Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 10. Februar 2005

a) Bereiten Sie sich auf die Klausur vor!

0. Da Ihnen nach mindestens drei Semestern Studium der Sinn der Tutorien klar ist, haben Sie natürlich dort Fragen zu den Themen gestellt, die Ihnen noch unklar sind.

1. Stellen Sie anhand Ihrer Übungsblätter dieses Semesters genauer fest, wo Ihre Stärken und Schwächen liegen.

2. Indem Sie sich Ihre damaligen Lösungen noch einmal anschauen, sehen Sie, ob Sie auf den Gebieten, wo Ihre Stärken liegen, weiterhin fit sind.

3. Versuchen Sie bei den Themen, bei denen Sie Schwächen hatten, anhand des Skriptums die Grundsätze zu verstehen.

4. Bearbeiten Sie entsprechende Aufgaben aus den Themenvorschlägen, darunter auch solche, die in Ihrem Tutorium nicht behandelt wurden. Versuchen Sie zunächst, die Aufgabe zu lösen, *ohne* das Lösungsblatt zu konsultieren, und schauen Sie sich die dortige Lösung nur an, wenn Sie anders nicht weiterkommen.

5. Vergleichen Sie mit der Musterlösung und bedenken Sie dabei, daß die meisten Probleme mehrere eventuell sehr verschiedene Lösungen haben können.

6. Stellen Sie im Tutorium dieser Woche Fragen zu den noch verbliebenen Problemen!

b) Beschreiben Sie die Menge $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 1 \right\}$ geometrisch!

Lösung: Das ist natürlich eine (Voll-)Ellipse mit Halbachsen 2 und 3.

c) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ in M!

Lösung: $\nabla f = \binom{2x}{2y-2}$ verschwindet nur im Punkt $(0, 1)$; dort (wie überall) ist die Hesse-Matrix

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

als positives Vielfaches der Einheitsmatrix positiv definit, also hat f dort ein Minimum. Dieses liegt in der Ellipse M, ist also eine Lösung.

Alle weiteren Extrema müssen auf dem Rand liegen. Der Gradient der Ellipsengleichung ist $\binom{x/2}{2y/9}$; da er nur im Nullpunkt verschwindet, der nicht auf der (Rand)-Ellipse liegt, gibt es für jedes weitere Extremum ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß

$$2x = \lambda \frac{x}{2} \quad \text{und} \quad 2y - 2 = 2\lambda \frac{y}{9}$$

ist, d.h.

$$(4 - \lambda)x = 0 \quad \text{und} \quad (9 - \lambda)y = 9\,.$$

Ist $x = 0$, so ist wegen der Ellipsengleichung $y = \pm 3$ und λ läßt sich aus der zweiten Gleichung bestimmen; andernfalls ist $\lambda = 4$, also $y = 9/5$ und aufgrund der Ellipsengleichung $x = \pm 2/5$. Die Funktionswerte sind jeweils

$$f(0, \pm 3) = 9 \mp 6 = \begin{cases} 3 \\ 15 \end{cases} \quad \text{und} \quad f\left(\frac{9}{5}, \pm\frac{2}{5}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{5} \\ 7 \end{cases}.$$

Da die zu optimierende Funktion auf dem Rand der Ellipse stetig ist, müssen dort also in $(0,3)$ und $(9/5, 2/5)$ Minima vorliegen und in den anderen beiden Punkten Maxima.

d) Bestimmen Sie den größten Quader mit achsenparallelen Kanten, der im Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

liegt!

Lösung: Offensichtlich kann man einen Quader mit achsenparallelen Kanten, dessen Ecken *nicht* auf der Oberfläche des Ellipsoids liegen, noch vergrößern; die Ecken des größten liegen also dort. Dann haben sie zwangsläufig die Koordinaten $(\pm x, \pm y, \pm z)$ mit geeigneten positiven reellen Zahlen x, y, z, die die Ellipsoidgleichung erfüllen; das Volumen ist $8xyz$. Somit müssen wir die Funktion $f(x,y,z) = 8xyz$ maximieren unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\,.$$

Für die Lösung sind

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 8yz \\ 8xz \\ 8xy \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \\ 2z/c^2 \end{pmatrix}$$

proportional, es gibt also ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß gilt

$$8yz = \frac{2\lambda x}{a^2}, \qquad 8xz = \frac{2\lambda y}{b^2} \quad \text{und} \quad 8xy = \frac{2\lambda z}{c^2}\,.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit x, die zweite mit y und die dritte mit z, folgt also, daß

$$8xyz = \frac{2\lambda x^2}{a^2} = \frac{2\lambda y^2}{b^2} = \frac{2\lambda z^2}{c^2}$$

ist. Da das Volumen des größten Quaders sicherlich nicht verschwindet, muß auch λ von Null verschieden sein; wir können also, wenn wir nur die rechten drei Terme betrachten, durch 2λ kürzen und erhalten dann wegen der Nebenbedingung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}\,,$$

aus denen sofort die Lösung

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}b \quad \text{und} \quad z = \frac{\sqrt{3}}{3}c$$

folgt.

e) Die Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die Gleichung

$$(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\,,$$

wobei die Determinante der symmetrischen 2×2-Matrix A von Null verschieden sei. Bestimmen Sie jene Punkte der Quadrik, in denen der Abstand zum Punkt $(0,0)$ ein relatives Minimum annimmt!

Lösung: Gesucht sind Punkte, für die $f(x,y) = x^2 + y^2$ minimal wird unter der Nebenbedingung $(x,y)A\left(\binom{x}{y}\right) = 1$. Mit $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ wird letzteres zu

$$g(x,y) = ax^2 + cy^2 + 2bxy - 1 = 0\,.$$

Die Gradienten sind

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2ax + 2by \\ 2cy + 2bx \end{pmatrix};$$

da der Nullpunkt nicht auf der Quadrik liegt, muß es also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben mit

$$ax + by = \lambda x \quad \text{und} \quad cy + bx = \lambda y$$

oder

$$(a - \lambda)x + by = 0 \quad \text{und} \quad bx + (c - \lambda)y = 0\,.$$

Da der Nullpunkt nicht auf der Quadrik liegt; brauchen wir eine nichttriviale Lösung dieses homogenen linearen Gleichungssystems für x, y; diese existiert genau dann, wenn die Determinante des Gleichungssystems verschwindet, wenn also λ Eigenwert der Matrix A ist.

Falls A zwei gleiche Eigenwerte hat, ist die Quadrik ein Kreis um Null und jeder Punkt ist Lösung; andernfalls gibt es zwei verschiedene Eigenwerte und die gesuchten Lösungspunkte sind unter den Schnittpunkten der Quadrik mit den durch die Eigenräume definierten Geraden. Wie viele der (bis zu vier) Schnittpunkte existieren hängt von A ab; mindestens einer davon ist Lösung des Problems.

f) Lassen sich diese Punkte auch geometrisch interpretieren?

Lösung: Geometrisch betrachtet handelt es sich um die Schnittpunkte der Quadrik mit ihren Hauptachsen, bei einer Ellipse etwa um die Endpunkte der großen (maximaler Abstand) und der kleinen Halbachse, bei einer Hyperbel um die beiden Scheitelpunkte.

g) Ein Produkt werde aus drei Resourcen hergestellt, die jeweils 80 Euro, 12 Euro *bzw.* 10 Euro pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können für 24 000 Euro maximal gefertigt werden?

Lösung: Offensichtlich sind nur nichtnegative Werte für x, y und z sinnvoll. Falls man daher zwei der Variablen festhält, ist

$$f(x,y,z) = 50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$$

monoton in der dritten; da auch die Kostenfunktion

$$g(x,y,z) = 80x + 12y + 10z$$

diese Eigenschaft hat, wird das Maximum in einem Punkt angenommen, in dem die Kosten das Limit erreichen, d.h. $g(x,y,z) = 24\,000$.

Dort müssen die Gradienten von f und $g - 24\,000$, also

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 20x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} \\ 10x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g = \begin{pmatrix} 80 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix},$$

linear abhängig sein; da ∇g nirgends verschwindet, muß es somit ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, so daß $\nabla f = \lambda \nabla g$ ist oder

$$\begin{aligned} 20x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} &= 80\lambda \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} &= 12\lambda \\ 10x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} &= 10\lambda\,. \end{aligned}$$

Durch Kürzen kann man alle rechten Seiten zu λ machen; um Nenner zu vermeiden, ist es allerdings besser, sie zu 12λ zu machen; dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 3x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} &= 12\lambda \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} &= 12\lambda \\ 12x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} &= 12\lambda\,. \end{aligned}$$

Daher ist $3x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} = 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} = 12x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5}$.
Multiplikation mit $x^{3/5}y^{4/5}z^{4/5}$ macht daraus $3yz = 10xz = 12xy$.
Da das Maximum der Produktionsfunktion f auf jeden Fall positiv ist, kann dort keine der drei Variablen verschwinden; wir können also unbesorgt kürzen und erhalten die drei Gleichungen

$$3y = 10x, \quad 10z = 12y \quad \text{und} \quad 3z = 12x\,,$$

d.h.

$$z = 4x \quad \text{und} \quad y = \frac{10}{3}x\,.$$

Unter diesen Bedingungen ist

$$g(x,y,z) = 80x + 40x + 40x = 160x\,;$$

dies ist genau dann gleich 24 000, wenn $x = 150$ ist. Damit kennen wir auch

$$y = \frac{10}{3}x = 500, \quad z = 4x = 600\,,$$

und

$$f(x,y,z) = 50 \cdot 150^{\frac{2}{5}} \cdot 500^{\frac{1}{5}} \cdot 600^{\frac{1}{5}} = 50 \cdot \sqrt[5]{150^2 \cdot 500 \cdot 600} = 50\sqrt[5]{76750\,000\,000} \approx 92{,}44\,.$$

Also lassen sich maximal 92 Einheiten fertigen.

h) Ab welchem Preis, der für eine produzierte Einheit erzielt werden kann, lohnt es sich, den Kapitaleinsatz von 24 000 Euro zu erhöhen?

Lösung: Dazu müssen wir zunächst λ berechnen, z.B. aus der Gleichung

$$12\lambda = 3x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} = 3 \cdot 150^{-3/5} \cdot 500^{1/5} \cdot 600^{1/5} \approx 1{,}8488\,,$$

d.h. $\lambda \approx 0{,}154$. Bei um h erhöhtem Kapitaleinsatz lassen sich also etwa $0{,}154\,h$ zusätzliche Einheiten fertigen; dies lohnt sich, sobald der erzielbare Preis höher liegt als

$$\frac{1}{\lambda} \approx 6{,}49 \text{ Euro}\,.$$