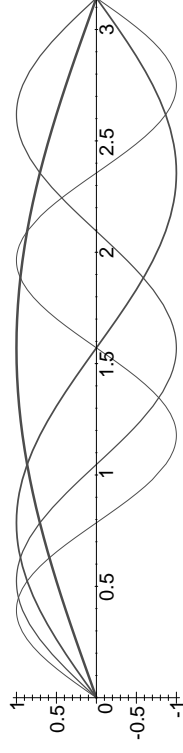


Abb. 2: Eine Schwingung mit Oberschwingungen

Bei einem realen Musikinstrument werden diese Oberschwingungen nicht alle dieselbe Amplitude haben; aus Kapitel I, §1f) etwa ist das Beispiel der *g*-Saite einer Geige bekannt, das hier noch einmal in Abbildung drei dargestellt ist: Die gestrichelte Kurve ist die Grundschwingung mit Amplitude eins, die fett eingezeichnete Kurve die Gesamtschwingung, und die sonstigen Kurven sind die reinen Teilschwingungen mit ihren jeweiligen Amplituden. (Wer selbst solche Kurven konstruieren und auch die dazugehörigen Töne hören möchte, findet ein Java-Applet unter <http://www.gac.edu/~huber/fourier/>)

Offensichtlich spielt die Grundschwingung kaum eine Rolle: Wie man sowohl hier als auch genauer an der Darstellung der Größenverhältnisse

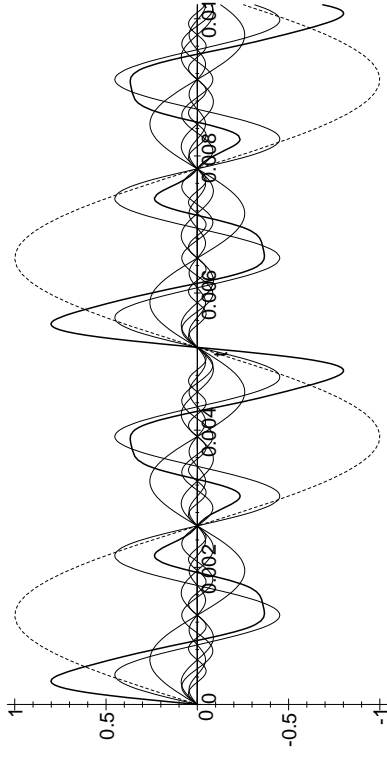


Abb. 3: Ton der g-Saite einer Geige und seine Komponenten

der Koeffizienten in Abbildung vier sieht, sind die Schwingungen mit doppelter und dreifacher Grundfrequenz am stärksten ausgeprägt, d.h. also die Oktave und vor allem die darüberliegende Quinte.

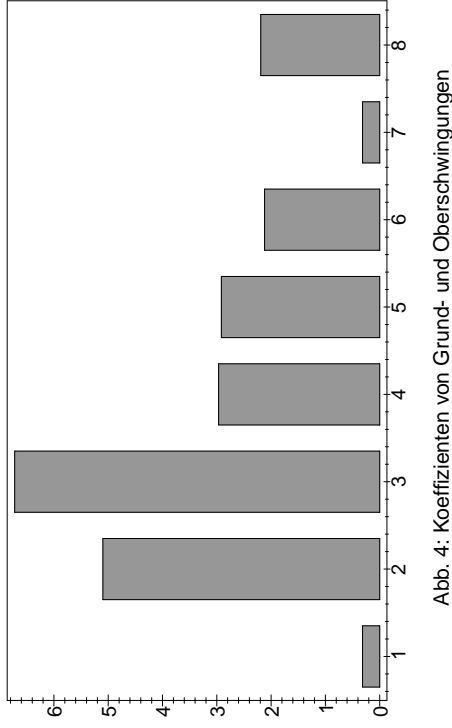


Abb. 4: Koeffizienten von Grund- und Oberschwingungen

Über die zeitabhängige Auslenkungsfunktion $A(t)$ wurde bislang noch

nichts gesagt; da wir periodische Schwingungen erwarten, liegt es nahe, auch hier einen Ansatz mit trigonometrischen Funktionen zu machen. Wenn wir die Zeitachse so festlegen, daß sich die Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhelage befindet, ist der Sinus die geeignete Funktion; wir versuchen es daher für eine reine Schwingung mit einem Ansatz der Form

$$A(t) = a \cdot \sin \omega t,$$

wobei a und ω reelle Konstanten sind, von denen wir zumindest ω als positiv voraussetzen können. Insgesamt erwarten wir somit im einfachsten Fall Funktionen der Form

$$f(x, t) = a \cdot \sin \omega t \cdot \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right).$$

ω und k hängen natürlich voneinander ab: Wie jedermann aus Physik- und Musikunterricht weiß, führt ein doppelt so großer Wert von k zu einer doppelt so hohen Kreisfrequenz ω .

b) Die Differentialgleichung der schwingenden Saite

Wer sich allerdings kurz überlegt, *warum* dem so ist, wird wohl in den meisten Fällen nur auf den „Grund“ kommen, daß dies eben allgemein bekannt sei. Tatsächlich stecken dahinter einige nicht ganz triviale Überlegungen, die man für die Zwecke dieser Vorlesung zwar nicht unbedingt kennen muß, die aber für etwaige Interessenten trotzdem im Kleindruck beigefügt sind:

Da wir alles so einfach wie möglich halten wollen, gehen wir aus von einer Saite mit konstantem Querschnitt und konstanter Massendichte; letztere können wir dann beschreiben durch die Masse pro Längeneinheit, die für konkrete Saiten gemessen wird in Gramm pro Zentimeter oder Milligramm pro Zentimeter. Wir bezeichnen diese (lineare) Massendichte mit σ .

Die zweite wesentliche physikalische Größe für eine schwingende Saite ist deren *Spannung*. Auch hier beschränken wir uns wieder auf das einfachste physikalische Modell, in dem das HOOKEsche Gesetz gilt: Wir betrachten die Saite als eine elastische Feder, die eine natürliche Länge L_0 hat. Da sie aber in ein Musikinstrument eingespannt ist, wurde sie auf eine Länge $L > L_0$ gedehnt; nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt somit eine Rückstellkraft $\lambda L / L_0$, die proportional ist zur Überdehnung L / L_0 mit der Federkonstanten λ als Proportionalitätsfaktor.

In der Ruhelage ist diese Rückstellkraft bedeutungslos: Da die Saite an beiden Enden fest eingespannt ist, kann sie ihre Länge nicht verringern. Anders wird es, wenn die Saite aus der Ruhelage entfernt wird: Dann hat die Federkraft in allen Punkten, an denen die (Tangente der) Saite nicht parallel zur x -Achse ist, auch eine Kraftkomponente in y -Richtung.

Die Lage der ausgelenkten Saite zu einem festen Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion

$$g(x) = f(x, t),$$

die die y -Koordinate des Punkts x angibt.

Betrachten wir das Saitenstück zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$. Im Punkt x_1 habe die Tangente den Winkel α gegenüber der Horizontalen, im Punkt x_2 sei dieser Winkel β . Falls x_1 und x_2 einigermäÙen nahe beieinander liegen, können wir die Saite zwischen x_1 und x_2 in erster Näherung als eine Gerade betrachten. Diese Gerade sei um den Winkel γ gegenüber der Horizontalen geneigt; dann hat das Stück zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$ die Länge

$$\frac{x_2 - x_1}{\cos \gamma},$$

denn der Kosinus eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist gleich Ankathete durch Hypothenuse. Gegenüber ihrer Ruhelage ist die ausgelenkte Saite daher noch um einen weiteren (lokalen) Faktor $1/\cos \gamma$ gestreckt.

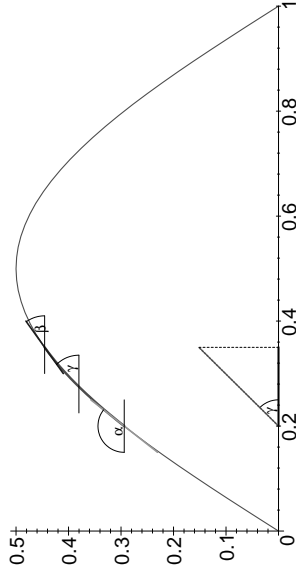


Abb. 5: Eine ausgelenkte Saite

Die Rückstellkraft in Richtung der *ausgelenkten Saite* ist daher gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma},$$

und die Komponente in y -Richtung ist im Punkt x_1 gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot \sin \alpha$$

und im Punkt x_2 entsprechend gleich

$$-\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot \sin \beta.$$

Da α und β bei gängigen Musikinstrumenten ziemlich klein sind, machen wir kein großen Fehler, wenn wir die Näherungsformeln

$$\sin x \approx x \approx \tan x$$

für im Bogenmaß gemessene Winkel x benutzen; demnach können wir also den Sinus in obigen Formeln ohne großen Genauigkeitsverlust durch einen Tangens ersetzen.

Der Tangens des Steigungswinkels der Tangenten des Graphs einer Funktion $y = g(x)$ gegenüber der Horizontalen ist gleich der Ableitung $g'(x)$, die Rückstellkräfte im Anfangs- und im Endpunkt des betrachteten Kurvenstücks sind also näherungsweise gleich

$$-\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot g'(x_1) \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot g'(x_2).$$

Bei einem hinreichend kleinen Saitenstück ist die resultierende Rückstellkraft gleich der Summe dieser beiden Komponenten, also

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot g'(x_2) - \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot g'(x_1) = \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot (g'(x_2) - g'(x_1)).$$

Da wir von sehr kleinen Winkeln γ ausgehen, liegt $\cos \gamma$ sehr nahe bei eins und kann, da wir hier ohnehin nur näherungsweise argumentieren, gleich eins gesetzt werden; die Rückstellkraft ist also näherungsweise gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot (g'(x_2) - g'(x_1)).$$

Diese Kraft bedingt nach dem zweiten NEWTONSchen Gesetz eine Bewegung der Massenpunkte auf der Saite. Ein solcher Massenpunkt mit x -Koordinate x_0 hat eine zeitabhängige Auslenkung

$$h(t) = f(x_0, t),$$

und für die Kraft, die dies bewirkt, gilt nach dem zweiten NEWTONSchen Gesetz

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}.$$

Bei einem hinreichend kleinen Saitenstück können wir die Masse näherungsweise gleich der Masse,

$$m = \sigma \cdot (x_2 - x_1)$$

des gesamten Stück setzen. Die Beschleunigung ist gleich der zweiten Ableitung $\ddot{h}(t)$ der Auslenkung, also gilt insgesamt

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot (g'(x_2) - g'(x_1)) = \sigma \cdot (x_2 - x_1) \cdot \ddot{h}(t)$$

oder

$$\frac{g'(x_2) - g'(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} \ddot{h}(t).$$

Lassen wir nun x_2 und x_1 simultan gegen einen dazwischenliegenden Punkt x gehen, konvergiert die linke Seite gegen $g''(x)$, wir bekommen also die Gleichung

$$g''(x) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} \ddot{h}(t).$$

Damit sind wir fast fertig; wir müssen uns nur noch klarmachen, daß die beiden Funktionen $g(x)$ und $h(t)$ spezielle Werte der Funktion $f(x, t)$ berechnen: Für einen oben festgehaltenen (aber nicht weiter spezifizierten) Zeitpunkt t ist $g(x) = f(x, t)$, und für einen ebenfalls festgehaltenen (aber nicht weiter spezifizierten) Punkt x auf der Saite ist $h(t) = f(x, t)$. Daher ist

$$g''(x) = f_{xx}(x, t) \quad \text{und} \quad \ddot{h}(t) = f_{tt}(x, t),$$

und die Differentialgleichung der schwingenden Saite wird zu

$$f_{xx}(x, t) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} f_{tt}(x, t)$$

oder, wie man meist schreibt,

$$f_{tt}(x, t) = \frac{\lambda L}{\sigma L_0} f_{xx}(x, t).$$

Da es uns auf exakte Zahlenwerte nicht ankommt, wählen wir noch eine Abkürzung für den Bruch; da er positiv ist, können wir ihn als Quadrat schreiben und definieren

$$c^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda L}{\sigma L_0}.$$

Mit dieser neuen Bezeichnung wird die Differentialgleichung der schwingenden Saite zu

$$f_{tt}(x, t) = c^2 f_{xx}(x, t).$$

Sie allein legt $f(x, t)$ bei weitem noch nicht eindeutig fest: Sind φ und ψ irgendwelche zweifach stetig differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen, so überzeugt man sich leicht (Kettenregel), daß

$$f(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

eine Lösung dieser Gleichung ist, die sogenannte D'ALEMBERTSche Lösung. Sie zeigt, daß man die Konstante c interpretieren kann als Schallgeschwindigkeit *innerhalb der Saite*; die beiden Terme beschreiben Erregungen, die sich gegenläufig auf der Saite fortbewegen.

Wir waren oben ausgegangen von speziellen sinusförmigen Lösungen der Form

$$f(x, t) = A(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = a \cdot \sin \omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

und müssen nun sehen, für welche Parameterwerte dies Lösungen sind.

Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f_t(x, t) &= a\omega \cdot \cos \omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \\ f_{tt}(x, t) &= -a\omega^2 \cdot \sin \omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = -\omega^2 f(x, t) \\ f_x(x, t) &= a \cdot \sin \omega t \cdot \left(\frac{k\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \\ f_{xx}(x, t) &= -a \cdot \sin \omega t \cdot \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 f(x, t), \end{aligned}$$

also ist

$$f_{tt}(x, t) = \left(\frac{k\pi}{\omega L}\right)^2 f_{xx}(x, t).$$

Die Differentialgleichung ist somit genau dann erfüllt, wenn

$$c = \frac{k\pi}{\omega L} \quad \text{oder} \quad \omega = k \cdot \frac{\pi}{cL}.$$

Wie diese Rechnung zeigt, wächst zumindest für die hier betrachteten einfachen Schwingungen die Frequenz in der Tat linear mit k , die Frequenzen der Obertöne sind also ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz.

c) Orthogonalitätsrelationen

Wie eingangs erwähnt, wollen wir in diesem Paragraphen (fast) beliebige periodische Funktionen durch Linearkombinationen von reinen Schwingungen beschreiben; bevor wir damit beginnen, müssen wir uns zunächst überlegen, welche Funktionen genau wir betrachten wollen.

Wir dürfen uns auf keinen Fall nur auf stetige Funktionen beschränken; Rechteckimpulse beispielsweise spielen eine sehr wichtige Rolle in der Informationstechnik. Andererseits wollen wir aber nicht soweit gehen, auch Funktionen wie

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{für rationale } t \\ \cos t & \text{für irrationale } t \end{cases}$$

zu betrachten, wir müssen also einen Kompromiss finden.

Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig*, wenn die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f keine

Häufungspunkte hat und wenn für jede Unstetigkeitsstelle t_0 die links- und rechtsseitigen Limes

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$$

existieren.

Damit sind also Rechteckimpulse und allgemeiner alle Funktionen, die bis auf isolierte Sprungstellen stetig sind, stückweise stetig.

Auch periodische Funktionen sollten wir vorsichtshalber zumindest einmal formal definieren:

Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *periodisch* zur Periode T , wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(t+T) = f(t).$$

Ist f periodisch zur Periode T , so offensichtlich auch zur Periode $2T$ oder $-5T$ usw.; falls es einen kleinsten positiven Wert T gibt, zu dem f periodisch ist, bezeichnen wir diesen als *die* Periode von f . In diesem Sinne haben also $\sin t$ und $\cos t$ die Periode 2π , wohingegen konstante Funktionen für jedes $T \in \mathbb{R}$ periodisch zur Periode T sind, so daß wir hier nicht von *der* Periode reden können.

Eine periodische Funktion ist eindeutig bestimmt durch ihre Werte in irgendeinem abgeschlossenen Intervall J der Länge T , denn für jedes $t \in \mathbb{R}$ gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, so daß $t - kT \in J$, und wegen der Periodizität muß $f(t) = f(t - kT)$ sein. Ein solches Intervall der Länge T bezeichnen wir kurz als ein *Periodenintervall*.

Da jede unendliche Menge in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ einen Häufungspunkt hat, kann eine stückweise stetige Funktion in jedem solchen Intervall höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen haben; insbesondere gibt es also bei einer stückweise stetigen periodischen Funktion in jedem Periodenintervall höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen, und durch diese sind *alle* Unstetigkeiten der Funktion festgelegt.

Wir betrachten im folgenden für jede reelle Zahl $T > 0$ die beiden Mengen

$$L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} f \text{ stückweise stetig und} \\ \text{periodisch zur Periode } T \end{array} \right. \right\}$$

und

$$L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \left| \begin{array}{l} f \text{ stückweise stetig und} \\ \text{periodisch zur Periode } T \end{array} \right. \right\}.$$

Da Linearkombinationen periodischer Funktionen zur selben Periode T wieder periodisch mit T sind und die Nullfunktion periodisch ist zu jeder Periode, ist $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein \mathbb{R} -Vektorraum und $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ein \mathbb{C} -Vektorraum.

Da auch das Produkt zweier stückweise stetiger Funktionen stückweise stetig ist, existiert für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das Integral

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt,$$

und das so definierte Produkt hat *fast* alle Eigenschaften eines Skalarprodukts: Symmetrie und Bilinearität sind klar, und da Quadrate in \mathbb{R} stets nichtnegativ sind, ist auch für alle $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$(f, f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt \geq 0.$$

Leider kann aber für eine nur stückweise stetige Funktion $(f, f) = 0$ sein, ohne daß f gleich der Nullfunktion wäre, beispielsweise für

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } t = kT \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit ist $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kein EUKLIDISCHER Vektorraum; das gerade eingeführte Produkt wird uns aber trotzdem im folgenden sehr nützlich sein.

Entsprechend definieren wir auf $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ein Produkt durch

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt;$$

es hat alle Eigenschaften eines HERMITESCHEN Skalarprodukts *außer* der positiven Definitheit.

Fundamental für das weitere ist die folgende Orthogonalitätseigenschaft:

Lemma: Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $k, \ell \in \mathbb{Z}$ ist

$$(e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1 & \text{falls } k = \ell \end{cases}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} T \cdot (e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t}) &= \int_0^T e^{ik\omega t} \overline{e^{i\ell\omega t}} dt = \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-i\ell\omega t} dt \\ &= \int_0^T e^{i(k-\ell)\omega t} dt. \end{aligned}$$

Für $k = \ell$ integrieren wir hier die Konstante eins über ein Intervall der Länge T , das Integral ist also T . Für $k \neq \ell$ hat der Integrand die Stammfunktion

$$\frac{e^{i(k-\ell)\omega t}}{i(k-\ell)},$$

die wegen der Beziehung $\omega T = 2\pi$ periodisch ist mit Periode T ; das Integral verschwindet also. Division durch T liefert die Behauptung. ■

Zerlegen wir die komplexe Exponentialfunktion in Real- und Imaginärteil, erhalten wir die etwas umständlicheren entsprechenden Beziehungen für trigonometrische Funktionen. Da Kosinus eine gerade und Sinus eine ungerade Funktion ist, sind negative k und ℓ uninteressant; wir begnügen uns daher mit

Lemma: Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned} (\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0, \\ 1 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}, \\ (\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases} \quad \text{und} \\ &(\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = 0. \end{aligned}$$

Beweis: Wir verwenden das gerade bewiesene Lemma; danach ist mit dem KRONECKER- δ ausgedrückt

$$\begin{aligned} \delta_{k\ell} &= (e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t}) = (\cos k\omega t + i \sin k\omega t, \cos \ell\omega t + i \sin \ell\omega t) \\ &= (\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) + (\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) \\ &\quad + i(\sin k\omega t, \cos \ell\omega t) - i(\cos k\omega t, \sin \ell\omega t), \end{aligned}$$

also ist

$$(\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) + (\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) = \delta_{k\ell}$$

und

$$(\sin k\omega t, \cos \ell\omega t) - (\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = 0.$$

Diese Gleichungen gelten auch, wenn wir ℓ durch $-\ell$ ersetzen; sie werden dann zu

$$(\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) - (\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) = \delta_{k, -\ell}$$

und

$$(\sin k\omega t, \cos \ell\omega t) + (\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = 0.$$

Addiert bzw. subtrahiert man jeweils zwei der sich nur im Vorzeichen unterscheidenden Gleichungen, folgt, daß für $k, \ell \geq 0$

$$2(\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) = \delta_{k\ell} + \delta_{k, -\ell} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell \\ 1 & \text{für } k = \ell \neq 0 \\ 2 & \text{für } k = \ell = 0 \end{cases}$$

ist und

$$2(\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) = \delta_{k\ell} + \delta_{k, -\ell} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell \\ 1 & \text{für } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{für } k = \ell = 0 \end{cases}$$

außerdem ist

$$(\sin k\omega t, \cos \ell\omega t) = (\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = 0.$$

Damit ist alles bewiesen. ■

Ein Leser, der noch nicht davon überzeugt ist, daß komplexe Zahlen und Funktionen auch im Reellen nützlich sind, sollte versuchen, dies rein reell zu beweisen: er muß also zeigen, daß

$$\int_0^T \cos k\omega t \cos \ell\omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ T/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ T & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}$$

und

$$\int_0^T \sin k\omega t \sin \ell\omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ T/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}$$

ist, sowie

$$\int_0^T \cos k\omega t \sin \ell\omega t dt = 0.$$

Eine ganze Reihe dieser Integrationen sind trivial, und *alle* sind rein reell durchführbar. Dennoch spart der Umweg übers Komplexe viel Zeit.

d) Harmonische Analyse trigonometrischer Polynome

Die Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ bilden natürlich keine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, genauso wenig wie die Funktionen $\cos k\omega t$ und $\sin \ell\omega t$ eine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bilden: Basisdarstellungen sind schließlich stets *endliche* Linearkombinationen, und eine endliche Linearkombination von trigonometrischen oder Exponentialfunktionen ist insbesondere stetig.

Trotzdem ist es ganz nützlich, zur Demonstration der weiteren Vorgehensweise zunächst die Untervektorräume zu betrachten, die von diesen Funktionen erzeugt werden:

Definition: a) Der Vektorraum $P_T(\mathbb{C})$ aller komplexer trigonometrischer Polynome der Periode T ist der von den Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ mit

$k \in \mathbb{Z}$ aufgespannte Untervektorraum von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

b) Der Vektorraum $P_T(\mathbb{R})$ aller reeller trigonometrischer Polynome der Periode T ist der von den Funktionen $\cos k\omega t$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und den Funktionen $\sin \ell\omega t$ mit $\ell \in \mathbb{N}$ aufgespannte Untervektorraum von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Die gerade bewiesenen Orthogonalitätsrelationen können wir dann auch so formulieren, daß die Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis von $P_T(\mathbb{C})$ bilden, während die Funktionen $1, \sqrt{2} \cos k\omega t$ und $\sqrt{2} \sin \ell\omega t$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}$ eine Orthonormalbasis von $P_T(\mathbb{R})$ bilden.

Zumindest für Funktionen aus $P_T(\mathbb{C})$ und $P_T(\mathbb{R})$ ist damit klar, wie man sie in reine Schwingungen zerlegen kann: Ist allgemein V ein EUKLIDISCHER oder HERMITESCHER Vektorraum und \mathcal{B} eine Orthonormalbasis von V , so läßt sich ein beliebiger Vektor $\vec{v} \in V$ gemäß

$$\vec{v} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} (\vec{v}, \vec{b}) \vec{b}$$

als (endliche) Linearkombination der Basisvektoren ausdrücken.

Für $f \in P_T(\mathbb{C})$ ist somit

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{k i \omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = (f(t), e^{k i \omega t}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k i \omega t} dt,$$

und für $f \in P_T(\mathbb{R})$ ist

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t$$

mit

$$c_0 = (f(t), 1) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_k = \sqrt{2} \cdot (f(t), \sqrt{2} \cos k\omega t) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt$$

$$b_\ell = \sqrt{2} \cdot (f(t), \sqrt{2} \sin \ell\omega t) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \ell\omega t dt.$$

Die Summen in diesen Formeln sind natürlich nur formal unendlich; da ein trigonometrisches Polynom nach Definition *endliche* Linearkombination der Basisfunktionen ist, können in jeder dieser Summen höchstens endlich viele Summanden von Null verschieden sein.

Da die Formeln für reelle trigonometrische Polynome deutlich unangenehmer sind als die für komplexe, lohnt es sich oft, auch für reelle Funktionen den Umweg über das Komplexe zu gehen. Das ist immer möglich, denn auf Grund der EULERSchen Beziehungen ist jedes reelle trigonometrische Polynom gleichzeitig ein komplexes:

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^M b_\ell \sin \ell\omega t \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \frac{e^{k\cdot i\omega t} + e^{-k\cdot i\omega t}}{2} + \sum_{\ell=1}^M b_\ell \frac{e^{\ell\cdot i\omega t} - e^{-\ell\cdot i\omega t}}{2i} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{2} e^{k\cdot i\omega t} + \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{2} e^{-k\cdot i\omega t} - i \sum_{\ell=1}^M \frac{b_\ell}{2} e^{\ell\cdot i\omega t} + i \sum_{\ell=1}^M \frac{b_\ell}{2} e^{-\ell\cdot i\omega t} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^N \frac{a_k - ib_k}{2} e^{k\cdot i\omega t} + \sum_{k=1}^N \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-k\cdot i\omega t}. \end{aligned}$$

Schreibt man dies in der üblichen Weise als komplexes trigonometrisches Polynom $\sum c_k e^{k\cdot i\omega t}$, ist also

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{für } k > 0 \\ a_0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

Insbesondere sind c_k und c_{-k} für alle k komplex konjugiert zueinander; c_0 ist reell und somit zu sich selbst konjugiert. Aus obigen Formeln folgt auch, daß umgekehrt

$$a_k = 2 \Re c_k \quad \text{und} \quad b_\ell = -2 \Im c_\ell$$

ist; man kann also leicht zwischen reeller und komplexer Darstellung umrechnen.

Damit ist auch klar, daß $P_T(\mathbb{R}) = P_T(\mathbb{C}) \cap L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist; die reellen trigonometrischen Polynome sind also genau jene komplexe trigonometrische Polynome, die nur reelle Werte annehmen

Gefühlsmäßig würde man trigonometrische Polynome wohl nicht so definieren wie in diesem Abschnitt, sondern als Polynome in $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$. Als kleine Anwendung obiger Überlegung folgt, daß dies in der Tat trigonometrische Polynome im Sinne der hiesigen Definition sind, denn wegen der EULERSchen Formel ist klar, daß es komplexe trigonometrische Polynome sind, und natürlich nehmen sie nur reelle Werte an.

e) Harmonische Analyse periodischer Funktionen

Die Bedingung, daß $f(t)$ als Summe endlich vieler reiner Schwingungen gegeben sein soll, schränkt die Brauchbarkeit obiger Resultate leider erheblich ein: Ein periodischer Rechteckimpuls etwa läßt sich so nicht behandeln.

Wir können aber jedes beliebige Element von $L_T^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Skalarprodukte $c_k = (f, e^{ik\omega t})$ berechnen und hoffen, daß sie für eine harmonische Analyse von f nützlich sind; wir definieren

Definition: Die FOURIER-Transformierte einer Funktion $f \in L_T^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist die Funktion

$$\hat{f}: \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \\ k \mapsto (f, e^{k\cdot i\omega t}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k\cdot i\omega t} dt. \end{cases}$$

(Man beachte, daß diese FOURIER-Transformierte einer *periodischen* Funktion nur auf \mathbb{Z} definiert ist: Periodische Funktionen haben kein kontinuierliches Frequenzspektrum, sondern nur Oberschwingungen zu ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz).



JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830) begann zunächst mit einer Ausbildung zum Priester, beendete diese jedoch nicht, sondern wurde stattdessen Mathematiklehrer. 1793 trat er dem lokalen Revolutionskomitee bei, 1798 begleitete er Napoleon auf dessen Ägyptenfeldzug. Nach dem Rückzug aus Ägypten ernannte ihn dieser zum Präfekten von Isère; dort in Grenoble begann er mit seinen Arbeiten über Wärmeleitung, aus denen die FOURIER-Reihen hervorgingen. Nach Napoleons endgültiger Vertreibung wurde FOURIER 1817 in die Akademie der Wissenschaften gewählt; 1822 wurde er Sekretär der mathematischen Sektion.

Als *komplexe FOURIER-Reihe* von f bezeichnen wir die zunächst nur formale unendliche Summe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-k \cdot i \omega t},$$

als *reelle FOURIER-Reihe* von $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ entsprechend

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} \sin \ell\omega t$$

mit c_0, a_k und b_{ℓ} wie im vorigen Abschnitt.

Natürlich ist im Augenblick weder klar, ob diese Summen überhaupt existieren, d.h. also, ob die angegebenen Reihen für alle (oder zumindest fast alle) $t \in \mathbb{R}$ konvergieren, noch ist klar, ob sie dort, wo sie konvergieren, gegen den Funktionswert $f(t)$ konvergieren.

§ 3: Erste Beispiele von Fourier-Reihen

Bevor wir uns solchen allgemeinen Fragen zuwenden, wollen wir zunächst anhand einiger Beispiele sehen, was wir realistischerweise erwarten können.

a) Rechenregeln

Als erstes wollen wir uns überlegen, wie wir bei der Berechnung von FOURIER-Koeffizienten überflüssigen Rechenaufwand vermeiden können. ■

Das größte Potential für Vereinfachungen bieten *Symmetrien* der Funktionen. Die beiden wichtigsten Symmetrien sind die Eigenschaften, *gerade* oder *ungerade* zu sein: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gerade, wenn $f(-t) = f(t)$ ist für *alle* $t \in \mathbb{R}$; sie ist ungerade, wenn $f(-t) = -f(t)$ ist für *alle* $t \in \mathbb{R}$. Auch Symmetrien bezüglich anderer Punkte als $t = 0$ lassen sich gelegentlich erfolgreich ausnutzen.

A priori läßt sich keine Symmetrie bezüglich $t = 0$ für die Berechnung der hier interessierenden bestimmten Integrale mit Grenzen 0 und T ausnutzen; da wir es hier aber mit periodischen Funktionen zu tun haben, sind wir nicht an diese Integrationsgrenzen gebunden:

Lemma: Ist die Funktion g periodisch mit Periode T , so ist für jedes $\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_0^T g(t) dt = \int_{\tau}^{\tau+T} g(t) dt.$$

Beweis: Wir können τ schreiben als

$$\tau = kT + \tau_0 \quad \text{mit } 0 \leq \tau_0 < T \quad \text{und } k \in \mathbb{Z}.$$

Wegen der Periodizität von f ist

$$\int_{\tau}^{\tau+T} g(t) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} g(t) dt;$$

es reicht also, den Fall $0 \leq \tau < T$ zu betrachten. Hierfür ist

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\tau+T} g(t) dt &= \int_{\tau}^T g(t) dt + \int_T^{\tau+T} g(t) dt = \int_{\tau}^T g(t) dt + \int_0^{\tau} g(t) dt \\ &= \int_0^{\tau} g(t) dt + \int_{\tau}^T g(t) dt = \int_0^T g(t) dt. \end{aligned}$$

Speziell für $\tau = -T/2$ ist also auch

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad \text{und} \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, und

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \ell\omega t dt \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}.$$

Ist nun f eine ungerade Funktion, so sind auch alle Funktionen $f(t) \cos k\omega t$ ungerade, d.h.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0 \quad \text{und} \quad a_k = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f(t) \sin \ell\omega t$ ist Produkt zweier ungerader Funktionen und somit gerade; dies liefert die Beziehung

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt,$$

die je nach der speziellen Form von f entweder nützlich ist oder auch nicht. Auf jeden Fall gibt es aber bei einer ungeraden Funktion in der FOURIER-Reihe keine Kosinusterme (einschließlich des konstanten Terms zu $\cos 0 = 1$); nur Sinusterme können von Null verschiedene Koeffizienten haben.

Für eine gerade Funktion f ist $f(t) \cdot \sin \ell\omega t$ als Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade, d.h.

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \ell\omega t dt = 0$$

für alle ℓ . Somit sind keine Sinusterme möglich; nur Kosinusterme (einschließlich des konstanten Terms) können auftreten. Weiter ist

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt = 2 \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt,$$

was wiederum in Abhängigkeit von der speziellen Gestalt von f entweder nützlich ist oder auch nicht.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun endgültig zu konkreten Beispielen; das erste davon ist gerade in der Digitaltechnik von großer Bedeutung:

b) Periodische Rechteckimpulse

Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \quad \text{mit} \quad f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R};$$

offensichtlich ist $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Außerdem ist f eine ungerade Funktion, d.h. es gibt nur Sinusterme. Für diese ist

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \ell\omega t dt = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} h \sin \ell\omega t dt - \int_{T/2}^T h \sin \ell\omega t dt \right),$$

aber wir können uns die Auswertung des zweiten Integrals sparen, wenn wir uns daran erinnern, daß für eine ungerade Funktion b_ℓ auch berechnet werden kann als $\frac{4}{T}$ mal dem Integral von Null bis zu rhalbem Periode. Somit ist

$$b_\ell = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} h \sin \ell\omega t dt = \frac{4h}{T} \left(-\frac{\cos \ell\omega \frac{T}{2} - 1}{\ell\omega} \right) = \frac{4h}{T} \left(\frac{(-1)^{\ell+1} + 1}{\ell\omega} \right),$$

denn wegen $\omega T = 2\pi$, ist $\omega T/2 = \pi$ und $\cos \ell\pi = (-1)^\ell$. Somit ist

$$b_\ell = \begin{cases} \frac{4h}{T} \cdot \frac{2}{\ell\omega} = \frac{4h}{\pi\ell} & \text{für gerade } \ell \\ 0 & \text{für ungerade } \ell \end{cases}$$

und

$$S_f(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)}.$$

Wir sollten nicht zu optimistisch sein und erwarten, daß diese FOURIER-Reihe in jedem Punkt t gegen $f(t)$ konvergiert: Wir hätten einen Rechteckimpuls mit Periode T im Intervall $[0, T)$ beispielsweise auch durch

$$g(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

definieren können. $f(t)$ und $g(t)$ unterscheiden sich im Intervall $[0, T)$ nur an der Stelle $t = \frac{T}{2}$, was bei der Berechnung der Integrale für die FOURIER-Koeffizienten keine Rolle spielt. Die beiden Funktionen haben daher dieselbe FOURIER-Reihe, und diese kann, selbst wenn sie konvergiert, an der Stelle $t = \frac{T}{2}$ nicht sowohl gegen $f(\frac{T}{2}) = -h$ und $g(\frac{T}{2}) = h$ konvergieren. (Tatsächlich konvergiert sie, da $\omega \frac{T}{2} = \pi$ ist und der Sinus bei allen Vielfachen von π verschwindet, gegen Null, d.h. den Mittelwert der beiden Funktionswerte.)

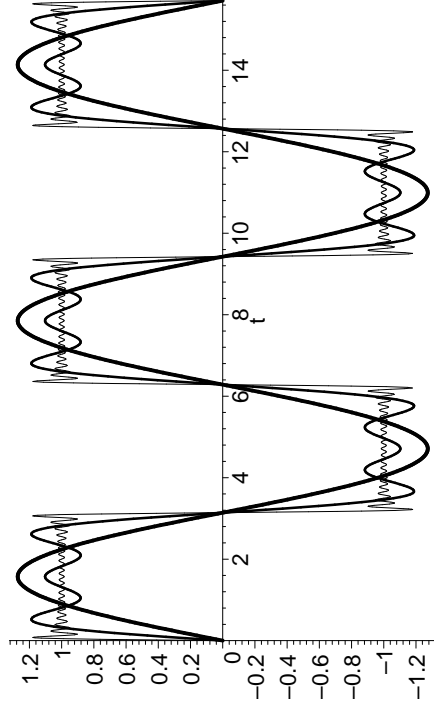


Abb. 6: FOURIER-Polynome für Rechteckimpulse

Experimentell konvergiert die berechnete Reihe abgesehen von den

Sprungstellen anscheinend recht gut: Abbildung sechs zeigt die Teilsommen mit oberen Grenzen 1, 3 und 20, die die Funktion f offensichtlich immer besser annähern. Gerade für die größeren Werte ist dieses Bild natürlich etwas gestört durch numerische Fehler und *alias*-Effekte der Rastergraphik; keine solche Störung sind allerdings die Überschwingungen an den Unstetigkeitsstellen von f : Dieses sogenannte GIBBS-Phänomen ist eine mathematisch unvermeidbare Eigenschaft von FOURIER-Reihen stückweise stetiger Funktionen, mit der wir uns in Kürze näher beschäftigen werden.

Im Augenblick sei nur kurz auf eine Anwendung dieser Überschwingungen hingewiesen: Die Pixel auf einem Computerbildschirm werden durch Rechteckimpulse geschaltet, wobei aus physikalischen Gründen Oberschwingungen hoher Frequenz bei der Übertragung so stark gedämpft werden, daß für alle praktischen Zwecke nur so etwas wie eine endliche Teilsumme der FOURIER-Reihe übertragen wird. Die in Abbildung sechs zu sehenden höherfrequenten Anteile lassen sich mit einem Funkempfänger auffangen und können dann zur Rekonstruktion des Bildschirminhalts verwendet werden; zumindest bei sensitiven Anwendungen muß ein Computer daher so abgeschirmt sein, daß von dieser Strahlung nichts aus dem Gehäuse dringt. Bei einem Standardgehäuse hat man hier nicht die geringste Chance; Computer im Hochsicherheitsbereich brauchen daher ihre eigenen Spezialgehäuse.

c) Sägezahnimpulse

Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \frac{T-t}{4} \quad \text{für } 0 < t < T \quad \text{und} \quad f(0) = 0,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T auf ganz \mathbb{R} .

Dies ist eine ungerade Funktion, denn für $0 < t < T$ ist

$$f(-t) = f(-t+T) = \frac{T}{4} - \frac{(-t+T)}{2} = \frac{t}{2} - \frac{T}{4} = -f(t),$$

und $f(0) = 0$, wie es sich für eine ungerade Funktion gehört. Die FOURIER-Reihe von f enthält daher nur Sinusterme.

Zu deren Berechnung setzen wir wie üblich

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

und erhalten den Koeffizienten von $\sin \ell\omega t$ als

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \ell\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^T \left(\frac{T}{4} - \frac{t}{2} \right) \sin \ell\omega t \, dt \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{4} \int_0^T \sin \ell\omega t \, dt - \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T t \sin \ell\omega t \, dt \\ &= -\frac{1}{T} \int_0^T t \sin \ell\omega t \, dt, \end{aligned}$$

da das Integral einer Sinusfunktion über eine oder mehrere volle Perioden verschwindet. Zur weiteren Rechnung wenden wir die Methode der partiellen Integration an:

$$\int u(t) \cdot \dot{v}(t) \, dt = u(t) \cdot v(t) - \int \dot{u}(t) \cdot v(t) \, dt$$

ergibt für $u(t) = t$ und $\dot{v}(t) = \sin \ell\omega t$ mit $v = -\frac{1}{\ell\omega} \cos \ell\omega t$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \int t \sin \ell\omega t \, dt &= -t \frac{\cos \ell\omega t}{\ell\omega} + \frac{1}{\ell\omega} \int \cos \ell\omega t \, dt \\ &= -t \frac{\cos \ell\omega t}{\ell\omega} + \frac{1}{\ell^2\omega^2} \sin \ell\omega t + C. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} b_\ell &= -\frac{1}{T} \left(\frac{-T \cdot \cos \ell\omega T + 0 \cdot \cos 0}{\ell\omega} + \frac{\sin \ell\omega T - \sin 0}{\ell^2\omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{\ell\omega} \cos(\ell \cdot 2\pi) = \frac{1}{\ell\omega} \end{aligned}$$

und

$$S_f(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}.$$

Wieder haben wir keine Ahnung, ob und gegebenenfalls wohin diese Reihe konvergiert – außer bei den ganzzahligen Vielfachen von $T/2$, denn dort verschwinden alle Sinusfunktionen in den Zählern, so daß die Summe gleich null ist.

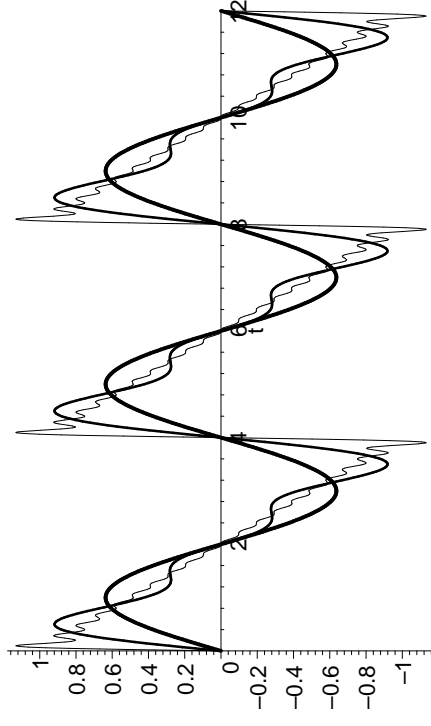


Abb. 7: FOURIERpolynome für die Sägezahnsschwingung

Abbildung 7 zeigt die Teilsummen mit 1, 3 und 20 Summanden für $T = 4$; anscheinend nähern diese die Funktion recht gut an, allerdings gibt es wieder Überschwüngen an den Sprungstellen, denn für $T = 4$ haben wir einen Sägezahn, der zwischen +1 und -1 hin- und herpendelt.

d) Der Sinus hyperbolicus

Als letztes Beispiel berechnen wir die FOURIER-Reihe von

$$f(t) = \sinh t \quad \text{für } -\pi < t \leq \pi, \text{ periodisch fortgesetzt mit Periode } 2\pi.$$

Die Koeffizienten der komplexen FOURIER-Reihe sind

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-k \cdot i\omega t} \, dt.$$

Man darf nun aber keineswegs den Fehler machen, daraus zu folgern, daß

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sinh t e^{-k \cdot i\omega t} dt$$

sei, denn $f(t)$ stimmt *nur* im Intervall $(-\pi, \pi]$ mit $\sinh t$ überein; für $\pi < t \leq 2\pi$ ist $f(t) = \sinh(t - 2\pi)$. Falls wir die mit Fragezeichen versehene Formel benutzen, berechnen wir tatsächlich die FOURIER-Reihe von

$g(t) = \sinh t$ für $0 < t \leq 2\pi$, periodisch fortgesetzt mit Periode 2π , und das ist, wie die Abbildungen acht und neun zeigen, eine völlig andere Funktion: f ist eine ungerade Funktion mit einem Wertebereich, der durch die beiden Extrema $\pm \sinh \pi \approx \pm 11,54873936$ begrenzt ist, g dagegen eine Funktion mit Werten zwischen null und $\sinh 2\pi \approx 267,7448943$, die weder gerade noch ungerade ist.

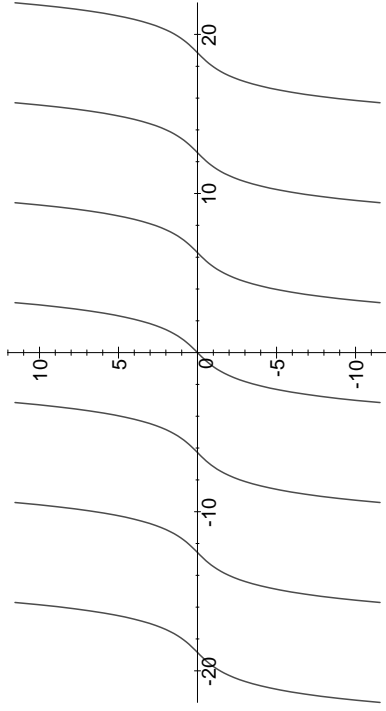


Abb. 8: Die Funktion $f(t)$

Wie groß der Unterschied zwischen den beiden Funktionen wirklich ist, sieht man am besten, wenn man sie wie in Abbildung zehn in einem

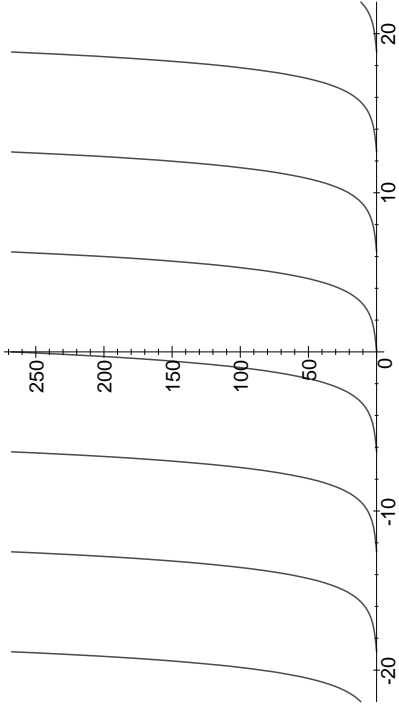


Abb. 9: Die Funktion $g(t)$

gemeinsamen Koordinatensystem abbildet: Die fett gezeichneten Kurvenstücke sind beiden Funktionen gemeinsam, und dort, wo f und g nicht übereinstimmen, ist f durch eine ausgezogene, g durch eine gestrichelte Kurve dargestellt.

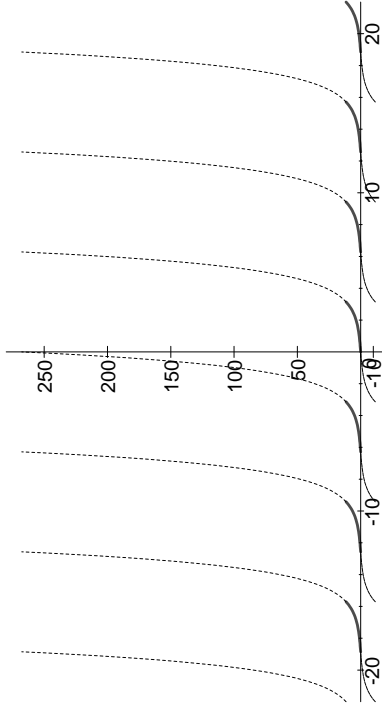


Abb. 10: $f(t)$ und $g(t)$ im gleichen Koordinatensystem

Wenn wir mit einer Integration von 0 bis 2π arbeiten wollen, müssen

wir also das Integral in zwei Teilintegrale aufteilen:

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-k \cdot it} dt = \int_0^{\pi} \sinh t e^{-k \cdot it} dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sinh(t - 2\pi) e^{-k \cdot it} dt$$

Zum Glück wissen wir aber aus §3a), daß wir bei einer periodischen Form über jedes beliebige Periodenintervall integrieren dürfen, ohne etwas am Ergebnis zu verändern: Das wurde dort zwar nur für reelle Integrale gezeigt, aber da ein komplexes Integral auf zwei reelle zurückgeführt werden kann, gilt es auch dafür. Also ist auch

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-k \cdot it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t e^{-k \cdot it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t - e^{-t}}{2} e^{-k \cdot it} dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{t(1-ki)} - e^{-t(1+ki)} \right) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{t(1-ki)}}{1-ki} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{e^{-t(1+ki)}}{-(1+ki)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{\pi} e^{-ki\pi} - e^{-\pi} e^{ki\pi}}{1-ki} + \frac{e^{-\pi} e^{-ki\pi} - e^{\pi} e^{ki\pi}}{1+ki} \right) \\ &= \frac{(-1)^k}{4\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \left(\frac{1}{1-ki} - \frac{1}{1+ki} \right) \\ &= \frac{(-1)^k \sinh \pi}{2\pi} \frac{(1+ki) - (1-ki)}{1+k^2} = \frac{\sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k \cdot ik}{k^2 + 1}. \end{aligned}$$

Die komplexe FOURIER-Reihe ist somit

$$S_f(t) = i \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + 1} e^{ikt}.$$

Da der Koeffizient von e^{ikt} eine ungerade Funktion von k ist, fallen beim Einsetzen von $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$ die Kosinusterme weg, während

sich die Sinusterme zu k und zu $-k$ gegenseitig verdoppeln; wir erhalten also die reelle Form

$$S_f(t) = i \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + 1} i \sin kt = -2 \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + 1} \sin kt,$$

die gleichzeitig die reelle FOURIER-Reihe von f ist.

Bei der direkten Berechnung über die Koeffizientenformeln für die reelle Reihe wären die Vorüberlegungen aus §3a) ebenfalls nützlich gewesen: Da f eine ungerade Funktion ist, treten nur Sinusterme auf, und deren Koeffizienten sind

$$b_\ell = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t dt.$$

Der Integrand hier ist in Exponentialform gleich

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^{i\ell t} - e^{-i\ell t}}{2i} = \frac{4i}{4i} \frac{e^{t(1+i\ell)} e^{t(1-i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)} e^{-t(1+i\ell)}}{4i} + \frac{4i}{4i},$$

und die Stammfunktion des Summanden

$$\frac{e^{\pm t(1+i\ell)}}{4i} \quad \text{ist} \quad \frac{e^{\pm t(1+i\ell)}}{\pm 4i(1+i\ell)}.$$

Die Stammfunktion des Integranden ist daher

$$\begin{aligned} &\frac{e^{t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)} - \frac{e^{t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)} - \frac{e^{-t(1-i\ell)}}{-4i(1-i\ell)} + \frac{e^{-t(1+i\ell)}}{-4i(1+i\ell)} \\ &= \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)} - \frac{e^{t(1-i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d.h.} \quad b_\ell &= \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4\pi i(1+i\ell)} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{e^{t(1-i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)}}{4\pi i(1-i\ell)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(e^{\pi(1+i\ell)} - e^{-\pi(1+i\ell)}) - (e^{-\pi(1+i\ell)} - e^{\pi(1+i\ell)})}{4\pi i(1+i\ell)} \\ &\quad - \frac{(e^{\pi(1-i\ell)} - e^{-\pi(1-i\ell)}) - (e^{-\pi(1-i\ell)} - e^{\pi(1-i\ell)})}{4\pi i(1-i\ell)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^\ell (e^\pi - e^{-\pi} - e^{-\pi} + e^\pi)}{4\pi i(1 + i\ell)} - \frac{(-1)^\ell (e^\pi - e^{-\pi} - e^{-\pi} + e^\pi)}{4\pi i(1 - i\ell)} \\
&= (-1)^\ell \left(\frac{\sinh \pi}{\pi i(1 + i\ell)} - \frac{\sinh \pi}{\pi i(1 - i\ell)} \right) \\
&= (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi i} \left(\frac{1}{1 + i\ell} - \frac{1}{1 - i\ell} \right) \\
&= (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi i} \frac{(1 - i\ell) - (1 + i\ell)}{1 + \ell^2} = (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{-2\ell}{\ell^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Das sind, abgesehen von der anderen Bezeichnung für den Index, genau die oben berechneten Koeffizienten.

Wir können das Integral auch ganz ohne komplexe Zahlen ausrechnen: Zweimalige Anwendung der Regel für partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
b_\ell &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t \, dt = \frac{1}{\pi} \cosh t \sin \ell t \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\ell}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh t \cos \ell t \, dt \\
&= -\frac{\ell}{\pi} \left(\sinh t \cos \ell t \Big|_{-\pi}^{\pi} + \ell \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t \, dt \right) \\
&= -\frac{\ell}{\pi} \left((-1)^\ell \cdot 2 \sinh \pi + \ell \pi b_\ell \right) = -\frac{\ell}{\pi} (-1)^\ell \cdot 2 \sinh \pi - \ell^2 b_\ell.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$(1 + \ell^2) b_\ell = -\frac{2 \sinh \pi}{\pi} (-1)^\ell \ell \quad \text{und} \quad b_\ell = -\frac{2 \sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^\ell \ell}{\ell^2 + 1}.$$

Damit haben wir die FOURIER-Reihe von f auf drei verschiedene Weisen berechnet; das Ergebnis war natürlich in allen drei Fällen dasselbe, der Weg dorthin aber recht verschieden. Es hängt sowohl vom Problem als auch von persönlichen Vorlieben ab, welchen Rechengang man vorzieht; gerade bei Funktionen, bei denen die FOURIER-Reihe sowohl Sinus- als auch Kosinusterme enthält, wird aber oft der Weg über die komplexe FOURIER-Reihe am schnellsten sein, da man dann nur ein Integral berechnen muß.

e) Konvergenz der berechneten Reihen

Als nächstes wollen, zunächst für Sägezahnswingungen, die Konvergenz der FOURIER-Reihe untersuchen. Für $t = 0$ und damit auch für alle Vielfachen von T sind alle Summanden null, die Reihe konvergiert also gegen null.

Für t aus dem offenen Intervall $(0, T)$ können wir folgendermaßen vorgehen: Die Summanden $\frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$ sind Stammfunktionen der Funktionen $\cos \ell \omega t$; also ist

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} \quad \text{Stammfunktion von} \quad \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega t.$$

Auch die Funktion f läßt sich im Intervall $(0, T)$ als Stammfunktion schreiben: Dort ist

$$f(t) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} = \int_{T/2}^t \left(\frac{-1}{2} \right) d\tau,$$

und da auch

$$\int_{T/2}^t \cos \ell \omega \tau \, d\tau = \frac{\sin \ell \omega t - \sin \ell \omega T/2}{\ell \omega} = \frac{\sin \ell \omega t - \sin \ell \pi}{\ell \omega} = \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$$

ist, erhalten wir die Differenz zwischen der N -ten Teilsumme und $f(t)$ als Integral:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) &= \int_{T/2}^t \left(\sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau - \left(\frac{-1}{2} \right) \right) d\tau \\
&= \int_{T/2}^t \left(\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau \right) d\tau.
\end{aligned}$$

Diesen Integranden können wir über die komplexe Darstellung des Kosinus ausrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell\omega\tau &= \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \frac{e^{\ell \cdot i\omega\tau} + e^{-\ell \cdot i\omega\tau}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=-N}^N e^{\ell \cdot i\omega\tau} \\ &= \frac{1}{2} e^{-N \cdot i\omega\tau} \sum_{\ell=0}^{2N} e^{\ell \cdot i\omega\tau} \end{aligned}$$

ist im wesentlichen eine geometrische Reihe, und die läßt sich bekanntlich leicht ausrechnen: Da

$$(1-q) \sum_{j=0}^r q^j = \sum_{j=0}^r q^j - \sum_{j=1}^{r+1} q^j = 1 - q^{r+1}$$

ist, folgt für $q \neq 1$ die Formel

$$\sum_{j=0}^r q^j = \frac{1 - q^{r+1}}{1 - q}.$$

In unserem Fall ist $q = e^{i\omega\tau}$ und somit

$$\sum_{\ell=0}^{2N} e^{\ell \cdot i\omega\tau} = \frac{1 - e^{(2N+1) \cdot i\omega\tau}}{1 - e^{i\omega\tau}}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell\omega\tau &= \frac{1}{2} e^{-N \cdot i\omega\tau} \frac{1 - e^{(2N+1) \cdot i\omega\tau}}{1 - e^{i\omega\tau}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-N \cdot i\omega\tau} - e^{(N+1) \cdot i\omega\tau}}{1 - e^{i\omega\tau}}. \end{aligned}$$

Erweiterung des Bruchs mit $e^{\frac{1}{2} \cdot i\omega\tau}$ führt auf die symmetrischere Form

$$\frac{1}{2} \frac{e^{-(N+\frac{1}{2}) \cdot i\omega\tau} - e^{(N+\frac{1}{2}) \cdot i\omega\tau}}{e^{-\frac{1}{2} \cdot i\omega\tau} - e^{\frac{1}{2} \cdot i\omega\tau}} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2}) \omega\tau}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}}.$$

Damit ist

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) = \int_{T/2}^t \frac{\sin(N + \frac{1}{2}) \omega\tau}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}} d\tau.$$

Die FOURIER-Reihe konvergiert genau dann im Punkt t gegen $f(t)$, wenn dieses Integral für $N \rightarrow \infty$ gegen null geht.

Die Suche nach einer Stammfunktion sieht ziemlich hoffnungslos aus; trotzdem hilft partielle Integration zu einem besseren Verständnis des Integrals. Wir wenden die Regel an mit

$$u(\tau) = \frac{1}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}} \quad \text{und} \quad \dot{v}(\tau) = \sin\left(N + \frac{1}{2}\right) \omega\tau,$$

d.h.

$$v(\tau) = -\frac{\cos(N + \frac{1}{2}) \omega\tau}{(N + \frac{1}{2}) \omega};$$

das Integral wird zu

$$-\frac{\cos(N + \frac{1}{2}) \omega t}{(2N + 1) \omega \sin \frac{\omega t}{2}} + \int_{T/2}^t \frac{\cos(N + \frac{1}{2}) \omega\tau}{(N + \frac{1}{2}) \omega} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}} \right) d\tau,$$

denn an der unteren Grenze ist

$$\cos\left(N + \frac{1}{2}\right) \omega \frac{T}{2} = \cos\left(N + \frac{1}{2}\right) \pi = 0.$$

Auf das noch verbleibende Integral wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung in seiner allgemeinen Form an:

Für eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion v und eine in $[a, b]$ integrierbare Funktion w gibt es einen Wert $\zeta \in [a, b]$, so daß gilt

$$\int_a^b v(\tau) w(\tau) d\tau = v(\zeta) \int_a^b w(\tau) d\tau.$$

Für alle, die den Satz nicht in dieser Form kennen, sei der Beweis kurz nachgetragen: Als stetige Funktion nimmt v im Intervall $[a, b]$ sowohl seinen Maximalwert v_{\max} als auch seinen Minimalwert v_{\min} an. Der Wert des linksstehenden Integrals liegt dann zwischen

$$v_{\min} \int_a^b w(\tau) d\tau \quad \text{und} \quad v_{\max} \int_a^b w(\tau) d\tau,$$

es gibt also einen Wert $v_0 \in [v_{\min}, v_{\max}]$, so daß

$$\int_a^b v(\tau)w(\tau) d\tau = v_0 \int_a^b w(\tau) d\tau$$

ist. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt v als stetige Funktion diesen Wert v_0 irgendwo an, es gibt also ein $\zeta \in [a, b]$, so daß $v(\zeta) = v_0$ ist. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Hier setzen wir

$$v(\tau) = \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\tau}{(N + \frac{1}{2})\omega} \quad \text{und} \quad w(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}} \right);$$

wir erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{T/2}^t \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\tau}{(N + \frac{1}{2})\omega} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}} \right) d\tau \\ &= \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\zeta}{(2N + 1)\omega} \int_{T/2}^t \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sin\frac{\omega\tau}{2}} \right) d\tau \\ &= \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\zeta}{(2N + 1)\omega} \left(\frac{1}{\sin\frac{\omega\zeta}{2}} - 1 \right), \end{aligned}$$

denn $\sin \frac{\omega T}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Also ist

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) \\ &= -\frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega t}{(2N + 1)\omega \sin\frac{\omega t}{2}} + \frac{\cos(N + \frac{1}{2})\omega\zeta}{(2N + 1)\omega} \left(\frac{1}{\sin\frac{\omega\zeta}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Für $0 < t < T$ ist $1/\sin\frac{\omega t}{2} \geq 1$, also

$$0 \leq \frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}} - 1 < \frac{1}{\sin\frac{\omega t}{2}},$$

und da der Kosinus nur Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt, folgt, daß

$$\left| \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) \right| \leq \frac{2}{(2N + 1)\omega \sin\frac{\omega t}{2}}$$

für alle t mit $0 < t < T$.

Für $N \rightarrow \infty$ geht die rechte Seite gegen null, also ist

$$S_f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} = f(t)$$

für alle t mit $0 < t < T$. Für $t = 0$ stehen links und rechts Nullen, so daß die Gleichung auch dort gilt, und da beide Seiten periodisch sind mit Periode T , gilt sie tatsächlich für alle $t \in \mathbb{R}$.

Auf abgeschlossenen Teilintervallen von $(0, T)$ ist die Konvergenz sogar gleichmäßig, denn im Intervall $[\varepsilon, T - \varepsilon]$ ist $\sin\frac{\omega t}{2} \geq \sin\frac{\omega\varepsilon}{2}$, d.h.

$$\left| \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) \right| \leq \frac{2}{(2N + 1)\omega \sin\frac{\omega\varepsilon}{2}}$$

für alle $t \in [\varepsilon, T - \varepsilon]$.

Mit diesem Resultat können wir nun auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe für Rechteckimpulse genauer untersuchen:

Für $0 < t < \frac{T}{2}$ liegt auch $\frac{T}{2} - t$ im Intervall $(0, T)$, d.h. mit der gerade betrachteten Funktion f für Sägezahnimpulse ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{t}{2} = \frac{T}{4}.$$

Für $\frac{T}{2} < t < T$ liegt $\frac{T}{2} - t$ im Intervall $(-T, 0)$, d.h. $\frac{3T}{2} - t$ liegt in $(0, T)$ und

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = f(t) + f\left(\frac{3T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{t}{2} = -\frac{T}{4}.$$

Für $t = 0$ sowie auch für $t = \frac{T}{2}$ ist $f(t) + f(\frac{T}{2} - t) = 0$, insgesamt ist also

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}, \end{cases}$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T . Somit beschreibt $f(t) + f(\frac{T}{2} - t)$ einen Rechteckimpuls.

Da $S_f(t) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right)$$

und

$$\begin{aligned} S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega \left(\frac{T}{2} - t\right)}{\ell \omega} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{\ell \omega T}{2} - \ell \omega t\right)}{\ell \omega} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(\ell \pi - \ell \omega t)}{\ell \omega}. \end{aligned}$$

Für gerades ℓ ist

$$\sin(\ell \pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$$

und für ungerades ℓ ist

$$\sin(\ell \pi - x) = \sin(\pi - x) = -\sin(x - \pi) = \sin x,$$

denn bei Verschiebung um π wird der $\sin x$ zu $-\sin x$. Damit folgt

$$S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$$

und

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}.$$

Für endliche Teilsummen heben sich bei dieser Addition einfach die Terme mit geraden Indizes weg, während die mit ungeradem Index

verdoppelt werden, d.h.

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} + \sum_{\ell=1}^N (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} = 2 \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega}.$$

Durch Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ folgt

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega},$$

d.h.

$$2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega} = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Multiplikation beider Seiten mit $4h/T$ führt wegen

$$\frac{8h}{T\omega} = \frac{8h}{2\pi} = \frac{4h}{\pi}$$

zur Formel

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)} = \begin{cases} h & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Damit ist also auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe der Rechteckschwingung geklärt. Als kleine Anwendung können wir den Wert $t = \frac{T}{4}$ einsetzen; für diesen ist

$$\sin(2\ell - 1)\omega \frac{T}{4} = \sin(2\ell - 1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{\ell+1},$$

d.h.

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell - 1)} = h$$

und somit

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell - 1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}.$$

f) Das Gibbs-Phänomen

Wie in den Abbildungen sechs und sieben zu sehen ist, zeigen zumindest die dort dargestellten FOURIER-Polynome Überschwüngen an den Sprungstellen. Wir wollen uns davon überzeugen, daß diese auch bei FOURIER-Polynome mit beliebig vielen Summanden nicht verschwinden.

Beginnen wir mit den Rechteckschwüngen! Wir versuchen zunächst, die Summe

$$S_N(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)}$$

in etwas kompakterer Form darzustellen. Wegen

$$\frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)\omega} = \int_0^t \cos(2\ell - 1)\omega\tau \, d\tau$$

ist

$$\frac{S_N(t)}{\omega} = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^N \int_0^t \cos(2\ell - 1)\omega\tau \, d\tau = \frac{4h}{\pi} \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \cos(2\ell - 1)\omega\tau \, d\tau,$$

und diesen letzten Integranden können wir über seine komplexe Darstellung ausrechnen. Um den Nenner zwei zu eliminieren, berechnen wir den zweifachen Wert

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\ell=1}^N \cos(2\ell - 1)\omega\tau &= \sum_{\ell=1}^N (e^{(2\ell-1)i\omega\tau} + e^{-(2\ell-1)i\omega\tau}) \\ &= \sum_{\ell=-(N-1)}^{N-1} e^{(2\ell-1)i\omega\tau} = e^{(-2N+1)i\omega\tau} \sum_{\ell=0}^{2N-1} e^{2\ell i\omega\tau}. \end{aligned}$$

Letztere Summe ist eine geometrische Reihe mit Quotient $e^{2i\omega\tau}$; nach der Summenformel hat sie den Wert

$$\frac{1 - e^{4N i\omega\tau}}{1 - e^{2i\omega\tau}}.$$

Die gesuchte Summe ist also

$$\begin{aligned} e^{-2N i\omega\tau} \frac{1 - e^{4N i\omega\tau}}{1 - e^{2i\omega\tau}} &= \frac{e^{-2N i\omega\tau} (1 - e^{4N i\omega\tau})}{e^{-i\omega\tau} (1 - e^{2i\omega\tau})} \\ &= \frac{e^{-2N i\omega\tau} - e^{2N i\omega\tau}}{e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}} = \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau} \end{aligned}$$

und

$$S_N = \frac{2h\omega}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau} \, d\tau.$$

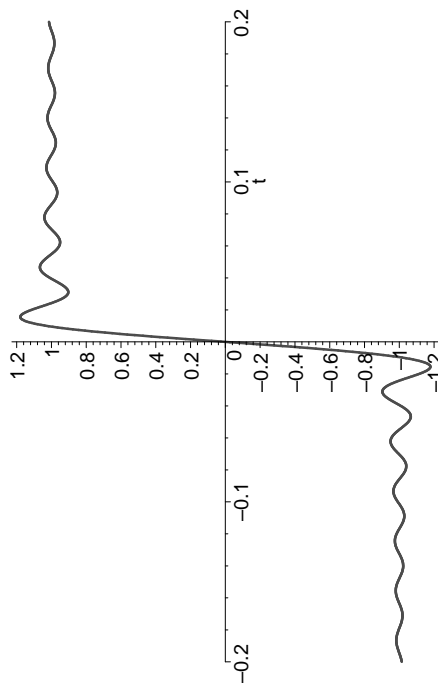


Abb. 11: Das Gibbsphänomen in Großaufnahme

Als nächstes suchen wir nach dem Betrag der Überschwüngen. Abbildung elf zeigt diese in Großaufnahme für $S_{100}(t)$; wir wollen das Maximum unmittelbar nach der Sprungstelle bestimmen und das Integral dort auswerten.

Im Maximum verschwindet die Ableitung des Integrals, also der Integrand

$$\frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau}.$$

Bei der ersten positiven Nullstelle t_N ist $2N\omega t_N = \pi$ die erste positive Nullstelle des Sinus, d.h.

$$t_N = \frac{\pi}{2N\omega}.$$

Insbesondere rückt t_0 mit wachsendem N immer näher zur Null; je größer N wird, desto enger lokalisiert wird die Überschwingung.

Mit der Substitution $u = 2N\omega\tau$ wird

$$S_N(t_N) = \frac{2h\omega}{\pi} \int_0^{t_N} \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau} d\tau = \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2N \sin \frac{u}{2N}} du.$$

Für große Werte von N ist das Argument des Sinus im Nenner des Integranden sehr klein; wir machen also keinen großen Fehler, wenn wir den Sinus durch sein Argument annähern, und für $N \rightarrow \infty$ geht der Fehler gegen Null. Somit ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2N \cdot \frac{u}{2N}} du = \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

Die Stammfunktion von $\frac{\sin u}{u}$ ist nicht in geschlossener Form durch trigonometrische Funktionen, Logarithmen, Exponentialfunktionen und ähnliches ausdrückbar, sie ist aber sehr wichtig und hat daher einen eigenen Namen:

Definition: Die Funktion

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$$

heißt *Integralsinus* oder *sinus integralis*.

Der Integralsinus existiert für beliebige reelle Argumente t , denn die Nullstelle des Integranden bei $u = 0$ ist harmlos, da

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

ist. Wie Abbildung zwölf zeigt, konvergiert er für $t \rightarrow \pm\infty$ relativ schnell gegen einen konstanten Wert, den wir nach den Vorbereitungen

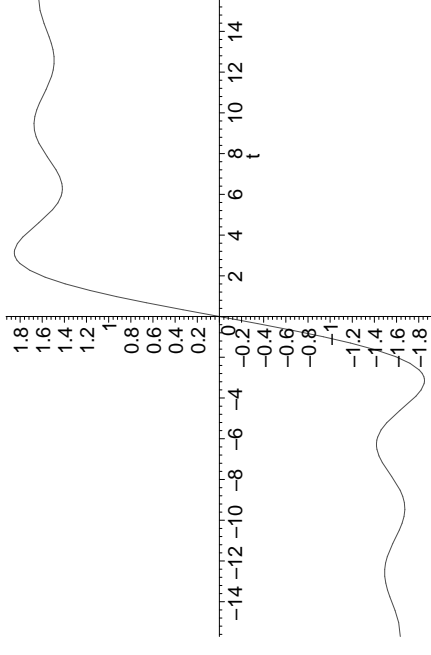


Abb. 12: Der Integralsinus

aus §1j) leicht bestimmen können: Wir wir dort mit Hilfe des Residuensatzes gesehen haben, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \pi;$$

da der Integrand gerade ist, ist das Integral von Null bis unendlich die Hälfte davon, also $\pi/2$.

Der uns interessierende Wert des Integralsinus an der Stelle π läßt sich nicht in einfacher Weise durch bekannte Konstanten ausdrücken und muß daher numerisch berechnet werden; man erhält

$$\text{Si}(\pi) \approx 1,8519305198 \quad \text{und} \quad \frac{2h}{\pi} \text{Si}(\pi) \approx 1,1789797445 \cdot h.$$

Die FOURIER-Polynome überschwingen also auch für $N \rightarrow \infty$ den Funktionswert noch um knapp 18%.

Ersetzen wir die Funktion f durch $f + c$ für irgendeine Konstante c , ändert sich nur der konstante Term der FOURIER-Reihe; das GIBBS-Phänomen bleibt auch in seiner Größe unverändert. Verändert wird dagegen der Funktionswert; es ist daher besser, die Überschwingung

auf die unverändert gebliebene Sprunghöhe zu beziehen. Wir sollten daher besser sagen, daß die Überschwungung knapp neun Prozent der Sprunghöhe ausmacht.

Auch beim Sägezahn können wir die Überschwungung explizit berechnen: Aus Abschnitt e) wissen wir bereits, daß hier

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) = \int_{T/2}^t \frac{\sin(N + \frac{1}{2}) \omega \tau}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} d\tau$$

ist. Auch die Ableitung dieser Funktion ist wieder der Integrand; für ihre erste positive Nullstelle t_N ist

$$\left(N + \frac{1}{2}\right) \omega t_N = \pi, \text{ d.h. } t_N = \frac{\pi}{\left(N + \frac{1}{2}\right) \omega} = \frac{T}{2N + 1}.$$

Mit der Substitution $u = \left(N + \frac{1}{2}\right) \omega \tau$ wird

$$\int_{T/2}^{t_N} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right) \omega \tau}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} d\tau = \int_{(N + \frac{1}{2})\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{(2N + 1)\omega \sin \frac{u}{2N + 1}} du.$$

Wieder können wir den Sinus im Nenner für große N durch sein Argument ersetzen und erhalten somit als Limes für $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{(N + \frac{1}{2})\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{\omega u} du &= \frac{1}{\omega} \left(\text{Si}(\pi) - \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Si}(t) \right) = \frac{\text{Si}(\pi) - \frac{\pi}{2}}{\omega} \\ &= \frac{T}{2\pi} \text{Si}(\pi) - \frac{T}{4}. \end{aligned}$$

Dabei ist $T/4$ der Wert, der überschungen wird, der Maximalwert des FOURIER-Polynoms geht also für $N \rightarrow \infty$ gegen $\frac{T}{2\pi} \text{Si}(\pi)$. Dividiert man dies durch $\frac{T}{4}$, ergibt sich wieder der Quotient

$$\frac{T}{2\pi} \text{Si}(\pi) \cdot \frac{4}{T} = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi),$$

auch hier gibt es also wieder eine Überschwungung um knapp 18% des Funktionswerts oder knapp neun Prozent der Sprunghöhe.

Dies ist kein Zufall: Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, tritt an *jeder* Unstetigkeitsstelle einer Funktion das GIBBS-Phänomen ein, wonach die FOURIER-Polynome den Sprung um knapp neun Prozent überschwingen.



JOSIAH WILLARD GIBBS (1839–1903) promovierte 1863 an der amerikanischen Yale-Universität mit einer Arbeit über Zahnradgetriebe; die erste amerikanische Dissertation auf dem Gebiet des Ingenieurwesens. Danach unterrichtete er in Yale Latein und Naturphilosophie, bis er 1866 nach Europa fuhr, wo er 1868/1869 in Heidelberg bei KIRCHHOFF und HELMHOLTZ studierte. 1871 wurde er in Yale Professor für mathematische Physik, 1873 publizierte er seine erste Arbeit, die sich, wie viele spätere, mit Thermodynamik befaßte. Sehr einflußreich waren auch seine Arbeiten zur elektromagnetischen Theorie des Lichts und zur Vektoranalysis.

g) Die Besselsche Ungleichung

In einem EUKLIDISCHEN oder HERMITESCHEN Vektorraum V mit (HERMITESCHEM) Skalarprodukt (\cdot, \cdot) gilt für jede Orthonormalbasis \mathcal{B} , daß für zwei Vektoren

$$\vec{v} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \vec{b} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \mu_{\vec{b}} \vec{b}$$

das Skalarprodukt berechnet werden kann als

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \mu_{\vec{b}},$$

wobei wegen der Basisseigenschaft von \mathcal{B} natürlich wieder alle Summen endlich sind, auch wenn die Basis \mathcal{B} unendlich sein sollte. Insbesondere ist

$$(\vec{v}, \vec{v}) = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \lambda_{\vec{b}} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} |\lambda_{\vec{b}}|^2.$$

Für trigonometrische Polynome

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{k \cdot i \omega t} \in \mathbf{P}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$