Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 16. Dezember 2004

a) Gegeben sei ein trigonometrisches Polynom $f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{k\cdot i\omega t}$. Was ist die Fourier-Transformation von f im Distributionensinn? Können Sie diese durch Dirac-Distributionen ausdrücken?

b) *ditto* für $f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{N} \sin \ell\omega t$

c) *ditto* für $f(t) = t$

d) Berechnen Sie für $g_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{für } |t| \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und eine stark abfallende Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt\,!$$

Ist $\lim\limits_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt$?

e) Berechnen Sie für $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \ge 0 \end{cases}$ und $g_a(t)$ wie oben die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt\,!$$

Ist $\lim\limits_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt$?

f) Berechnen Sie für $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [t] \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die Ableitung im Distributionensinn! Läßt sie sich durch Dirac-Distributionen ausdrücken?

g) *ditto* für $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \le \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

h) Berechnen Sie für dasselbe g die Faltung $f_i * g$ mit folgenden Funktionen:
$f_1(t) = \sin t, \qquad f_2(t) = \sin^2 t, \qquad f_3(t) = 5t + 7, \qquad f_4(t) = e^t$

i) Berechnen Sie die Faltungsprodukte $\big(\delta(t) + \delta(t - \frac{\pi}{2})\big) * \sin t$ und $\big(\delta(t) + \delta(t - \pi)\big) * \sin t\,!$

j) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ quadratintegrierbar ist!

k) Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$?

l) Zeigen Sie, daß die Frequenzabschätzung aus dem Satz von Nyquist scharf ist!

m) Berechnen Sie das Faltungsprodukt von $f(x, y) = \sin x \cos y$ mit der zweidimensionalen Distribution $g(x, y) = \big(\delta(x + \frac{\pi}{2}) + \delta(x - \frac{\pi}{2})\big)\big(\delta(y + \frac{\pi}{2}) - \delta(y - \frac{\pi}{2})\big)\,!$