Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

30. März 2005

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Menge M aller Vektoren aus $\mathbb{F}_2^5$, deren Komponenten die Summe Null haben, ist ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum.

2) *Richtig oder falsch:* Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei $A^2 = E$ die Einheitsmatrix. Dann ist $A = E$ oder $A = -E$.

3) In der 10×10-Matrix A sei $a_{ij} = ij$. Was ist $\det A$?

4) *Richtig oder falsch:* Betrachtet man $\mathbb{C}$ als reellen Vektorraum, so definiert die komplexe Konjugation eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

5) Finden Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \\ 5i \end{pmatrix}$ aufgespannten Unterraums von $\mathbb{C}^3$!

6) Die reelle Zahl a sei positiv. Was ist $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{x^2}$?

7) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades von $f(x, y) = e^{xy}$ um $(0, 0)$!

8) Was ist $\iint\limits_K \cos x \, dx \, dy$ für $K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \le \frac{\pi}{2}, |y| \le 1 \right\}$?

Aufgabe 1: **(***9 Punkte***)**
M sei die Menge aller Funktionen der Form $f(x) = ae^{3x} + be^{2x} + ce^x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, und V sei der von M in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ erzeugte Untervektorraum.

a) Ist $V = M$, d.h. ist M bereits ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

b) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V !

c) Zeigen Sie: $\varphi_\lambda \colon \begin{cases} V \to V \\ f(x) \mapsto f''(x) + \lambda f(x) \end{cases}$ ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung.

d) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist φ_λ injektiv, für welche surjektiv?

e) Welche Dimensionen haben Kern φ_λ und Bild φ_λ in den Fällen, in denen φ_λ nicht injektiv ist?

f) Welche Abbildungsmatrix hat $\psi \colon \begin{cases} V \to V \\ f \mapsto e^{-x} f'(x) + f(x) \end{cases}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$?

g) Ist diese Abbildungsmatrix invertierbar?

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + \quad ay + \qquad z &= 5 && (1)\\ x + (a+1)y + (2-a)z &= 7 && (2)\\ ay + (a-1)z &= 3a+1 && (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 4: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$!

b) Gegeben seien hundert Paare von Meßgrößen (t_i, x_i), zwischen denen ein Zusammenhang der Form $x_i = a\cos t_i + b\sin t_i$ vermutet wird. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf zur Berechnung jener Koeffizienten a, b, mit denen diese Beziehung im Sinne der kleinsten Quadrate am besten gilt!

Aufgabe 5: (*6 Punkte*)

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sin xy + xe^y + (x+y)^2 \end{cases} !$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{y}{x^2+1} \\ \dfrac{x}{y^2+1} \end{pmatrix} \end{cases} !$$

$\mathcal{H}\ \mathcal{I}\ \mathcal{L}\ \mathcal{F}\ \mathcal{S}\ \mathcal{M}\ \mathcal{I}\ \mathcal{T}\ \mathcal{T}\ \mathcal{E}\ \mathcal{L}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.
Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 30. März 2005, um 10^{15} Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •