WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 23. Dezember 2004

a) Konstruieren Sie zu einer gegebenen Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und einer Konstanten $\Omega > 0$ eine Funktion g mit der Eigenschaft, daß $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega)$ ist für $|\omega| \le \Omega$ und $\widehat{g}(\omega) = 0$ für $|\omega| > \Omega$!

Lösung: $h(\omega)$ sei der Rechteckimpuls mit der Eigenschaft, daß $h(\omega) = 1$ ist für $|\omega| \le \Omega$ und $h(\omega) = 0$ sonst. Dann soll also gelten $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot h(\omega)$. Also ist die FOURIER-Transformierte der gesuchten Funktion das Produkt der FOURIER-Transformierten von f und $\check{h}$, d.h. $g = f * \check{h}$ ist die Faltung von f mit $\check{h}$. Dabei ist

$$\check{h}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\Omega t} - e^{i\Omega t}}{it} = -\frac{\sin \Omega t}{\pi t} \,.$$

b) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2N+1} \delta\Big(t - \big(\tfrac{2N+1}{2} - k\big)\, d\Big)\,!$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \sum_{k=0}^{2N+1} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \left(\frac{2N+1}{2} - k\right) d\right) dt = \sum_{k=0}^{2N+1} e^{i\omega\left(\frac{2N+1}{2} - k\right)d} = e^{i\omega \frac{2N+1}{2} d} \sum_{k=0}^{2N+1} e^{-i\omega k d} \\
&= e^{i\omega \frac{2N+1}{2} d} \sum_{k=0}^{2N+1} \left(e^{-i\omega d}\right)^k = e^{i\omega \frac{2N+1}{2} d} \frac{1 - e^{-i\omega d(2N+2)}}{1 - e^{-i\omega d}} = \frac{e^{i\omega(N+1)d}}{e^{i\omega \frac{d}{2}}} \frac{1 - e^{-i\omega d(2N+2)}}{1 - e^{-i\omega d}} \\
&= \frac{e^{i\omega(N+1)d} - e^{-i\omega(N+1)d}}{e^{i\omega\frac{d}{2}} - e^{i\omega\frac{d}{2}}} = \frac{\sin(N+1)\omega d}{\sin \omega \frac{d}{2}} \,.
\end{aligned}$$

c) Sei nun $a < \frac{d}{2}$ eine Konstante und $g(t) = 1$, falls es eine eine ganze Zahl $0 \le k \le 2N+1$ gibt, so daß $\left|t - \left(\frac{2N+1}{2} - k\right) d\right| \le \frac{a}{2}$ ist; ansonsten sei $g(t) = 0$. Berechnen Sie auch die FOURIER-Transformierte von g!

Lösung: g ist die Faltung der gerade betrachteten Funktion f mit einem Rechteckimpuls der Breite a, also ist $\widehat{g}(\omega)$ das Produkt von $\widehat{f}(\omega)$ mit dessen FOURIER-Transformierter

$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\omega t}\, dt = -\frac{e^{-i\omega a/2} - e^{-\omega a/2}}{i\omega} = 2\frac{\sin \omega \frac{a}{2}}{\omega} \,,$$

d.h.

$$\widehat{g}(\omega) = 2\frac{\sin(N+1)\omega d}{\sin \omega \frac{d}{2}} \cdot \frac{\sin \omega \frac{a}{2}}{\omega} \,.$$

d) Ein Student habe zum Zeitpunkt $t = 0$ der Modulklausur seinen maximalen Wissenstand in Höherer Mathematik erreicht. Wenn man davon ausgeht, daß er einen gewissen Bruchteil β davon nie wieder vergißt, erfüllt der Anteil $w(t)$, den er zur Zeit t nach der Prüfung noch beherrscht, nach dem deutschen Psychologen HERMANN EBBINGHAUS (1850–1909) die Differentialgleichung $\dot{w}(t) = -\gamma \cdot \big(w(t) - \beta\big)$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $w(t)$!

Lösung: Man kann natürlich ausmultiplizieren und die allgemeine Formel aus der Vorlesung anwenden; einfacher ist es aber, die Funktion $y(t) = w(t) - \beta$ zu betrachten. Diese hat dieselbe Ableitung wie $w(t)$, genügt also der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = -\gamma y(t) \quad \text{mit Lösung} \quad y(t) = Ce^{-\gamma t}\,.$$

Also ist $w(t) = \beta + Ce^{-\gamma t}$. Dabei muß die Integrationskonstante C so bestimmt werden, daß $w(0) = \beta + C = 100\%$ ist, d.h. $C = 1 - \beta$.

e) Für einen speziellen Studenten sei $\beta = 10\%$ und $w(1\,\text{Jahr}) = 60\%$. Wieviel hat er (ohne zusätzliches Lernen) bis zum Wiederholungstermin nach einem halben Jahr vergessen?

Lösung: In diesem Fall ist C gleich 90% und $w(t) = 0{,}1 + 0{,}9e^{-\gamma t}$. Außerdem ist, wenn wir die Zeit in Jahren messen,

$$w(1) = 0{,}1 + 0{,}9e^{-\gamma} = 0{,}6 \Longrightarrow e^{-\gamma} = \frac{5}{9} \Longrightarrow \gamma = -\ln\frac{5}{9} \approx 0{,}5877866648\,.$$

Mithin ist $w(\frac{1}{2}) = 0{,}1 + 0{,}9e^{\frac{1}{2}\ln\frac{5}{9}} = 0{,}1 + 0{,}9e^{\ln\sqrt{\frac{5}{9}}} = 0{,}1 + 0{,}9\sqrt{\frac{5}{9}} \approx 0{,}7708203933$ ungefähr 77%. Er hat also bis zum Wiederholungstermin etwa 23% des Stoffs vergessen. Alternativ, ohne Berechnung von γ: $w(\frac{1}{2}) = 0{,}1+0{,}9e^{-\gamma/2} = 0{,}1+0{,}9\sqrt{e^{-\gamma}} = 0{,}1+0{,}9\sqrt{\frac{5}{9}}$.

f) Ein Erwachsener atmet etwa 16 Mal pro Minute je einen halben Liter Luft ein; die ausgeatmete Luft enthält 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Angenommen, 30 Studenten sitzen in einem nicht gelüfteten Seminarraum von $40\,\mathrm{m}^3$, dessen Luft anfänglich 20% Sauerstoff enthält. Wieviel enthält sie noch nach 90 Minuten?

Lösung: Da die Zahlen ohnehin nur ungefähr stimmen, müssen wir nicht unbedingt mit der hier kleinstmöglichen Zeiteinheit von 1/16 Minute rechnen, sondern können, ohne großen Einfluß auf das Ergebnis, mit vollen Minuten rechnen, wodurch sich angenehmere Zahlen ergeben.
Der Seminarraum enthält $V = 40\,\mathrm{m}^3$ Luft, dessen Sauerstoffanteil zur (in Minuten gemessenen) Zeit t gleich $y(t)$ sei. Jede Minute werden

$$30 \times 16 \times \frac{1}{2} = 240$$

Liter Luft eingeatmet; da Tausend Liter gleich einem Kubikmeter sind, ist das $\frac{240}{40000} = \frac{6}{1000}$ des Gesamtvolumens. Vorher war die Sauerstoffmenge $y(t)V$; nachher ist sie

$$\frac{6}{1000} \cdot \frac{8}{10} y(t)V + \frac{994}{1000} y(t)V = \frac{48 + 9940}{10000} y(t)V = \frac{9988}{10000} y(t)V\,,$$

da der Sauerstoffgehalt der nicht eingeatmeten Luft natürlich konstant bleibt. Damit sinkt der Sauerstoffgehalt pro Minute um $\frac{12}{10000} y(t)$, d.h.

$$\dot{y}(t) = -\frac{12}{10000} y(t) \quad \text{und} \quad y(t) = Ce^{-\frac{12}{10000}} y(t)\,.$$

Die Integrationskonstante ist $C = y(0) = 20\%$ und

$$y(90) = \frac{1}{5}e^{-\frac{12\cdot 90}{10000}} = \frac{1}{5}e^{-\frac{108}{1000}} \approx 0{,}1795255193\,.$$

Der Sauerstoffgehalt ist also auf knapp 18% gesunken.

g) Die stetig differenzierbare Funktion $y(t)$ erfülle die Gleichungen $\dot y(t)^2 = 1$ und $y(1) = 0$. Was können Sie über $y(t)$ sagen?

Lösung: Da $y(t)$ stetig differenzierbar ist, ist $\dot y(t)$ stetig, muß also entweder konstant gleich eins oder konstant gleich minus eins sein. Damit gibt es die beiden Lösungsklassen $y(t) = \pm t + C$; die Anfangsbedingung $y(1) = 0$ erfüllen

$$y(t) = t - 1 \quad \text{und} \quad y(t) = -t + 1\,.$$

h) Bestimmen Sie für $\lambda_i \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum des Differentialgleichungssystems

$$\dot y_1(t) = \lambda_1 y_1(t), \quad \dot y_2(t) = \lambda_2 y_2(t), \quad \dots \quad \dot y_n(t) = \lambda_n y_n(t)\ !$$

Lösung: Da jede Funktion nur in einer Gleichung vorkommt, ist $y_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$ mit einer beliebigen Integrationskonstanten C_i; der Lösungsraum besteht also aus allen Funktionen

$$\vec y\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{beliebig}\,.$$

Insbesondere ist der Lösungsraum n-dimensional.

i) Erraten Sie eine spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot x(t) = y(t), \quad \dot y(t) = 1 - x(t)$$

und geben Sie dann die allgemeine Lösung dieses Systems an!

Lösung: Wir können z.B. schauen, ob es eine Gleichgewichtslösung gibt, d.h. eine Lösung, bei der beide Funktionen konstant sind. Dann verschwinden die Ableitungen, das System wird also zu

$$0 = y(t) \quad \text{und} \quad 0 = 1 - x(t)\,.$$

Damit ist $x(t) \equiv 1$ und $y(t) \equiv 0$ eine spezielle Lösung.
Für eine beliebige Lösung $\binom{x(t)}{y(t)}$ erfüllt die Differenz $\binom{u(t)}{v(t)}$ zu dieser speziellen Lösung das homogene Gleichungssystem

$$\dot x(t) = y(t) \quad \text{und} \quad \dot y(t) = -x(t)\,.$$

Für jede Lösung ist

$$\ddot x(t) = \dot y(t) = -x(t), \quad \text{also} \quad \ddot x(t) + x(t) = 0\,.$$

Dies ist die wohlbekannte Schwingungsgleichung mit allgemeiner Lösung

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t\,.$$

Daraus ergibt sich sofort $y(t) = \dot{x}(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$.
Die allgemeine Lösung des ursprünglichen Systems ist daher

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1 \\ -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

j) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\dot{y}(t) + y \cdot \sin t = 0$!
(*Hinweis:* Was ist $\frac{d}{dt} \ln y(t)$?)

Lösung:

$$\frac{d}{dt} \ln y(t) = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = -\sin t \Longrightarrow \ln y(t) = \cos t + C \Longrightarrow y(t) = \widetilde{C} e^{\cos t} \quad \text{mit} \quad \widetilde{C} \in \mathbb{R}.$$

(Tatsächlich hätte man natürlich, wie in der Vorlesung bei $\dot{y}(t) = \lambda y(t)$, eine Fallunterscheidung bezüglich des Vorzeichens von $y(t)$ machen müssen; der zweite Folgepfeil oben ist strenggenommen falsch, und $\ln y(t)$ ist *a priori* nicht unbedingt definiert.)

FROHE WEIHNACHTEN

und

VIEL ERFOLG BEI DEN KLAUSUREN IM NEUEN JAHR!