

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 3. Februar 2005

- a) Finden Sie eine Differentialgleichung, die alle Hyperbeln $y^2 - t^2 = C$ als Lösungskurven hat!

Lösung: Wir suchen eine Differentialgleichung, deren Lösungen sich in der Form

$$F(y, t) = y^2 - t^2 = C$$

schreiben lassen. Da die Ableitung einer Konstanten nach der Zeit verschwindet, müssen wir dazu einfach $F(y(t))$ nach t ableiten und auf Null setzen:

$$\frac{d}{dt}F(y(t)) = \frac{d}{dt}(y(t)^2 - t^2) = 2y(t)\dot{y}(t) - 2t = 0 \quad \text{oder} \quad y(t)\dot{y}(t) - t = 0.$$

- b) Finden Sie eine Differentialgleichung, die alle Lemniskaten

$$(y^2 + t^2)^2 = 2C^2(t^2 - y^2)$$

als Lösungskurven hat! (*Hinweis: Hier kann man viel kürzen!*)

Lösung: Um dies auf die Form $F(y, t) = \text{Konstante}$ zu bringen, müssen wir durch $t^2 - y^2$ dividieren und erhalten

$$F(y, t) = \frac{(y^2 + t^2)^2}{t^2 - y^2} = 2C^2.$$

Diese Funktion leiten wir besser nicht als Ganzes ab, sondern berechnen die partiellen Ableitungen nach y und t jeweils für sich; sobald wir diese kennen, haben wir auch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial y}F(y(t), y)\dot{y}(t) + \frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

Hier ist

$$\frac{\partial}{\partial y}(y, t) = \frac{4(t^2 - y^2)(y^2 + t^2)y + 2y(y^2 + t^2)^2}{(t^2 - y^2)^2} = \frac{2y(y^2 + t^2)(3t^2 - y^2)}{(y^2 - t^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}(y, t) = \frac{4t(t^2 - y^2)(y^2 + t^2) - 2t(y^2 + t^2)^2}{(t^2 - y^2)^2} = \frac{2t(y^2 + t^2)(t^2 - 3y^2)}{(y^2 - t^2)^2},$$

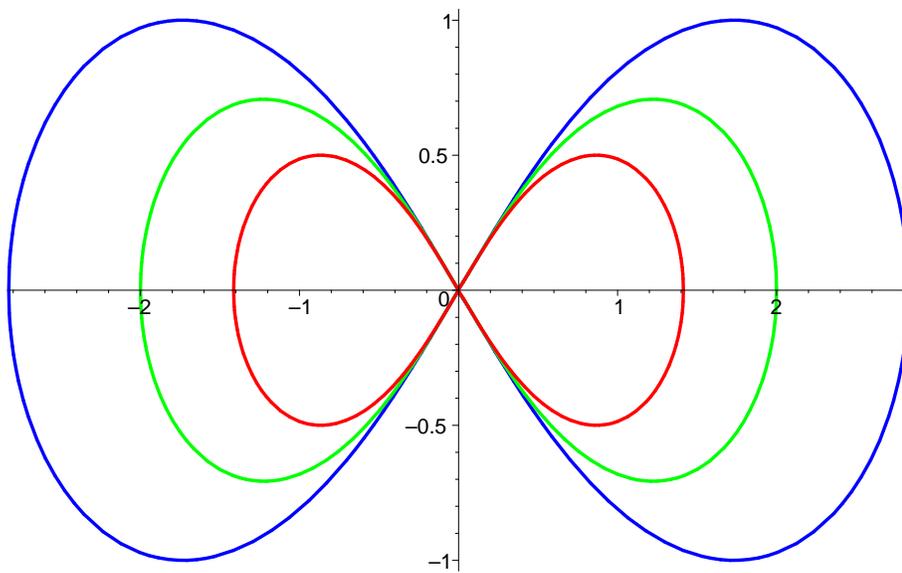
wir haben also die Differentialgleichung

$$\frac{2y(t)(y(t)^2 + t^2)(3t^2 - y(t)^2)}{(y(t)^2 - t^2)^2}\dot{y}(t) = \frac{2t(y(t)^2 + t^2)(t^2 - 3y(t)^2)}{(y(t)^2 - t^2)^2},$$

die erheblich schöner aussieht, wenn wir sie noch mit $\frac{(t^2 - y(t)^2)^2}{2(t^2 + y(t)^2)}$ multiplizieren zu

$$y(t)((3t^2 - y(t)^2))\dot{y}(t) + t(t^2 - 3y(t)^2) = 0.$$

Die Lösungskurven für $C = 1$ (*innere Kurve*), $C = \sqrt{2}$ und $C = 2$ (*äußere Kurve*) sind in der folgenden Zeichnung zu sehen:



c) Hat diese Differentialgleichung auch noch weitere Lösungskurven?

Lösung: Ja, natürlich: Die Kurven, bei denen C^2 durch einen negativen Wert ersetzt wird, sind auch Lösungen, wenn auch keine sehr verschiedenen: Sie entstehen aus den angegebenen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

d) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen wenn möglich explizit, und diskutieren Sie ansonsten, wo die implizite Lösung eindeutig nach y aufgelöst werden kann!

$$\begin{array}{ll}
 t\dot{y}(t) + y(t) = 0 & (1) \\
 t\dot{y}(t) + y(t) + e^t = 0 & (3) \\
 8ty(t) \sin(4y(t)^2)\dot{y}(t) = \cos(4y(t)^2) & (5)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 (1 + t^2)\dot{y}(t) + 2ty(t) = 0 & (2) \\
 ((te^{y(t)} + 2y(t))\dot{y}(t) + e^{y(t)}) = 0 & (4) \\
 (t \cos y(t)) + \sin y(t) = 0 & (6)
 \end{array}$$

Lösung: Wir wählen a, b jeweils so, daß $a(y(t), t)\dot{y}(t) + b(y(t), t) = 0$ die gegebene Gleichung ist. Für (1) ist also $a(y, t) = t$ und $b(y, t) = y$, also $a_t = b_y = 1$, so daß die Gleichung exakt ist. Wir suchen eine Funktion $F(y, t)$ mit $F_y = a$ und $F_t = b$; das ist hier offensichtlich $F(y, t) = yt$. Die Lösungskurven von (1) sind also die Kreise $y(t)^2 + t^2 = r^2$. (Negative Konstanten führen hier offensichtlich zu keiner Lösung.) Die Kreisgleichung kann bekanntlich überall dort eindeutig nach $y(t)$ aufgelöst werden, wo y nicht verschwindet.

Bei (2) ist $a(y, t) = 1 + t^2$ und $b(y, t) = 2ty$, also $a_t = 2t = b_y$, so daß auch diese Gleichung exakt ist. Integration ergibt $F(y, t) = (1 + t^2)y$, wir haben also die Lösungskurven $y(t) = \frac{C}{1 + t^2}$.

Bei (3) ist $a(y, t) = t$ und $b(y, t) = y + e^t$, also $a_t = 1 = b_y$; auch (3) ist also exakt. Hier ist $F(y, t) = ty + e^t$, also haben wir die Lösungen $y(t) = \frac{C - e^t}{t}$.

Auch für (4) mit $a(y, t) = te^y + 2y$ und $b(y, t) = e^y$ ist die Exaktheitsbedingung $a_t = b_y$ erfüllt; wir erhalten $F(y, t) = te^y + y^2$, haben also die Lösungskurven $te^{y(t)} + y(t)^2 = C$, wobei C offensichtlich nicht negativ sein kann. Eindeutige Auflösbarkeit liegt nach dem Satz über implizite Funktionen überall dort vor, wo $F_y(y, t) = a(y, t) = te^y + 2y$ nicht verschwindet.

Bei (5) ist $a(y, t) = 8ty \sin 4y^2$ und $b(y, t) = -\cos 4y^2$, also $a_t = 8y \sin 4y^2 = b_y$. Integration von b über die darin nicht vorkommende Variable t ergibt $F(y, t) = -t \cos 4y^2 + g(y)$; leiten wir dies ab nach y , sehen wir, daß wir bereits mit $g(y) \equiv 0$ die Funktion a erhalten. Also sind die Lösungskurven gegeben durch $t \cos 4y(t)^2 = C$, was für $t = 0$ zu nichts führt,

und für $t \neq 0$ zu $y(t) = \frac{1}{4} \sqrt{\arccos \frac{C}{t}}$.

Bei (6) schließlich ist $a(y, t) = t \cos y$ und $b(y, t) = \sin y$. Offensichtlich ist $a_t = b_y$, und wir können $F(y, t) = t \sin y$ setzen. Die Lösungskurven sind also $t \sin y(t) = C$, was wieder für $t \neq 0$ aufgelöst werden kann zu $y(t) = \arcsin \frac{C}{t}$

e) Dasselbe für die folgenden Differentialgleichungen:

$$y(t)\sqrt{1-t^2}\dot{y}(t) = t \quad (7) \quad (ty(t) - t)\dot{y}(t) + t = 0 \quad (8)$$

$$(3t + 3 - y(t))\dot{y}(t) + y = 0 \quad (9) \quad (y(t)^2 - t^2)\dot{y}(t) + 2ty(t) = 0 \quad (10)$$

Lösung: Bei (7) ist $a(y, t) = y\sqrt{1-t^2}$ und $b(y, t) = -t$; offensichtlich ist $b_y = 0$ von a_t verschieden; die Differentialgleichung ist also nicht exakt. Die Funktion

$$\frac{b_y - a_t}{a} = -\frac{\frac{yt}{\sqrt{1-t^2}}}{y\sqrt{1-t^2}} = \frac{-t}{1-t^2}$$

allerdings hängt nur von t ab, also führt ihre Stammfunktion $-\ln \sqrt{1-t^2}$ zum integrierenden Faktor

$$e^{-\ln \sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Multiplizieren wir die Gleichung damit, erhalten wir

$$y(t)\dot{y}(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}},$$

was wir wahlweise als Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen oder als exakte Differentialgleichung lösen können. In beiden Fällen ist die Hauptschwierigkeit die Berechnung von

$$\int \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\sqrt{1-t^2}.$$

Wie meist bei Ausdrücken wie $\sqrt{1-t^2}$ bietet sich hier eine Substitution der Form $t = \sin u$ und damit $dt = \cos u du$ an, denn dann ist $\sqrt{1-t^2} = \cos u$ und

$$\int \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{\sin u}{\cos u} \cos u du = \int \sin u du = -\cos u = -\sqrt{1-\sin^2 u} = -\sqrt{1-t^2}.$$

Die Lösungskurven der Differentialgleichung haben somit die Form

$$\frac{y^2}{2} = C - \sqrt{1-t^2} \quad \text{oder} \quad y(t) = \pm \sqrt{C - 2\sqrt{1-t^2}},$$

wobei das Vorzeichen in allen Punkten mit $y \neq 0$ eindeutig bestimmt ist.

Auch bei (8) mit $a(y, t) = ty - t$ und $b(y, t) = t$ ist $a_t \neq b_y$, aber

$$\frac{b_y - a_t}{a} = \frac{1 - y}{ty - t} = -\frac{1}{t}$$

hängt nur von t ab, es gibt also einen integrierenden Faktor

$$e^{-\int \frac{dt}{t}} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}.$$

Die damit multiplizierte Gleichung ist $(y(t) - 1)\dot{y}(t) + 1 = 0$; da t hierin nicht explizit vorkommt, sehen wir sofort die Lösung $\frac{1}{2}y(t)^2 - y(t) + t = C$. Quadratische Ergänzung macht daraus

$$(y(t) - 1)^2 + 2t = 2C + 1 \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{C} \quad \text{oder} \quad y(t) = 1 \pm \sqrt{\tilde{C} - 2t}.$$

Bei (9) ist $a = 3t + 3 - y$ und $b = y$, also $a_t = 3 \neq 1 = b_y$.

$$\frac{b_y - a_t}{a} = \frac{1 - 3}{3t + 3 - y}$$

hängt offensichtlich sowohl von t als auch von y ab, es gibt also keinen integrierenden Faktor der Form $\varphi(t)$. Dafür hängt

$$\frac{a_t - b_y}{b} = \frac{3 - 1}{y} = \frac{2}{y}$$

nur von y ab,

$$\psi(y) = e^{\int \frac{2 dy}{y}} = e^{2 \ln y} = e^{\ln y^2} = y^2$$

ist also ein integrierender Faktor. Nach Multiplikation damit wird die Gleichung zu

$$(3t + 3 - y(t))y(t)^2 \dot{y}(t) + y(t)^3 = 0.$$

Eine Funktion $F(y, t)$ mit $F_y = (3t + 3 - y)y^2 = -y^3 + 3(t + 1)y^2$ und $F_t = y^3$ ist offensichtlich $F(y, t) = -\frac{y^4}{4} + (t + 1)y^3$; die gesuchten Lösungskurven haben also die Gleichungen $(t + 1 - y)y^3 = C$. Sie sind dort eindeutig nach y auflösbar, wo die partielle Ableitung $F_y = (3t + 3 - y)y^2$ nicht verschwindet, d.h. wo $y \neq 0$ und $y \neq 3t + 3$ ist.

Bei (10) schließlich ist $a(y, t) = y^2 - t^2$ und $b(y, t) = 2ty$, also $a_t = -2t \neq 2t = b_y$. Wie in (9) hängt

$$\frac{a_t - b_y}{b} = \frac{-2t - 2t}{2ty} = -\frac{2}{y}$$

nur von y ab, wir haben also den integrierenden Faktor

$$e^{-\int \frac{2 dy}{y}} = e^{-2 \ln y} = e^{-\ln y^2} = \frac{1}{y^2}.$$

Damit multipliziert wird die Gleichung zur exakten Differentialgleichung

$$\left(1 - \frac{t^2}{y^2}\right) \dot{y}(t) + \frac{2t}{y(t)} = 0,$$

und dazu findet wir leicht die Stammfunktion $F(y, t) = y + \frac{t^2}{y}$. Die Lösungskurven haben also die Gleichungen

$$y + \frac{t^2}{y} = C \quad \text{oder} \quad y^2 - Cy + t^2 = (y - \frac{1}{2}C)^2 = \frac{1}{4}C^2 \quad \text{d.h.} \quad y(t) = \frac{C \pm \sqrt{C^2 - 4t}}{2}.$$

Probleme mit der eindeutigen Lösbarkeit gibt es, wenn die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ das Vorzeichen der Wurzel nicht eindeutig festlegt, wenn also $C^2 - 4t_0$ verschwindet. Dann ist $y(t_0) = \frac{1}{2}C$, d.h. Anfangsbedingungen der Form $y(t_0) = \pm \sqrt{t_0}$ führen zu nichteindeutigen Lösungen.

f) Lösen Sie $(ty(t) + t^2 + 1)\dot{y}(t) + y(t)^2 + ty(t) + 1 = 0$ mit einem integrierenden Faktor der Form $\varphi(ty)$!

Lösung: Für einen integrierenden Faktor $\varphi(ty)$ muß gelten

$$\frac{\partial(a(y, t)\varphi(ty))}{\partial t} = \frac{\partial(a(y, t)\varphi(ty))}{\partial y} \quad \text{oder} \quad ay\varphi'(ty) + a_t\varphi(ty) = b\varphi'(ty) + b_y\varphi(ty).$$

Hier ist $a = ty + t^2 + 1$, also $a_t = y + 2t$, und $b = y^2 + ty + 1$, also $b_y = 2y + t$, und wir haben somit die Bedingung $(ay - b)\varphi'(ty) = (b_y - a_t)\varphi(ty)$ oder

$$(ty^2 + t^2y + y - y^2t - t^2y - t)\varphi'(ty) = (2y + t - y - 2t)\varphi'(ty),$$

d.h. $\varphi'(ty) = \varphi(ty)$. Damit sollte $\varphi(ty) = e^{ty}$ ein integrierender Faktor sein, und in der Tat gibt es zu

$$a(y, t)e^{yt} = (ty + t^2 + 1)e^{yt} \quad \text{und} \quad b(y, t)e^{yt} = (y^2 + ty + 1)e^{yt}$$

die Funktion $F(y, t) = (y + t)e^{yt}$, die diese beiden als partielle Ableitungen hat. Die Lösungskurven genügen also den Gleichungen $(y + t)e^{yt} = C$, die überall dort nach y aufgelöst werden können, wo F_y nicht verschwindet, wo also $ty + t^2 + 1 \neq 0$ ist.

- g) In einem Ökosystem lebe eine Tierart, die sich nach der logistischen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \lambda x(t)(M - x(t))$ vermehrt. Nun komme eine zweite Art, die dieselben Ressourcen nutzt und sich gemäß der Gleichung $\dot{y}(t) = \mu y(t)(N - y(t))$ mit $N > M$ vermehrt. Da sich die beiden Arten gegenseitig Ressourcen wegnehmen, gelten für das Gesamtsystem nun die Differentialgleichungen $\dot{x}(t) = \lambda x(t)(M - x(t) - y(t))$ und $\dot{y}(t) = \mu y(t)(N - x(t) - y(t))$. Bestimmen Sie alle Fixpunkte dieses System, und untersuchen Sie deren Stabilität!

Lösung: Für einen Fixpunkt $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ muß gelten

$$\lambda u(M - u - v) = 0 \quad \text{und} \quad \mu v(N - u - v) = 0.$$

Damit gibt es die Fixpunkte $(0, 0)$, $(0, N)$ und $(M, 0)$.

Die JACOBI-Matrix von $F(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda x(M - x - y) \\ \mu y(N - x - y) \end{pmatrix}$ ist

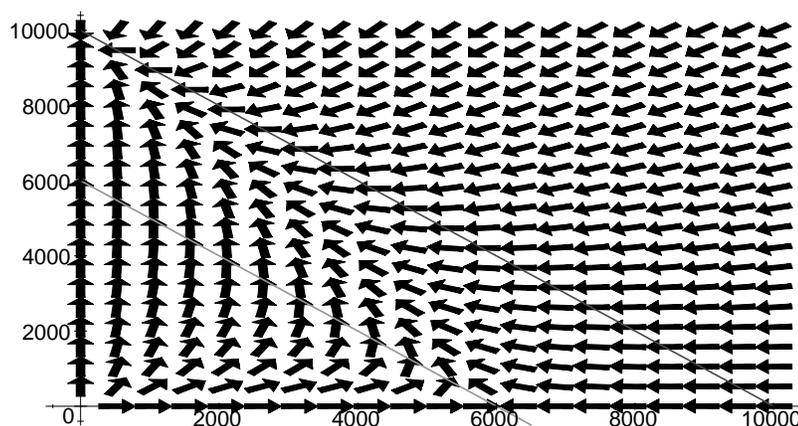
$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda(M - 2x - y) & -\lambda x \\ -\mu y & \mu(N - x - 2y) \end{pmatrix}, \quad J_F(0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda M & 0 \\ 0 & \mu N \end{pmatrix},$$

$$J_F(0, N) = \begin{pmatrix} \lambda(M - N) & 0 \\ -\mu N & -\mu N \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_F(M, 0) = \begin{pmatrix} -\lambda M & -\lambda M \\ 0 & \mu(N - M) \end{pmatrix}.$$

Da λM und μN positiv sind, ist $(0, 0)$ also instabil. Bei $(0, N)$ haben wir die beiden Eigenwerte $-\mu N < 0$ und $\lambda(M - N) < 0$, also ist dieser Punkt stabil. Für $(M, 0)$ schließlich ist der Eigenwert $-\lambda M$ negativ, aber $\mu(N - M)$ positiv, das ist also ein Sattelpunkt.

- h) Skizzieren Sie grob das Vektorfeld zum obigen Differentialgleichungssystem, und folgern Sie daraus, wie sich das System langfristig entwickeln wird!

Lösung: Für $N = 10\,000$ und $M = 6\,000$ ergibt sich folgendes Bild:



Lösungskurven, die unterhalb der ersten schrägen Geraden beginnen, überqueren diese Gerade, und Lösungskurve, die zwischen den beiden Geraden oder oberhalb der oberen beginnen, gehen gegen $(0, N)$. Die erfolgreichere Art behauptet sich also, die andere stirbt aus.

i) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen des folgenden Systems:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)^2 + y(t)^2 - z(t)^2 \\ \dot{y}(t) &= x(t)^2 - y(t)^2 + z(t)^2 \\ \dot{z}(t) &= -x(t) + y(t)^2 - 2z(t)\end{aligned}$$

Lösung: Wir haben das nichtlineare Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 0 \quad \text{und} \quad -x + y^2 - 2z = 0.$$

Addition der ersten beiden Gleichungen führt auf $x^2 = 0$, also muß x verschwinden und $y = \pm z$. Dies in die dritte Gleichung eingesetzt zeigt, daß $z^2 = 2z$ ist, also $z = 0$ oder $z = 2$ ist. Es gibt also die drei Gleichgewichtslösungen $(0, 0, 0)$ und $(0, \pm 2, 2)$.

j) Zeigen Sie sich, daß der Nullpunkt Fixpunkt der folgenden Systeme ist, und bestimmen Sie jeweils sein Stabilitätsverhalten:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -2x(t) + y(t)^2 + x(t)z(t) \\ \dot{y}(t) &= 3x(t)^2 - y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= -2x(t)z(t) - y(t) - z(t)\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 2x(t) + y(t)^2 + x(t)z(t) \\ \dot{y}(t) &= -3x(t)^2 - y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= -2x(t)z(t) - y(t) - z(t)\end{aligned} \tag{12}$$

Lösung: Bei beiden Systemen ist klar, daß $x(t) \equiv y(t) \equiv z(t) \equiv 0$ das System erfüllt, der Nullpunkt ist also eine Gleichgewichtslösung. Die Linearisierung um $(0, 0, 0)$ erhalten wir einfach durch Weglassen aller nichtlinearer Terme; bei (11) führt das auf

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -2x(t) \\ \dot{y}(t) &= -y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= -y(t) - z(t)\end{aligned} \tag{11'}$$

Die Matrix dazu ist

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

mit $\det(A - \lambda E) = (-2 - \lambda) \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)$; die Eigenwerte sind also -2 und $-1 \pm i$. Da alle drei negativen Realteil haben, ist der Nullpunkt stabil. Im Falle von (12) erhalten wir genau dieselbe Linearisierung um den Nullpunkt, also ist dieser auch hier stabil.