Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 20. Januar 2005

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{12\times 12}$ habe unter anderem die Eigenwerte ± 1 mit algebraischer Vielfachheit eins, $2+3i$ mit algebraischer Vielfachheit zwei und $-3+5i$ mit algebraischer Vielfachheit drei; die geometrische Vielfachheit sei jeweils eins.

a) Was ist $\det A$?

Lösung: Da A eine reelle Matrix ist, hat auch das charakteristische Polynom von A reelle Koeffizienten; nichtreelle Nullstellen können also nur als Paare konjugiert komplexer Zahlen auftreten. Damit ist zu jedem Eigenwert λ auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert derselben algebraischen Vielfachheit. Also gibt es außer den angegebenen Eigenwerten auch noch die Eigenwerte $2-3i$ mit algebraischer Vielfachheit zwei und $-3-5i$ mit algebraischer Vielfachheit drei. Die Summe der algebraischen Vielfachheiten der damit bekannten Eigenwerte ist $1+1+2\cdot 2+2\cdot 3 = 12$, also kennen wir alle Eigenwerte.

Die Determinante einer Matrix hängt nicht von der Basis ab; da wir die Matrix bezüglich einer geeigneten (komplexen) Basis auf Dreiecksgestalt bringen können mit den Eigenwerten entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit in der Diagonalen, ist somit

$$\begin{aligned}\det A &= 1\cdot(-1)\cdot(2+3i)^2\cdot(2-3i)^2\cdot(-3+5i)^2\cdot(-3-5i)^2\\ &= 1\cdot(-1)\,|2+3i|^4\cdot|-3+5i|^6\\ &= -\left(2^2+3^2\right)^2\cdot\left(3^2+5^2\right)^3 = -13^2\cdot 34^3 = -6642376\,.\end{aligned}$$

b) Welche Möglichkeiten gibt es für das Langzeitverhalten einer Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$?

Lösung: Die Eigenwerte ± 1 sorgen dafür, daß es Lösungen gibt, die direkt ins Unendliche *bzw.* zum Nullpunkt gehen. Die Eigenwerte $2\pm 3i$ führen zu Lösungen, die spiralförmig ins Unendliche gehen und $-3\pm 5i$ für solche, die sich spiralförmig auf den Nullpunkt zusammenziehen. Dazu kommen noch alle Arten von Lösungen, die zwei oder mehrere dieser Verhaltensweise bezüglich verschiedener Dimensionen kombinieren, also beispielsweise Lösungen, die spiralförmig auf eine Achse zulaufen, entlang dieser aber ins Unendliche (oder zum Nullpunkt) gehen und so weiter. Da es, mit Vielfachheiten gezählt, vier Eigenwerte mit negativem Realteil gibt, liegen alle Lösungen langfristig in der Umgebung eines achtdimensionalen Teilraums von $\mathbb{R}^{12}$.

c) Welche dieser Möglichkeiten wird am häufigsten zu beobachten sein?

Lösung: Falls nicht gerade alle Koeffizienten der Exponentialfunktionen mit positivem Realteil im Exponenten verschwinden, geht die Lösung ins Unendliche, wobei im Allgemeinen sowohl Achsen existieren, auf denen die entsprechenden Lösungskomponenten direkt nach Unendlich gehen, als auch Ebenen, in denen dies spiralförmig geschieht.

d) Schreiben Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 0$$

um in ein äquivalentes System von Differentialgleichungen erster Ordnung und bestimmen Sie so ihre Lösung!

Lösung: Wir führen den neuen Namen $z(t)$ für $\dot{y}(t)$ ein und erhalten dann das System

$$\begin{pmatrix} \dot{y}(t) = z(t) \\ \dot{z}(t) = -y(t) - z(t) \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat das charakteristische Polynom

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)+1 = \lambda^2+\lambda+1 = \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\,;$$

die Eigenwerte sind also

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\,.$$

Damit sind alle Lösungsfunktionen Linearkombinationen von $e^{(-1/2 \pm i\cdot\sqrt{3}/2)t}$. Die reellen Lösungen lassen sich allerdings übersichtlicher darstellen als die reellen Linearkombinationen von $e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}t/2)$ und $e^{-t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)$.

e) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) - \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - y(t) = 0\,!$$

Lösung: Die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0\,.$$

VIÈTE schlägt die Lösungskandidaten ± 1 vor, von denen offensichtlich nur $\lambda = 1$ wirklich eine Lösung ist. Die beiden anderen erhält man entweder durch Polynomdivision

$$(\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + 1$$

oder nach VIÈTE: Ihre Summe muß null sein und ihr Produkt eins, also kommen nur i und $-i$ in Frage. Die allgemeine Lösung ist daher

$$y(t) = ae^t + be^{it} + ce^{-it} = ae^t + \beta\cos t + \gamma\sin t$$

mit beliebigen Konstanten $a, b, c, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

f) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) + 4y^{(3)}(t) + 6\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + y(t) = 0\,!$$

Lösung: Wer die binomische Formel kennt, sieht sofort, daß die charakteristische Gleichung hier

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1 = (\lambda+1)^4 = 0$$

ist; wir haben also die vierfache Nullstelle $\lambda = -1$. Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(t) = (at^3 + bt^2 + ct + d)e^{-t} \quad \text{mit} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\,.$$

g) Bestimmen Sie Basen sowohl für den reellen als auch den komplexen Lösungsraum der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) - 4y^{(3)}(t) + 8\ddot{y}(t) - 8\dot{y}(t) + 4y(t) = 0\,!$$

Hinweis: $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$

Lösung: Nach dem Hinweis ist die linke Seite der charakteristischen Gleichung Quadrat des Polynoms

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1\,,$$

die Nullstellen sind also $1 \pm i$ mit, bezüglich der charakteristischen Gleichung, Vielfachheit jeweils zwei. Eine mögliche Basis des komplexen Lösungsraums bilden daher die vier Funktionen

$$e^{(1+i)t}, \quad e^{(1-i)t}, \quad te^{(1+i)t} \quad \text{und} \quad te^{(1-i)t}\,;$$

eine andere, die gleichzeitig Basis des reellen Lösungsraums ist, bilden die Funktionen

$$e^{-t}\cos t, \quad e^{-t}\sin t, \quad te^{-t}\cos t \quad \text{und} \quad te^{-t}\sin t\,.$$

h) Bestimmen Sie die sämtlichen reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 13y(t) = 40\sin 3t \tag{1}$$
$$y^{(3)}(t) + 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = \cos t \tag{2}$$
$$y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 80\sin 3t \tag{3}$$
$$y^{(4)}(t) - 16y(t) = 80 - 48t \tag{4}$$
$$y^{(4)}(t) + 8\ddot{y}(t) + 16y(t) = 400 \tag{5}$$

Lösung: (1) hat die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = (\lambda + 2)^2 + 9 = 0$$

mit den beiden Wurzeln $-2 \pm 3i$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also eine Linearkombination der beiden Funktionen $e^{-2t}\cos 3t$ und $e^{-2t}\sin 3t$.
Da (1) die Differentialgleichung einer erzwungenen Schwingung mit nichtverschwindendem Dämpfungsterm ist, wissen wir, daß es eine ungedämpfte Lösung gibt, die mit der anregenden Frequenz schwingt. Setzen wir

$$y(t) = a\cos 3t + b\sin 3t\,,$$

so ist $\dot{y}(t) = -3a\sin 3t + 3b\cos 3t$ und $\ddot{y}(t) = -9a\cos 3t - 9b\sin 3t$, also

$$y(t) + 4\dot{y}(t) + 13y(t) = (4a + 12b)\cos 3t + (4b - 12a)\sin 3t\,.$$

Dies muß gleich der rechten Seite von (1) sein, d.h.

$$4a + 12b = 0 \quad \text{und} \quad 4b - 12a = 40\,.$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu $a = -3b$, und damit wird die zweite zu $4b + 36b = 40$, d.h. $b = 1$ und $a = -3$. Die allgemeine Lösung von 1 ist daher

$$y(t) = -3\cos 3t + \sin 3t + e^{-2t}(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Die charakteristische Gleichung von (2) ist

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0$$

mit der dreifachen Nullstelle $\lambda = -1$; der Lösungsraum der der homogenen Gleichung wird also aufgespannt von e^{-t}, te^{-t} und t^2e^{-t}.

Da die rechte Seite eine reine Schwingung ist, können wir spekulieren, daß es unter den Lösungen von (2) vielleicht eine reine Schwingung derselben Frequenz gibt, versuchen also unser Glück mit dem Ansatz $y(t) = a\cos t + b\sin t$. Dann ist

$$y^{(3)}(t) + 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = (2b - 2a)\cos t - (2a + 2b)\sin t\,;$$

unsere Spekulation war somit erfolgreich, falls wir $a, b \in \mathbb{R}$ finden können mit $2(b-a) = 1$ und $a+b = 0$. Einsetzen von $b = -a$ in die erste Gleichung ergibt $-4a = 1$, also ist $a = -\frac{1}{4}$ und $b = \frac{1}{4}$. Damit kennen wir die allgemeine Lösung

$$y(t) = -\frac{1}{4}\cos t + \frac{1}{4}\sin t + e^{-t}(C_0 + C_1 t + C_2 t^2) \quad \text{mit} \quad C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ von (3) hat offensichtlich die Nullstelle $\lambda = -1$; Division der rechten Seite durch $(\lambda + 1)$ oder der Satz von VIÈTE zeigen, daß $\lambda = \pm i$ die beiden anderen sind. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also

$$y(t) = C_0 e^{-t} + C_1\cos t + C_2\sin t \quad \text{mit} \quad C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Der Ansatz

$$y(t) = a\cos 3t + b\sin 3t$$

für eine reine Schwingung mit der Kreisfrequenz drei der rechten Seite führt auf

$$y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = -(8a + 24b)\cos 3t + (24a - 8b)\sin 3t\,.$$

Dies ist gleich $80\sin 3t$, wenn $8a + 24b = 0$, also $a = -3b$ und $24a - 8b = 80$ oder $-80b = 80$, also $b = -1$ ist. Damit kennen wir die allgemeine Lösung

$$y(t) = 3\cos 3t - \sin 3t + C_0 e^{-t} + C_1\cos t + C_2\sin t \quad \text{mit} \quad C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(4) hat die charakteristische Gleichung $\lambda^4 - 16 = 0$ mit Wurzeln ± 2 und $\pm 2i$; die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + C_3\cos 2t + C_4\sin 2t\,.$$

Die rechte Seite von (4) ist linear; wir könnten also rein spekulativ versuchen, ob es vielleicht eine lineare Lösung $y(t) = at + b$ gibt. Deren vierte Ableitung verschwindet natürlich, d.h. für eine solche Lösung müßte

$$-16y(t) = 80 - 48t \quad \text{oder} \quad y(t) = 3t - 5$$

sein. Da die vierte Ableitung dieser Funktion verschwindet, ist sie tatsächlich eine Lösung. Die allgemeine Lösung von (4) ist somit

$$y(t) = 3t - 5 + C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + C_3\cos 2t + C_4\sin 2t \quad \text{mit} \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$$

(5) schließlich hat die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 + 4)^2 = 0$$

mit den jeweils doppelten Nullstellen $\lambda = \pm 2i$. Der Lösungsraum der homogenen Gleichung wird also aufgespannt von den Funktionen

$$\cos 2t, \quad \sin 2t, \quad t\cos 2t \quad \text{und} \quad t\sin 2t\,.$$

Wenn wir sehr mutig sind, können wir hoffen, daß es vielleicht eine konstante Lösng von (5) gibt. Deren sämtliche Ableitungen verschwinden, also muß $16y(t) = 400$ oder $y(t) \equiv 50$

sein, was die Differentialgleichung auch tatsächlich löst. Die allgemeine Lösung von (5) ist daher

$$y(t) = 50 + (C_1 t + C_2)\cos 2t + (C_3 t + C_4)\sin 2t \quad \text{mit} \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}\,.$$

i) Formen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 2t \cdot \big(y(t) - 2\big)$ mit $y(0) = 1$ um in eine Fixpunktgleichung, und berechnen Sie die ersten Iterationen! Erraten Sie anhand dieser die Lösungsfunktion, und bestätigen Sie dies durch Einsetzen!

NB: Leider kam ich in der heutigen Vorlesung nicht mehr zu der Theorie, die zur Lösung dieser Aufgabe notwendig ist. Damit ist auch Aufgabe 3 des aktuellen Übungsblatts mit dem aktuellen Vorlesungsstand nicht lösbar. Für die Scheinvergabe wird daher davon ausgegangen, daß bei diesem Übungsblatt nur 17 Punkte erreichbar sind. Eventuelle Lösungen werden aber trotzdem gewertet.

Lösung: Wir schreiben die Differentialgleichung um in

$$y(t) = 1 + \int_0^t 2\tau \cdot \big(y(\tau) - 2\big)\, d\tau$$

und beginnen mit der konstanten Funktion $y_0(t) \equiv 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= 1 + \int_0^t 2\tau \cdot \big(y_0(\tau) - 2\big)\, d\tau = 1 + \int_0^t (-2\tau)\, d\tau = 1 - t^2 \\
y_2(t) &= 1 + \int_0^t 2\tau \cdot \big(y_1(\tau) - 2\big)\, d\tau = 1 + \int_0^t 2\tau(-1 - \tau^2)\, d\tau = 1 - t^2 - \frac{t^4}{2} \\
y_3(t) &= 1 + \int_0^t 2\tau \cdot \big(y_2(\tau) - 2\big)\, d\tau = 1 + \int_0^t 2\tau(-1 - \tau^2 - \tfrac{1}{2}\tau^4)\, d\tau = 1 - t^2 - \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6}\,.
\end{aligned}$$

Dies sieht nach Fakultäten im Nenner aus, allerdings sind die Exponenten doppelt so groß wie bei der Exponentialfunktion und auch die Vorzeichen sind, abgesehen vom ersten, minus statt plus. Also müssen wir e^{t^2} betrachten und dies geeignet modifizieren:

$$-e^{t^2} = -1 - t^2 - \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} - \cdots \quad \Longrightarrow \quad 2 - e^{t^2} = 1 - t^2 - \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} - \cdots\,.$$

Wir können daher unser Glück versuchen mit $y(t) = 2 - e^{t^2}$: Dann ist

$$\dot{y}(t) = -2te^{t^2} = 2t(-e^{t^2}) = 2t\big(y(t) - 2\big)\,,$$

die erratene Funktion ist also tatsächlich eine Lösung.