Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 20. Januar 2005

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{12\times 12}$ habe unter anderem die Eigenwerte ± 1 mit algebraischer Vielfachheit eins, $2+3i$ mit algebraischer Vielfachheit zwei und $-3+5i$ mit algebraischer Vielfachheit drei; die geometrische Vielfachheit sei jeweils eins.

a) Was ist $\det A$?

b) Welche Möglichkeiten gibt es für das Langzeitverhalten einer Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$?

c) Welche dieser Möglichkeiten wird am häufigsten zu beobachten sein?

d) Schreiben Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 0$$

um in ein äquivalentes System von Differentialgleichungen erster Ordnung und bestimmen Sie so ihre Lösung!

e) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) - \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - y(t) = 0\,!$$

f) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) + 4y^{(3)}(t) + 6\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + y(t) = 0\,!$$

g) Bestimmen Sie Basen sowohl für den reellen als auch den komplexen Lösungsraum der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) - 4y^{(3)}(t) + 8\ddot{y}(t) - 8\dot{y}(t) + 4y(t) = 0\,!$$

Hinweis: $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$

h) Bestimmen Sie die sämtlichen reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 13y(t) = 40\sin 3t \tag{1}$$
$$y^{(3)}(t) + 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = \cos t \tag{2}$$
$$y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 80\sin 3t \tag{3}$$
$$y^{(4)}(t) - 16y(t) = 80 - 48t \tag{4}$$
$$y^{(4)}(t) + 8\ddot{y}(t) + 16y(t) = 400 \tag{5}$$

i) Formen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 2t \cdot \big(y(t) - 2\big)$ mit $y(0) = 1$ um in eine Fixpunktgleichung, und berechnen Sie die ersten Iterationen! Erraten Sie anhand dieser die Lösungsfunktion, und bestätigen Sie dies durch Einsetzen!