Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515
A5, Zimmer C201

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 16. Dezember 2004

*a)* Gegeben sei ein trigonometrisches Polynom $f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t}$. Was ist die Fourier-Transformation von f im Distributionensinn? Können Sie diese durch Dirac-Distributionen ausdrücken?

**Lösung:**

$$\widehat{T}_f(\varphi) = T_f(\widehat{\varphi}) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(t)e^{k\cdot i\omega t}\,dt = \sum_{k=-N}^{N} c_k \cdot 2\pi\,\check{\widehat{\varphi}}(k\omega) = 2\pi \sum_{k=-N}^{N} c_k\varphi(k\omega)$$
$$= 2\pi \sum_{k=-N}^{N} c_k\Delta_{k\omega}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\pi \sum_{k=-N}^{N} c_k\delta(t-k\omega)\right)\varphi(t)\,dt$$

*b)* *ditto* für $f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{N} \sin \ell\omega t$

**Lösung:**

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{N}\big(\cos k\omega t + \sin k\omega t\big) = 1 + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}}{2} + \frac{e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}}{2i}\right)$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1-i}{2} e^{ik\omega t} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1+i}{2} e^{-ik\omega t}.$$

Damit ist alles zurückgeführt auf die vorige Frage.

*c)* *ditto* für $f(t) = t$

**Lösung:**

$$\widehat{T}_f(\varphi) = T_f(\widehat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} t\widehat{\varphi}(t)\,dt = -i\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\widehat{\varphi}}(t)\,dt = -2\pi i\check{\dot{\widehat{\varphi}}}(0) = -2\pi i\dot{\varphi}(0)$$
$$= 2\pi i\dot{\Delta}_0(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i\dot{\delta}(t)\,\varphi(t)\,dt\,.$$

*d)* Berechnen Sie für $g_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{für } |t| \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und eine stark abfallende Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt\,!$$

Ist $\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt\,?$

**Lösung:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\varphi(t)}{a}\,dt = \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi(t)\,dt$$

läßt sich nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung auch schreiben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt = \frac{\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)}{a}\varphi(\tau) = \varphi(\tau)$$

für ein geeignetes $\tau \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$; für $a \to 0$ geht $\tau \to 0$, also der Wert des Integrals gegen $\varphi(0)$. Genau das ist auch der Wert von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt\,.$$

*e)* Berechnen Sie für $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$ und $g_a(t)$ wie oben die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt\,!$$

Ist $\lim\limits_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt\,?$

**Lösung:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t)\,dt = \frac{1}{a}\int_{0}^{\frac{a}{2}} f(t)\,dt + \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{0} f(t)\,dt = \frac{1}{a}\int_{0}^{\frac{a}{2}} dt - \frac{1}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{0} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

unabhängig von $a$. Damit verschwindet auch der Limes für $a \to 0$.

Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt$ mit einem unstetigen $f$ würden die meisten Mathematiker nicht für sinnvoll halten; Ingenieure haben weniger Hemmungen und schreiben

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt = f(0) = 1\,,$$

was offensichtlich nicht gleich dem Limes der linken Seite ist. Gelegentlich definiert man das Integral auch als Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Limes von $f(t)$ für $t \to 0$; mit dieser Interpretation stimmt die Formel.

*f)* Berechnen Sie für $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [t] \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die Ableitung im Distributionensinn! Läßt sie sich durch DIRAC-Distributionen ausdrücken?

**Lösung:**

$$\dot{T}_f(\varphi) = -T_f(\dot{\varphi}) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot{\varphi}(t)\,dt = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{2n}^{2n+1} \dot{\varphi}(t)\,dt$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\big(\varphi(2n) - \varphi(2n+1)\big) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\varphi(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\Delta_m(\varphi)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\delta(t-m)\right)\varphi(t)\,dt$$

*g)* *ditto* für $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \le \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

**Lösung:**

$$\dot{T}_f(\varphi) = -T_f(\dot{\varphi}) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot{\varphi}(t)\,dt = -\int_{-\pi}^{\pi}\dot{\varphi}(t)\,dt = \varphi(-\pi) - \varphi(\pi)$$
$$= \Delta_{-\pi}(\varphi) - \Delta_{\pi}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\big(\delta(t+\pi) - \delta(t-\pi)\big)\varphi(t)\,dt$$

*h)* Berechnen Sie für dasselbe $g$ die Faltung $f_i * g$ mit folgenden Funktionen:
$f_1(t) = \sin t$, $\quad f_2(t) = \sin^2 t$, $\quad f_3(t) = 5t + 7$, $\quad f_4(t) = e^t$

**Lösung:**

$$(f_1 * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\sin(t-s)g(s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi}\sin(t-s)\,ds = \cos(t-\pi) - \cos(t+\pi) = 0$$
$$(f_2 * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\sin^2(t-s)g(s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(t-s)\,ds$$
$$= \frac{1}{2}\big(\sin(t-s)\cos(t-s) - (t-s)\big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\big(-(t-\pi) + (t+\pi)\big) = \pi$$
$$(f_3 * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\big(5(t-s)+7\big)g(s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi}\big(5(t-s)+7\big)\,ds = 10\pi t + 14\pi$$
$$(f_4 * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{t-s}g(s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi}e^{t-s}\,ds = e^{t+\pi} - e^{t-\pi} = e^t(e^{\pi} - e^{-\pi})$$

Die ersten beiden Werte hätte man auch ohne Rechnung bekommen: Faltung mit $g$ integriert eine Funktion über das Intervall der Länge $2\pi$ mit dem betrachteten Wert als Mittelpunkt. Für den Sinus ist dieses Intervall ein volles Periodenintervall, das Integral also Null. Wird $f_2(t) = \sin^2 t$ über ein Intervall der Länge $2\pi$ integriert, hat man zwei volle Perionen; das Integral hat offensichtlich denselben Wert wie das über $\cos^2$. Da $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ ist, ist die Summe der beiden Werte $2\pi$, jeder einzelne also $\pi$.

*i)* Berechnen Sie die Faltungsprodukte $\big(\delta(t) + \delta(t - \frac{\pi}{2})\big) * \sin t$ und $\big(\delta(t) + \delta(t-\pi)\big) * \sin t$ !

**Lösung:**

$$\big(\delta(t)+\delta(t-\frac{\pi}{2})\big) * \sin t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(\delta(t-s)+\delta(t-\tfrac{\pi}{2}-s)\big)\sin s\, ds = \sin t + \sin(t-\tfrac{\pi}{2}) = \sin t - \cos t$$

$$\big(\delta(t)+\delta(t-\pi)\big) * \sin t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(\delta(t-s)+\delta(t-\pi-s)\big)\sin s\, ds = \sin t + \sin(t-\pi) = 0$$

*j)* Zeigen Sie, daß die Funktion $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ quadratintegrierbar ist!

**Lösung:** $f(\omega)$ ist die Fourier-Transformierte von $g(t) = \begin{cases} 1/2 & \text{falls } |t| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$; da $g$ quadratintegrierbar ist, ist es nach dem Satz von Parseval auch $f$.

*k)* Was ist $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt$ ?

**Lösung:** Wieder nach Parseval ist mit obigen Bezeichnungen

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt = \|f\|_2^2 = 2\pi\|g\|_2^2 = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)^2\, dt = \pi\,.$$

*l)* Zeigen Sie, daß die Frequenzabschätzung aus dem Satz von Nyquist scharf ist!

**Lösung:** Man betrachte das Beispiel $\sin \Omega t$ mit Abtastung bei den Nullstellen.

*m)* Berechnen Sie das Faltungsprodukt von $f(x,y) = \sin x \cos y$ mit der zweidimensionalen Distribution $g(x,y) = \big(\delta(x+\frac{\pi}{2}) + \delta(x-\frac{\pi}{2})\big)\big(\delta(y+\frac{\pi}{2}) - \delta(y-\frac{\pi}{2})\big)$!

**Lösung:** Da Integration linear ist und jeder der beiden Faktoren von $g$ nur von einer der beiden Integrationsvariablen abhängt, können wir ausmultiplizieren und nacheinander die vier zweidimensionalen Distributionen $\delta(x \pm \frac{\pi}{2}) \cdot \delta(x \pm \frac{\pi}{2})$ mit $f$ falten. Die entsprechenden Faltungsintegrale sind

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-u, y-v) \cdot \left(\delta\Big(u \pm \frac{\pi}{2}\Big)\delta\Big(v \pm \frac{\pi}{2}\Big)\right) du\, dv = f\Big(x \pm \frac{\pi}{2}, y \pm \frac{\pi}{2}\Big)\,.$$

Wegen $\sin\big(x \pm \frac{\pi}{2}\big) = \pm \cos x$ und $\cos\big(y \pm \frac{\pi}{2}\big) = \mp \sin y$ ist $f\big(x \pm \frac{\pi}{2}, y \pm \frac{\pi}{2}\big) = \pm \cos x \sin y$, wobei rechts genau dann ein Pluszeichen steht, wenn links *verschiedene* Vorzeichen stehen. Das Produkt

$$g(x,y) = \delta\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big)\delta\Big(y+\frac{\pi}{2}\Big) - \delta\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big)\delta\Big(y-\frac{\pi}{2}\Big) + \delta\Big(x-\frac{\pi}{2}\Big)\delta\Big(y+\frac{\pi}{2}\Big) - \delta\Big(x-\frac{\pi}{2}\Big)\delta\Big(y-\frac{\pi}{2}\Big)$$

führt also insgesamt zu

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-u, y-v) g(u,v)\, du\, dv = -\cos x \sin y - \cos x \sin y + \cos x \sin y + \cos x \sin y = 0\,.$$