WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

24. März 2005

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $f(z) = \sin(\Im m\, z)$ ist holomorph.

Lösung: *Falsch,* denn da $f(z)$ nur reelle Werte annimmt und nur vom Imaginärteil seines Arguments abhängt, können die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen unmöglich erfüllt sein: Ist $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = \sin y$, so ist $v(x,y) \equiv 0$, also $v_x \equiv 0$ verschieden von $-u_y = -\cos y$.

2) Was ist $\int_\gamma z^2\,dz$ für $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = it$?

Lösung: Der Integrand ist holomorph mit Stammfunktion $F(z) = \frac{1}{3}z^3$ auf ganz $\mathbb{C}$, d.h.

$$\int_\gamma z\,dz = F\big(\gamma(2\pi)\big) - F\big(\gamma(0)\big) = F(2\pi i) - F(0) = \tfrac{1}{3}(2\pi i)^3 = -\frac{8\pi^3}{3}i\,.$$

3) Richtig oder falsch: Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} j-i+1 & \text{für } j > i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist diagonalisierbar.

Lösung: *Falsch:* A ist eine Dreiecksmatrix mit lauter Nullen in der Hauptdiagonalen; einziger Eigenwert ist also die Null. Dieser hat aber nur geometrische Vielfachheit eins, denn nur die Vielfachen des ersten Einheitsvektors liegen im Eigenraum.

4) Bestimmen Sie die FOURIER-Reihe von $f(t) = \sin^4 t + \cos^4 t$!

Lösung:

$$\begin{aligned}\sin^4 t + \cos^4 t &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^4 + \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{-4it}}{16} + \frac{e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{-4it}}{16} \\ &= \frac{e^{4it} + 6 + e^{-4it}}{8} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4t\,.\end{aligned}$$

5) Richtig oder falsch: Falls die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist, kann das Differentialgleichungssystem $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ keine nichtkonstante periodische Lösung haben.

Lösung: *Richtig,* denn eine symmetrische reelle Matrix ist diagonalisierbar, und alle ihre Eigenwerte sind reell; periodische Lösungen aber gehören zu rein imaginären Eigenwerten.

6) Richtig oder falsch: Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 2\sqrt{y(t)}$ mit $y(0) = 1$ ist eindeutig lösbar.

Lösung: *Richtig:* Die rechte Seite $f(y,t) = 2\sqrt{y}$ hat als partielle Ableitung nach y die Funktion $1/\sqrt{y}$, die in jedem abgeschlossenen Intervall um $y = 1$, das den Nullpunkt nicht enthält, beschränkt ist. Somit ist die Lösung nach dem Satz von PICARD-LINDELÖF eindeutig. (Die Lösung ist $y(t) = (t+1)^2$, aber danach war nicht gefragt.)

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Für reelles $a > 0$ sei $f_a(z) = \dfrac{2a}{z^2 + a^2}$ und $g_a(z) = \dfrac{2z}{z^2 + a^2}$.

a) Berechnen Sie die Residuen von f_a und g_a an den Polstellen!

Lösung: Pole haben beide Funktionen genau an den Stellen $z = \pm ia$, die Ordnung ist jeweils eins. Das Residuum kann man entweder durch Partialbruchzerlegung berechnen oder, wegen der Ordnung eins, als Grenzwert:

$$\operatorname{Res}_{z=\pm ia} f_a(z) = \lim_{z\to\pm ia} (z \mp ia) f_a(z) = \lim_{z\to\pm ia} \frac{2a(z\mp ia)}{z^2+a^2} = \lim_{z\to\pm ia} \frac{2a}{z\pm ia} = \frac{2a}{\pm 2ia} = \mp i$$
$$\operatorname{Res}_{z=\pm ia} g_a(z) = \lim_{z\to\pm ia} (z \mp ia) g_a(z) = \lim_{z\to\pm ia} \frac{2z(z\mp ia)}{z^2+a^2} = \lim_{z\to\pm ia} \frac{2z}{z\pm ia} = \frac{\pm 2ia}{\pm 2ia} = 1$$

b) Berechnen Sie, falls existent, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_a(x)\,dx$ und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_a(x)\,dx$!

Lösung: Da im Falle von f_a der Integrand rational ist und der Zählergrad um zwei kleiner ist als der Nennergrad, kann das Integral mit Hilfe des Residuensatzes ausgerechnet werden: Für reelles $R > a$ sei der Integrationsweg γ_R der Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also

$$\gamma_R\colon [0, \pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto Re^{it}.$$

δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.

Im Falle von f_a ist $z = ia$ der einzige Pol von $f_a(z)$ im von δ_R berandeten Halbkreis; somit ist

$$\int\limits_{\delta_R} f_a(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} f_a(z) = 2\pi i \cdot (-i) = 2\pi.$$

Dies ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn für $R \to \infty$ verschwindet das Integral über γ_R, da der Zählergrad um zwei kleiner ist als der Nennergrad, und das Integral von $-R$ bis R konvergiert gegen das Integral von $-\infty$ bis ∞.

Für g_a können wir nicht so argumentieren, da hier der Zählergrad nur um *eins* kleiner ist als der Nennergrad; dies reicht nicht, um das Verschwinden des Integrals über γ_R für $R \to \infty$ zu zeigen.

Hier ist aber offensichtlich der Nenner gleich der Ableitung des Zählers, also ist der Logarithmus $G_a(z) = \ln(x^2 + a^2)$ des Nenners eine Stammfunktion des Integranden. Für $S < 0 < T$ ist somit

$$\int\limits_S^T g_a(z)\,dz = G_a(T) - G_a(S) = \ln(T^2 + a^2) - \ln(S^2 + a^2) = \ln \frac{T^2 + a^2}{S^2 + a^2}.$$

Läßt man hier $S \to -\infty$ und $T \to \infty$ gehen derart, daß $|S/T| = c$ konstant bleibt, konvergiert dies gegen c^2; das Integral von $-\infty$ bis ∞ über g_a existiert also nicht.

c) *Ditto* für die Limites $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f_a(x)\,dx$ und $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} g_a(x)\,dx$!

Lösung: Im Falle von f_a, wo das Integral von $-\infty$ bis ∞ existiert, ist das natürlich gerade gleich dessen Wert 2π. Für g_a erhalten wir Null, da der Integrand eine ungerade Funktion ist. (Alternativ könnte man auch die Formel aus *b)* benutzen.)

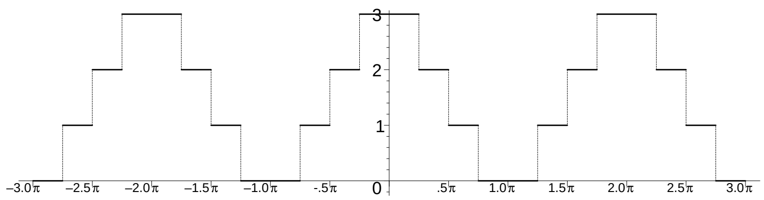
Aufgabe 2: *(7 Punkte)*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode 2π, und für $|t| \le \pi$ sei

$$f(t) = \begin{cases} 3 & \text{für } |t| \le \pi/4 \\ 2 & \text{für } \pi/4 < |t| \le \pi/2 \\ 1 & \text{für } \pi/2 < |t| \le 3\pi/4 \\ 0 & \text{für } 3\pi/4 < |t| \le \pi \end{cases} .$$

a) Skizzieren Sie die Funktion f über dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$!

Lösung:



b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

Lösung: f ist gerade.

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !
(Hinweis: Zeigen Sie, daß für gerade k *gilt:* $\sin k\pi/4 + \sin 3k\pi/4 = 0$ *!)*

Lösung: Da f eine gerade Funktion ist, gibt es keine Sinusterme.
Der konstante Term ist das Periodenmittel, das man hier auch ohne Integration ausrechnen kann als $c_0 = \frac{1}{4}(3+2+1+0) = \frac{3}{2}$.
Der Koeffizienten a_k von $\cos kt$ für $k \ge 1$ ist, da f eine gerade Funktion ist,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\,dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(t) \cos kt\,dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int\limits_{0}^{\pi/4} 3 \cos kt\,dt + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} 2 \cos kt\,dt + \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos kt\,dt \right) \\ & \frac{2}{k\pi} \Big(3\big(\sin(k\pi/4) - \sin 0\big) + 2\big(\sin(k\pi/2) - \sin(k\pi/4)\big) + \big(\sin(3k\pi/4) - \sin(k\pi/2)\big) \Big) \\ &= \frac{2}{k\pi} \Big(\sin(k\pi/4) + \sin(k\pi/2) + \sin(3k\pi/4) \Big) . \end{aligned}$$

Für gerades $k = 2\ell$ ist $\sin(k\pi/2) = \sin \ell\pi = 0$ und

$$\sin(3k\pi/4) = \sin(3\ell\pi/2) = \sin(\ell\pi/2 + \ell\pi) = (-1)^\ell \sin(\ell\pi/2) = (-1)^\ell \sin(k\pi/4)$$

verschwindet für gerades ℓ, während für ungerades ℓ die beiden Terme $\sin(3k\pi/4)$ und $\sin(k\pi/4)$ entgegengesetzt gleich sind, so daß zumindest ihre Summe verschwindet. Somit ist $a_k = 0$ für gerade k.
Für ungerade $k = 2\ell + 1$ ist $\sin k\pi/2 = \sin \frac{2\ell+1}{2}\pi = \sin(\ell\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^\ell$. Argumente der Form $k\pi/4$ mit ungeradem k kommen in jeder Periode viermal vor; wie die Wertetabelle am Ende der Klausur zusammen mit der Formel $\sin(\pi + x) = -\sin(\pi - x)$ zeigt, sind die entsprechenden Werte für $\sin(k\pi/4)$ gleich $\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ für $k \equiv 1, 3, 5, 7 \bmod 8$, d.h. $\ell \equiv 0, 1, 2, 3 \bmod 4$.

Da $3\cdot 1 \equiv 3 \bmod 8$, $3\cdot 3 \equiv 1 \bmod 8$ $3\cdot 5 \equiv 7 \bmod 8$ und $3\cdot 7 \equiv 5 \bmod 8$, ist für ungerades k $\sin 3k\pi/4 = \sin k\pi/4$ und somit

$$\sin k\pi/4 + \sin 3k\pi/4 = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{falls } \ell \equiv 0,1 \bmod 4 \\ -\sqrt{2} & \text{falls } \ell \equiv 2,3 \bmod 4 \end{cases} .$$

Insgesamt haben wir also $a_k = 0$ für gerade k, während für ungerade $k = 2\ell + 1$ gilt

$$a_k = (-1)^\ell + \begin{cases} \sqrt{2} & \text{falls } \ell \equiv 0,1 \bmod 4 \\ -\sqrt{2} & \text{falls } \ell \equiv 2,3 \bmod 4 \end{cases} .$$

Die gesuchte FOURIER-Reihe ist damit

$$S_f(t) = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{2\ell+1} \frac{\cos(2\ell+1)t}{(2\ell+1)\pi} .$$

d) Wo tritt bei der Konvergenz dieser FOURIER-Reihe das GIBBS-Phänomen auf, und wohin konvergiert die Reihe an diesen Punkten?

Lösung: Genau an den Unstetigkeitsstellen, also den ganzzahligen Vielfachen von $\pi/4$ mit Ausnahme der ganzzahligen Vielfachen von 2π. Die Reihe konvergiert dort gegen den Mittelwert aus links- und rechtsseitigen Grenzwert, also gegen $2\frac{1}{2}$ für $t = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, gegen $1\frac{1}{2}$ für $t = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ und gegen $\frac{1}{2}$ für $t = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$, wobei k jeweils eine ganze Zahl bezeichnet.

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Funktion $g(t) = \begin{cases} 3 & \text{für } |t| \le \pi/4 \\ 2 & \text{für } \pi/4 < |t| \le \pi/2 \\ 1 & \text{für } \pi/2 < |t| \le 3\pi/4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und geben Sie diese in rein reeller Form an!

Lösung: Da die Funktion sehr ähnlich zu der aus der vorigen Aufgabe ist, empfiehlt es sich, das FOURIER-Integral auf dem Umweg über trigonometrische Funktionen zu berechnen:

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cos\omega t\,dt + i\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\sin\omega t\,dt ,$$

wobei das zweite Integral verschwindet, da g eine gerade Funktion ist. Somit ist

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\omega) &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos\omega t\,dt = 2\int_0^{\pi} g(t)\cos\omega t\,dt = 2\left(\int_0^{\pi/4} 3\cos\omega t\,dt + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\cos\omega t\,dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos\omega t\,dt\right) \\
&= 2\left(\frac{3\sin\omega t}{\omega}\bigg|_0^{\pi/4} + \frac{2\sin\omega t}{\omega}\bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} + \frac{\sin\omega t}{\omega}\bigg|_{\pi/2}^{3\pi/4}\right) \\
&= \frac{2}{\omega}\big(3\sin\omega\pi/4 + (2\sin\omega\pi/2 - 2\sin\omega\pi/4) + (\sin 3\omega\pi/4 - \sin\omega\pi/2)\big) \\
&= \frac{2\sin\omega\pi/4 + 2\sin\omega\pi/2 + 2\sin 3\omega\pi/4}{\omega} .
\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie: Die Faltung $g(t) * \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-2k\pi)$ ist gleich der Funktion f aus Aufgabe 2!

Lösung: Faltung mit $\delta(t-2k\pi)$ verschiebt das Argument um $2k\pi$; da $g(t)$ außerhalb des Intervalls $[-\pi,\pi]$ der Länge 2π identisch verschwindet, ist die Summe aller dieser

Faltungen einfach die periodische Fortsetzung von g auf diesem Intervall mit Periode 2π, also f.

c) Existiert die FOURIER-Transformierte dieser Faltung als L^2-Funktion?

Lösung: *Nein,* denn schon $\widehat{f}(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ divergiert.

Aufgabe 4: *(9 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Das charakteristische Polynom von A ist

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((3-\lambda)(-\lambda)+2\big)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)\,,$$

denn $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ hat, wie man entweder nach VIÈTE oder nach einer Lösungsformel für quadratische Gleichungen leicht nachrechnet, die Nullstellen $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$. Somit hat A die Eigenwerte $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit zwei und $\lambda = 2$ mit algebraischer und damit auch geometrischer Vielfachheit eins.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert eins werden von der Matrix

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

annuliert; da diese Matrix Rang zwei hat, ist der Lösungsraum nur eindimensional und wird offensichtlich aufgespannt vom ersten Einheitsvektor des $\mathbb{R}^3$. Insbesondere ist damit die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts nur eins.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert eins werden von der Matrix

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

annuliert; wie deren zweite und dritte Zeile zeigen, muß die zweite Komponente eines jeden Lösungsvektors gleich dem negativen Doppelten des ersten sein. Setzt man dieses ein in die erste Zeile, folgt daß die erste Komponente das $-8+3=-5$-fache der dritten Komponente sein muß; der Eigenraum wird also aufgespannt vom Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein,* denn die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts eins ist nur eins, während sein algebraische Vielfachheit zwei ist.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt?

Lösung: Um eine Basis zu finden, bezüglich derer die Matrix Dreiecksgestalt hat, brauchen wir noch einen Hauptvektor zweiter Stufe zu λ_1. Da

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ist, kommt dafür beispielsweise der Vektor mit Komponenten $0, 1, -1$ in Frage. Dies liefert eine Basis aus Eigen- und Hauptvektoren bestehend aus

$$\vec{v}_1 = \vec{b}_1, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Um die Dreiecksgestalt von A bezüglich dieser Basis zu berechnen, müssen wir noch wissen, wohin der Vektor $\vec{v}_2$ abgebildet wird und wie sich der Bildvektor in der Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ darstellen läßt:

$$A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 .$$

Da die Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und$\vec{v}_3$ einfach mit dem zugehörigen Eigenwert multipliziert werden, ist die Dreiecksgestalt bezüglich der Basis $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ somit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

Lösung: Wir schreiben $\Delta = D + N$ mit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Da N den zweiten Basisvektor auf den ersten abbildet und diesen wiederum auf den Nullvektor, ist N^2 die Nullmatrix, und nach der allgemeinen Theorie kommutieren N und D, d.h.

$$e^{\Delta t} = e^{Dt+Nt} = e^{Dt}e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} (E + Nt)$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} .$$

Um zu sehen, wie diese Matrix bezüglich der Standardbasis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ aussieht, brauchen wir die Inverse zur Matrix B des Basiswechsels; letztere hat die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ als Spalten. Der GAUSS-Algorithmus beginnt mit

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} .$$

Addition der zweiten Zeile zur dritten ergibt links eine obere Dreiecksmatrix:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} .$$

Subtrahieren wir nun noch fünfmal die dritte Zeile von der ersten und zweimal die dritte Zeile von der zweiten, steht links die Einheitsmatrix und rechts die Matrix B^{-1}:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \quad & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\,.$$

Somit ist $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und

$$e^{At} = B^{-1}e^{\Delta t}B = \begin{pmatrix} e^t & 5e^{2t} - (5+t)e^t & 5e^{2t} - (5+2t)e^t \\ 0 & 2e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - 2e^t \\ 0 & e^t - e^{2t} & 2e^t - e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: (*5 Punkte*)

a) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = y(t) - x(t), \quad \dot{y}(t) = z(t) - y(t), \quad \dot{z}(t) = -z(t) \quad \text{mit} \quad x(0) = y(0) = z(0) = 1\,!$$

Lösung: Da dies ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten ist, gibt es nur die eine Lösung $e^{At}\vec{y}_0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A ist bereits eine Dreiecksmatrix, und da alle Einträge in der Hauptdiagonale gleich sind, ist klar, daß in der Zerlegung

$$A = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die beiden Matrizen D und N miteinander kommutieren, d.h. $e^{At} = e^{Dt}e^{NT}$.

Die Matrix N gehört zur linearen Abbildung, die den zweiten Basisvektor auf den ersten, den dritten auf den zweiten und den ersten auf den Nullvektor abbildet; ihr Quadrat bildet also den dritten Basisvektor auf den ersten ab und die beiden anderen auf den Nullvektor, und ab N^3 verschwinden alle Potenzen von N. Somit ist

$$e^Nt = E + Nt + \tfrac{1}{2}N^2tr = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und da $e^{Dt} = e^{-Et}$ einfach die Diagonalmatrix mit lauter Einträgen e^{-t} ist, folgt

$$e^{At} = e^{-t} \cdot e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Lösung ist somit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{At}\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} (1 + t + \frac{1}{2}t^2)e^{-t} \\ (1+t)e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

b) Wir verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Lösung: Da e^{-t} schneller gegen Null geht als ein Polynom gegen Unendlich gehen kann, nähert sich die Lösung asymptotisch dem Nullvektor.

c) Sind diese Lösungen stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Lösung: *Ja,* denn alle nichtverschwindenden Einträge der Matrix e^{At} gehen für $t \to \infty$ gegen Null, so daß jede Störung weggedämpft wird.

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 5y(t) = 1 - 5t$!

Lösung: Die homogene Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 5y(t) = 0$$

hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$. Quadratische Ergänzung macht daraus

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = (\lambda + 2)^2 + 1 = 0\,,$$

die Nullstellen sind also $\lambda_{1/2} = -2 \pm i$ und die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist somit $y(t) = e^{-2t}(a\cos t + b\sin t) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$.

Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, reicht es, eine einzige Lösung zu finden, denn die Differenz zweier Lösungen erfüllt die homogene Gleichung.

Erfahrungsgemäß findet man bei Gleichungen dieser Bauart oft eine spezielle Lösung, die von ähnlicher Bauart ist wie die rechte Seite der Gleichung; wir können als unser Glück versuchen mit einem Ansatz der Form $x(t) = ct + d$. Dann ist $\ddot{x}(t) = 0$ und $\dot{x}(t) = c$, die Differentialgleichung führt also auf die Gleichung

$$4c + 5ct + 5d = 1 - 5t \quad \text{oder} \quad c = -1 \quad \text{und} \quad 4c + 5d = 1\,,$$

d.h. $d = 1$. Die spezielle Lösung ist also $x(t) = 1 - t$, und damit ist die gesuchte allgemeine Lösung

$$x(t) = 1 - t + e^{-2t}(a\cos t + b\sin t) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Lösung: Da e^{-2t} gegen Null geht, konvergieren alle Lösungen gegen die spezielle Lösung $x(t) = 1 - t$; sie wachsen also allesamt unbeschränkt gegen $-\infty$.