Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27. Januar 2005

a) Bestimmen Sie die sämtlichen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen und diskutieren Sie deren Langzeitverhalten!

$\dot y(t) + 2ty(t) = 4t$	(1)	$\dot y(t) + \frac{y(t)}{t} + e^t = 0$	(2)
$\dot y(t) = a + bt + cy(t)$	(3)	$(1+t)\dot y(t) + y(t) + t^2 + t^3 = 0$	(4)
$\dot y(t) + y(t) = 2\sin t$	(5)	$\dot y(t) + \sin t\, y(t) = \sin^3 t$	(6)

Lösung: (1) – (6) sind inhomegene lineare Differentialgleichungen.
Die homogene Gleichung zu (2) ist

$$\dot u(t) + 2tu(t) = 0 \Longrightarrow \ln u(t) = -\int 2t\,dt = -t^2 + C\,,$$

also ist $u(t) = e^{-t^2}$ und

$$y(t) = e^{-t^2}\left(\int -4te^{t^2}\,dt\right) = e^{-t^2}\left(2e^{t^2} + C\right) = 2 + Ce^{-t^2}\,.$$

Die homogene Gleichung zu (2) ist

$$\dot u(t) + \frac{u(t)}{t} = 0 \Longrightarrow \ln u(t) = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t\,,$$

also ist $u(t) = C/t$ mit einer beliebigen Konstanten C. Durch partielle Integration finden wir

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{t}\left(\int -te^{-t}\,dt\right) = -\frac{1}{t}\left(te^{-t} + \int e^{-t}\,dt\right) = -\frac{1}{t}\left(te^{-t} + e^{-t} - C\right) \\ &= -e^{-t} - \frac{e^{-t}}{t} + \frac{C}{t}\,. \end{aligned}$$

Im Falle von (3) ist die homogene Gleichung $\dot u(t) = cu(t)$ mit Lösung $u(t) = Ce^{ct}$; damit ist

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{ct}\left(\int (a+bt)e^{-ct}\,dt\right) = e^{ct}\left(-\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c^2} + \frac{bt}{c}\right)e^{-ct} + C\right) \\ &= Ce^{ct} - \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c^2} + \frac{bt}{c}\right)\,. \end{aligned}$$

Gleichung (4) müssen wir zunächst durch $(1+t)$ dividieren um die übliche Standardform zu erhalten:

$$\dot y(t) + \frac{y(t)}{1+t} = -\frac{t^2+t^3}{1+t} = -t^2\,.$$

Die homogene Gleichung ist dann

$$\dot u(t) + \frac{u(t)}{1+t} = 0 \Longrightarrow u(t) = e^{-\int \frac{dt}{1+t}} = e^{-\ln(1+t)+\widetilde C} = \frac{C}{1+t}\,,$$

und

$$y(t) = -\frac{1}{1+t}\left(\int -t^2(1+t)\,dt\right) = -\frac{t^3/3 + t^4/4}{1+t} + \frac{C}{1+t}\,.$$

Bei Gleichung (5) sehen wir die allgemeine Lösung Ce^{-t} der homogenen Gleichung auch ohne Rechnung. Die Lösung der Differentialgleichung selbst ist

$$y(t) = 2e^{-t}\left(\int \sin t \cdot e^t\,dt\right),$$

wobei wir das Integral durch eine zweifache partielle Integration ausrechnen können. (Es ginge natürlich auch über die EULERschen Formeln.)

$$\int \sin t\, e^t\,dt = -\cos t\, e^t + \int \cos t\, e^t\,dt = -\cos t\, e^t + \sin t\, e^t - \int \sin t\, e^t\,dt\,,$$

also ist

$$2\int \sin t\, e^t\,dt = (\sin t - \cos t)e^t + C \quad \text{und} \quad y(t) = \sin t - \cos t + Ce^{-t}\,.$$

Beim letzten Beispiel schließlich hat die homogene Gleichung $\dot{u}(t) + \sin t\, u(t) = 0$ die Lösung $u(t) = Ce^{\cos t}$ und

$$y(t) = e^{-\cos t}\left(\int \sin^3 t\, e^{\cos t}\,dt\right).$$

Setzen wir $x = \cos t$, ist $dx = -\sin t\,dt$, also

$$\begin{aligned}\int \sin^3 t\, e^{\cos t}\,dt &= -\int \sin^2 t\, e^x\,dx = -\int (1-x^2)\, e^x\,dx = \int (x^2-1)\, e^x\,dx\,,\\ &= (x^2-1)e^x - \int 2xe^x\,dx = (x^2-1)e^x - 2xe^x + \int 2e^x\,dx = (x^2-2x+1)e^x + C\\ &= (\cos^2 t - 2\cos t + 1)e^{\cos t} + C\,.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$y(t) = \cos^2 t - 2\cos t + 1 + Ce^{-\cos t}\,.$$

b) Welche der folgenden Anfangswertprobleme sind eindeutig lösbar?

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) = \cos y(t) &\quad \text{mit} \quad y(0) = 0 && (1)\\
2\dot{y}(t)y(t) = 1 &\quad \text{mit} \quad y(0) = 0 && (2)\\
\dot{y}(t) = \tfrac{5}{3}y(t)^{\frac{2}{5}} &\quad \text{mit} \quad y(0) = 0 && (3)\\
\dot{y}(t) = \frac{\sin t \cdot \cos y(t)}{1+t^8} &\quad \text{mit} \quad y(0) = 1 && (4)\\
\dot{y}(t)^2 = 4y(t) &\quad \text{mit} \quad y(0) = 0 && (5)\\
\dot{y}(t) = \frac{1}{y(t)} &\quad \text{mit} \quad y(0) = 1 && (6)
\end{aligned}$$

Lösung: Die rechte Seite $\cos y(t)$ von (1) hängt nur von y ab, und die Ableitung $-\sin y$ von $\cos y$ nach y ist überall vom Betrag höchstens eins. Damit haben wir eine LIPSCHITZ-Bedingung (mit LIPSCHITZ-Konstante eins), und die Behauptung folgt aus dem Satz von PICARD-LINDELÖF.

Bei (2) sind $y(t) = \pm\sqrt{t}$ zwei Lösungen – zumindest wenn man für $t = 0$ damit zufrieden ist, daß $\lim_{t\to 0} 2\dot{y}(t)y(t) = 1$ ist. Eine Lösung mit für $t \to 0$ beschränkter Ableitung kann es natürlich nicht geben, denn für diese wäre $\dot{y}(0) \cdot y(0) = 0$.

Bei (3) gibt sind sämtliche Funktionen $y(t) = Ct^{5/3}$ Lösungen des Anfangswertproblems.

Bei (4) ist die partielle Ableitung $\dfrac{-\sin t \cdot \sin y}{1+t^8}$ der rechten Seite nach y beschränkt, so daß wir den Satz von PICARD-LINDELÖF anwenden können; das Anfangswertproblem ist also eindeutig lösbar.

Bei (5) dagegen sind $y(t) = t^2$ und $y(t) = 0$ zwei verschiedene Lösungen.

Bei (6) schließlich ist die partielle Ableitung $\dfrac{-1}{y^2}$ beschränkt in der Umgebung eines Punktes t mit $y(t) = 1$, also ist zumindest eine lokal eindeutige Lösung garantiert.

c) Finden Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differentialgleichungen, und überlegen Sie sich, wo t liegen muß, damit diese Lösungen existieren:

$$\dot y(t) = \frac{t^2}{e^{y(t)}} \qquad (1) \qquad \dot y(t) = \frac{e^t}{y(t)^2} \qquad (2) \qquad \dot y(t) = e^{t+y(t)} \qquad (3)$$

$$\dot y(t) = t^2 y(t)^2 \qquad (4) \qquad \dot y(t) = \frac{t^2}{y(t)^2} \qquad (5) \qquad \dot y(t) = \frac{1+y(t)^2}{1+t^2} \qquad (6)$$

Hinweis zu (6)*:* $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

Lösung: Bei allen diesen Differentialgleichungen funktioniert die Methode der Trennung der Veränderlichen:

$$\dot y(t) = \frac{t^2}{e^{y(t)}} \iff e^{y(t)}\dot y(t)\,dt = t^2 \iff \int e^y\,dy = \int t^2\,dt \iff e^y = \frac{t^3}{3} + C\,,$$

die allgemeine Lösung von (1) ist also $y = \ln\left(\frac{t^3}{3} + C\right)$, und sie existiert für $t > -\sqrt[3]{3C}$.

$$\dot y(t) = \frac{e^t}{y(t)^2} \iff \int y(t)^2\dot y(t)\,dt = \int e^t\,dt \iff \frac{y(t)^3}{3} = e^t + \widetilde C \iff y(t) = \sqrt[3]{3e^t + C}$$

mit $C = 3\widetilde C$. Da die Kubikwurzel $\mathbb{R}$ bijektiv auf sich selbst abbildet, existieren diese Lösungsfunktionen für alle $t \in \mathbb{R}$.

$$\dot y(t) = e^{t+y(t)} = e^t \cdot e^{y(t)} \iff \int e^{-y(t)}\dot y(t)\,dt = \int e^t\,dt \iff -e^{-y(t)} = e^t + \widetilde C\,.$$

Die Lösungen von (3) sind also die Funktionen $y(t) = -\ln(C - e^t)$; sie existieren für $C \ge 0$ und $t < \ln C$.

$$\dot y(t) = t^2 y(t)^2 \iff \int \frac{\dot y(t)}{y(t)^2} = \int t^2\,dt \iff -\frac{1}{y} = \frac{t^3}{3} + \widetilde C \iff y = \frac{-3}{t^3 + C}\,.$$

Die Lösung existiert nicht im Punkt $t = -\sqrt[3]{C}$ und kann damit auch nicht über diesen Punkt hinaus fortgesetzt werden.

$$\dot y(t) = \frac{t^2}{y(t)^2} \iff \int y(t)^2\dot y(t)\,dt = \int t^2\,dt \iff \frac{y(t)^3}{3} = \frac{t^3}{3} + \widetilde C \iff y(t) = \sqrt[3]{t^3 + C}\,;$$

die Lösung existiert für alle Werte von t.

$$\dot y(t) = \frac{1+y(t)^2}{1+t^2} \iff \frac{\dot y(t)}{1+y(t)^2} = \frac{1}{1+t^2} \iff \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dt}{1+t^2}$$
$$\iff \arctan y(t) = \arctan t + \widetilde{C} \iff y(t) = \tan(\arctan t + \widetilde{C}) = \frac{t+\tan\widetilde{C}}{1-t\tan\widetilde{C}}$$

Mit $C = \tan\widetilde{C}$ ist also
$$y(t) = \frac{t+C}{1-Ct}\,.$$
Die Lösung existiert in allen Intervallen, die den Punkt $t = \frac{1}{C}$ nicht enthalten.

d) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils an, wo die Lösungen existieren:

$$\begin{array}{lll}
\dot y(t) = \dfrac{t}{y(t)} & \text{mit}\quad y(0)=3 & (1)\\
\dot y(t) = \dfrac{t}{y(t)} & \text{mit}\quad y(0)=-3 & (2)\\
\dot y(t) = \sin^2 t\cdot\cos^2 y(t) & \text{mit}\quad y(0)=\dfrac{\pi}{4} & (3)\\
\dot y(t) = 1+y(t)^2 & \text{mit}\quad y(0)=0 & (4)\\
\dot y(t) = 1+y(t)^2 & \text{mit}\quad y(0)=1 & (5)\\
y(t)\,\dot y(t) + \big(1+y(t)^2\big)\sin t = 0 & \text{mit}\quad y(0)=1 & (6)
\end{array}$$

Lösung: Auch hier geht es um Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen. Unter der Anfangsbedingung $y(0)=3$ ist
$$\dot y(t) = \frac{t}{y(t)} \iff y(t)\dot y(t) = t$$
äquivalent zu
$$\int_3^y \eta\,d\eta = \int_0^t \tau\,d\tau \quad\text{oder}\quad \frac{y^2}{2} - \frac{9}{2} = \frac{t^2}{2}\,.$$
Multiplikation mit zwei und Auflösen nach y macht daraus $y = \sqrt{9+t^2}$, denn wegen der Anfangsbedingung $y(0)=3$ kommt für die Wurzel nur das positive Vorzeichen in Frage. Bei (2) dagegen ist $y(0)=-3$, so daß wir zwar links ab -3 integrieren, aber für y^2 trotzdem dasselbe Ergebnis bekommen, da $(-3)^2 = 3^2$ ist. Beim Wurzelziehen aber müssen wir jetzt das negative Vorzeichen nehmen, d.h. $y(t) = -\sqrt{9+t^2}$.

$$\dot y(t) = \sin^2 t\cdot\cos^2 y(t) \iff \frac{\dot y(t)}{\cos^2 y(t)} = \sin^2 t$$
wird unter der Anfangsbedingung $y(0)=\frac{\pi}{4}$ äquivalent zu
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{y} \frac{d\eta}{\cos^2\eta} = \int_0^t \sin^2\tau\,d\tau \quad\text{oder}\quad \tan y - \tan\frac{\pi}{4} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin t\cos t\,.$$
Da $\pi/4$ im Winkelmaß 45° sind, ist $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, also $y(t) = \arctan\left(1+\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sin t\cos t\right)$.

$$\dot y(t) = 1+y(t)^2 \iff \frac{\dot y(t)}{1+y(t)^2} = 1$$

wird unter der Nebenbedingung $y(0) = a$ zu

$$\int_a^y \frac{d\eta}{1+\eta^2} = \int_0^t d\tau \quad \text{oder} \quad \arctan y - \arctan a = t\,.$$

Da $\arctan 0 = 0$ und $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ ist, folgt

$$y(t) = \begin{cases} \tan t & \text{für (4)} \\ \tan(t + \frac{\pi}{4}) & \text{für (5)} \end{cases}.$$

$$y(t)\dot y(t) + \bigl(1 + y(t)^2\bigr)\sin t = 0 \iff \frac{y(t)\dot y(t)}{1+y(t)^2} = -\sin t$$

wird unter der Nebenbedingung $y(0) = 1$ äquivalent zu

$$\int_1^y \frac{\eta\,d\eta}{1+\eta^2} = -\int_0^t \sin\tau\,d\tau \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}\bigl((\ln(1+y^2) - \ln 2\bigr) = \cos t - 1\,.$$

(Beim ersten Integrand ist der zweifache Zähler Ableitung des Nenners.) Damit ist

$$\ln(1 + y(t)^2) = 2\cos t - 2 + \ln 2 \quad \text{und} \quad y(t) = \sqrt{2e^{2\cos t - 2} - 1}\,.$$

e) 1960 wurde anhand der damals vorliegenden Daten (von drei amerikanischen Elektrotechnikern) vorgeschlagen, daß die Weltbevölkerung $N(t)$ zum Zeitpunkt t gemäß dem Gesetz $\dot N(t) = aN(t)^b$ wachsen sollte mit $a > 0$ und $b > 1$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung!

Lösung: Wir schreiben die Gleichung um als $N(t)^{-b}\dot N(t) = a$; durch Integration wird daraus

$$\frac{N(t)^{1-b}}{1-b} = at + C \quad \text{oder} \quad N(t)^{1-b} = (at + C)(1-b)\,.$$

Da $1 - b$ negativ ist, $N(t)$ aber für jede realistische Lösung positiv, muß $at + C$ negativ sein. Schreiben wir $C = -at_0$ mit einer neuen Integrationskonstante t_0, so bekommen wir

$$N(t)^{1-b} = a(b-1)(t_0 - t) \quad \text{und} \quad N(t) = \frac{1}{\bigl(a(b-1)\bigr)^{\frac{1}{b-1}}} \cdot \frac{1}{(t_0 - t)^{\frac{1}{b-1}}}\,,$$

wobei der Exponent $\frac{1}{b-1}$ eine positive Zahl ist.

f) Diskutieren Sie das qualitative Verhalten der Lösungsfunktionen!

Lösung: Wesentlich ist natürlich nur der zweite Faktor; der erste ist einfach eine Konstante. Offensichtlich geht die Lösung für $t \to t_0$, also zu einem endlichen Zeitpunkt gegen unendlich; nach diesem Modell wird also die Weltbevölkerung zu einem endlichen Zeitpunkt unendlich groß.

g) Welche Bedingung muß die Integrationskonstante C mindestens erfüllen, falls diese Gleichung für den gegenwärtigen Zeitpunkt ein realistisches Modell sein sollte?

Lösung: Offensichtlich muß $t_0 > 2005{,}1$ sein, denn noch ist die Weltbevölkerung endlich. Viel Zeit bleibt aber nicht mehr: Nach FOERSTER, MORA und AMIOT ist die beste Schätzung für t_0 Freitag, der 13. November 2026, um 13^{13} Uhr; siehe ihre Arbeit *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026* in Science **138**, November 1960, Seite 1291–1295.