Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, C201

12. Februar 2005

Scheinklausur Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $f(z) = \dfrac{z}{4 - z\overline{z}}$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 2$ holomorph.

2) Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \frac{4z^3 + 9z^2 + 4z + 1}{z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 4321}\,dz$ für den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreis!

3) Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6}{x^4 + 1}\,dx$?

4) *Richtig oder falsch:* Ist A eine invertierbare Hermitesche Matrix, so ist auch die inverse Matrix A^{-1} Hermitesch.

5) Der vierte Einheitsvektor sei Hauptvektor vierter Stufe der Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ zum Eigenwert i. Was ist $\det A$?

6) Welche Nullstellen hat das Polynom $f(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4$?

7) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 5 \arctan y(t)$ mit $y(e) = \pi$ hat genau eine Lösung.

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{8x^2}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)}\,dx$!

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)

Sei $f(t) = \sinh t$ für $-1 < t \leq 1$, periodisch fortgesetzt mit Periode zwei.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-5, 5]$!

b) Ist f gerade, ungerade oder keins von beiden?

c) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f !

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst?

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ tritt das Gibbs-Phänomen auf?

Aufgabe 3: (*3 Punkte*)

Berechnen Sie die Ableitung im Distributionensinn der Funktion f aus Aufgabe 2 !

Aufgabe 4: (*6 Punkte*)

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $f(t) = e^{-a|t|}$ für $a > 0$ in reeller Form!

b) *Ditto* für $g(t) = \dfrac{1}{a^2 + t^2}$!

c) Was ist $g * g$?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 5: (*7 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

d) Läßt sich auch eine Orthonormalbasis finden, bezüglich derer A Dreiecksgestalt hat?

e) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\Delta t}$ und e^{At}! *Hinweis:* Was wissen Sie über Matrizen, deren Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis bilden? Was gilt bei Orthogonalbasen?

Aufgabe 6: (*4 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit den Anfangsbedingungen $\vec{y}(0) = \vec{v}$ für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

c) Ist dieses Verhalten stabil gegenüber kleinen Veränderungen der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 7: (*7 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + y(t) = 5e^{-t}\sin t$!

b) Berechnen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t)^2 - \beta x(t)y(t), \quad \dot{y}(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t), \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0\,,$$

und bestimmen Sie deren Stabilitätsverhalten!

Aufgabe 8: (*5 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Für jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{L}\Big\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\Big\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$!

b) $S_k(t) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}$ und $C_k(t) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{t^{2j}}{(2j)!}$ seien die TAYLOR-Polynome von Sinus und Kosinus vom Grad $2k-1$ *bzw.* $2k-2$. Zeigen Sie:

$$\mathcal{L}\{C_k(t) + (-1)^k \cos t\} = \frac{1}{(s^2+1)s^{2k-1}} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{S_k(t) + (-1)^k \sin t\} = \frac{1}{(s^2+1)s^{2k}}\,.$$

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y^{(4)}(t) + 4y^{(3)}(t) + 6\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + y(t) = 2e^{-t}\cos t$ mit $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = y^{(3)}(0) = 0$!

Formelanhang

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \mathcal{L}\{\cosh at\}(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}, \qquad \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad \mathcal{L}\{\sinh at\}(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}, \qquad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Samstag, dem 12. Februar 2005, um 13^{00} Uhr