Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 3. Februar 2005

a) Finden Sie eine Differentialgleichung, die alle Hyperbeln $y^2 - t^2 = C$ als Lösungskurven hat!

b) Finden Sie eine Differentialgleichung, die alle Lemniskaten

$$(y^2 + t^2)^2 = 2C^2(t^2 - y^2)$$

als Lösungskurven hat! *(Hinweis: Hier kann man viel kürzen!)*

c) Hat diese Differentialgleichung auch noch weitere Lösungskurven?

d) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen wenn möglich explizit, und diskutieren Sie ansonsten, wo die implizite Lösung eindeutig nach y aufgelöst werden kann!

$$t\dot{y}(1) + y(t) = 0 \qquad (1) \qquad\qquad (1+t^2)\dot{y}(t) + 2ty(t) = 0 \qquad (2)$$
$$t\dot{y}(t) + y(t) + e^t = 0 \qquad (3) \qquad\qquad \big((te^{y(t)} + 2y(t)\big)\dot{y}(t) + e^{y(t)} = 0 \qquad (4)$$
$$8ty(t)\sin\big(4y(t)^2\big)\dot{y}(t) = \cos\big(4y(t)^2\big) \qquad (5) \qquad\qquad \big(t\cos y(t)\big) + \sin y(t) = 0 \qquad (6)$$

e) Dasselbe für die folgenden Differentialgleichungen:

$$y(t)\sqrt{1-t^2}\,\dot{y}(t) = t \qquad (7) \qquad\qquad \big(ty(t) - t\big)\dot{y}(t) + t = 0 \qquad (8)$$
$$\big(3t + 3 - y(t)\big)\dot{y}(t) + y = 0 \qquad (9) \qquad\qquad \big(y(t)^2 - t^2\big)\dot{y}(t) + 2ty(t) = 0 \qquad (10)$$

f) Lösen Sie $\big(ty(t) + t^2 + 1\big)\dot{y}(t) + y(t)^2 + ty(t) + 1 = 0$ mit einem integrierenden Faktor der Form $\varphi(ty)$!

g) In einem Ökosystem lebe eine Tierart, die sich nach der logistischen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \lambda x(t)\big(M - x(t)\big)$ vermehrt. Nun komme eine zweite Art, die dieselben Resourcen nutzt und sich gemäß der Gleichung $\dot{y}(t) = \mu y(t)\big(N - y(t)\big)$ mit $N > M$ vermehrt. Da sich die beiden Arten gegenseitig Resourcen wegnehmen, gelten für das Gesamtsystem nun die Differentialgleichungen $\dot{x}(t) = \lambda x(t)\big(M - x(t) - y(t)\big)$ und $\dot{y}(t) = \mu y(t)\big(N - x(t) - y(t)\big)$. Bestimmen Sie alle Fixpunkte dieses System, und untersuchen Sie deren Stabilität!

h) Skizzieren Sie grob das Vektorfeld zum obigen Differentialgleichungssystem, und folgern Sie daraus, wie sich das System langfristig entwickeln wird!

i) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen des folgenden Systems:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)^2 + y(t)^2 - z(t)^2\\ \dot{y}(t) &= x(t)^2 - y(t)^2 + z(t)^2\\ \dot{z}(t) &= -x(t) + y(t)^2 - 2z(t)\end{aligned}$$

j) Zeigen Sie sich, daß der Nullpunkt Fixpunkt der folgenden Systeme ist, und bestimmen Sie jeweils sein Stabilitätsverhalten:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -2x(t) + y(t)^2 + x(t)z(t)\\ \dot{y}(t) &= 3x(t)^2 - y(t) + z(t)\\ \dot{z}(t) &= -2x(t)z(t) - y(t) - z(t)\end{aligned} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 2x(t) + y(t)^2 + x(t)z(t)\\ \dot{y}(t) &= -3x(t)^2 - y(t) + z(t)\\ \dot{z}(t) &= -2x(t)z(t) - y(t) - z(t)\end{aligned} \qquad (12)$$