Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 2. Dezember 2004

a) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ ist stark abfallend.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise bleibt $t^3f(t)=\dfrac{t^3}{1+t^2}$ nicht beschränkt für $t\to\pm\infty$.

b) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(t)=\dfrac{1}{\cosh t}$ ist stark abfallend.

Lösung: *Richtig:* Zunächst hat jede Ableitung von f die Form

$$f^{(n)}(t)=\frac{P_n(\sinh t,\cosh t)}{\cosh^{n+1}t}\,,$$

wobei $P_n(x,y)$ ein Polynom vom Gesamtgrad höchstens n ist: Für $n=0$ ist das klar mit $P_0(x,y)\equiv 1$, und $f^{(n+1)}(t)$ ist die Ableitung von $f^{(n)}(t)$, also ist nach der Quotientenregel

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(t)&=\frac{\cosh^{n+1}t\cdot\frac{d}{dt}P_n(\sinh t,\cosh t)-P_n(\sinh t,\cosh t)\cdot(n+1)\cosh^n t\sinh t}{\cosh^{2n+2}t}\\&=\frac{\cosh t\cdot\frac{d}{dt}P_n(\sinh t,\cosh t)-P_n(\sinh t,\cosh t)\cdot(n+1)\sinh t}{\cosh^{n+2}t}\,.\end{aligned}$$

Nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}P_n(\sinh t,\cosh t)=\frac{\partial}{\partial x}P_n(\sinh t,\cosh t)\cosh t+\frac{\partial}{\partial y}P_n(\sinh t,\cosh t)\sinh t$$

hat die Ableitung von $P_n(\sinh t,\cosh t)$ höchstens denselben Grad wie das Polynom selbst, also hat der Zähler höchstens Grad $n+1$, womit die Behauptung induktiv folgt. Insbesondere ist spätestens jetzt klar, daß $f(t)$ beliebig oft differenzierbar ist.
Wir schreiben den Nenner um als

$$\cosh^{n+1}t=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^{n+1}=e^{(n+1)t}\cdot\frac{(1+e^{-2t})^{n+1}}{2^{n+1}}=e^{(n+1)t}g(t)\,,$$

wobei $g(t)=(1+e^{-2t})^{n+1}/2^{n+1}$ für $t\to\infty$ durch positive Schranken nach oben und nach unten beschränkt bleibt. Genauso können wir ihn auch umschreiben als

$$\cosh^{n+1}t=e^{-(n+1)t}\cdot\frac{(1+e^{2t})^{n+1}}{2^{n+1}}=e^{-(n+1)t}\widetilde{g}(t)\,,$$

wobei $\widetilde{g}(t)$ für $t\to-\infty$ durch positive Schranken nach oben und nach unten beschränkt bleibt. Den Zähler können wir entsprechend schreiben als

$$P_n(\sinh t,\cosh t)=e^{-nt}h(t)=e^{nt}\widetilde{h}(t)\,,$$

wobei $h(t)$ für $t\to\infty$ und $\widetilde{h}(t)$ für $t\to-\infty$ betragsmäßig beschränkt bleibt. Insgesamt ist also

$$f^{(n)}(t)=e^{-t}m(t)=e^t\widetilde{m}(t)\,,$$

wobei $m(t)$ für $t\to\infty$ und $\widetilde{m}(t)$ für $t\to-\infty$ betragsmäßig beschränkt bleibt. Damit ist klar, daß auch für jedes $r\in\mathbb{N}_0$ der Betrag von $t^rf^{(n)}(t)$ für $t\to\pm\infty$ beschränkt bleibt.

c) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(t) = e^{-|t|}$ ist stark abfallend.

Lösung: *Falsch,* denn sie ist im Nullpunkt nicht differenzierbar.

d) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(t) = te^{-t}$ ist stark abfallend.

Lösung: *Falsch,* denn sie ist für $t \to -\infty$ nicht beschränkt.

e) Richtig oder falsch: Die Summe zweier stark abfallender Funktionen ist wieder stark abfallend.

Lösung: *Richtig:* Sie ist wieder beliebig oft differenzierbar, und

$$\left|t^r (f+g)^{(k)}(t)\right| = \left|t^r f^{(k)}(t) + t^r g^{(k)}(t)\right| \le \left|t^r f^{(k)}(t)\right| + \left|t^r g^{(k)}(t)\right|$$

ist beschränkt für alle $k, r \in \mathbb{N}_0$.

f) Richtig oder falsch: Ist f stark abfallend, so auch jede Potenz f^n mit $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: *Richtig:* Mit der Differenzierbarkeit gibt es keine Probleme, und jede Ableitung von $f^n(t)$ kann (via Kettenregel oder Produktregel) abgeschätzt werden durch Produkte von Ableitungen von $f(t)$.

g) Welche periodischen Funktionen sind stark abfallend?

Lösung: *Nur die Nullfunktion.* Falls die Funktion nämlich irgendwo einen von null verschiedenen Wert annimmt, ist $tf(t)$ für $t \to \pm\infty$ nicht mehr beschränkt.

h) Richtig oder falsch: Wenn die FOURIER-Transformierte von $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existiert, ist f stark abfallend.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise existiert die FOURIER-Transformierte eines Rechtecksimpulses, der als nicht differenzierbare Funktion aber nicht stark abfallend ist.

i) Die FOURIER-transformierbare Funktion f erfülle die Gleichung

$$\ddot{f}(t) + 4\dot{f}(t) - 3f(t) = g(t)$$

mit einer FOURIER-transformierbaren Funktion g. Drücken Sie $\widehat{f}(\omega)$ durch $\widehat{g}(\omega)$ aus!

Lösung: FOURIER-Transformation macht aus den beiden Seiten der Gleichung

$$-\omega^2\widehat{f}(\omega) + 4i\omega\widehat{f}(\omega) - 3\widehat{f}(\omega) = \widehat{g}(\omega) \quad \text{oder} \quad \widehat{f}(\omega) = -\frac{\widehat{g}(\omega)}{\omega^2 - 4i\omega + 3}\,.$$

j) Laut Vorlesung ist $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Konstruieren Sie mit Hilfe dieser Beziehung jene Stammfunktion $F(t)$ von $f(t) = t^n$, für die $F(0) = a$ ist!

Lösung: $F(t)$ erfüllt die Gleichung $\dot{F}(t) = f(t)$ und $F(0) = a$; daher ist

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = s\mathcal{L}\{F(t)\}(s) - a \quad \text{und}$$
$$\mathcal{L}\{F(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t^n\}(s) + \frac{a}{s} = \frac{n!}{s^{n+2}} + \frac{a}{s} = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{s^{n+2}} + \frac{a}{s} = \frac{1}{n+1}\mathcal{L}\{t^{n+1}\}(s) + \mathcal{L}\{a\}(s)\,.$$

Also ist $F(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} + a$, was man natürlich auch einfacher ohne LAPLACE-Transformation bekommen hätte.

k) Was ist $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s)$?

Lösung: $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s-\lambda) = \dfrac{1}{s-\lambda}$

l) Für welche $s \in \mathbb{C}$ existiert $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}\right\}(s)$?

Lösung: Für keine; das Integral hat stets Konvergenzprobleme an der unteren Grenze; *siehe Skriptum.*

m) Zeigen Sie: $\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$!

Lösung: Da man, absolute Konvergenz der Integrale vorausgesetzt, die Integration über t und die Differentiation nach s miteinander vertauschen kann, ist

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(f(t)e^{-st}\right)dt = -\int_0^\infty tf(t)e^{-st}\,dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s)\,.$$

n) Was ist $\mathcal{L}\{t^2f(t)\}(s)$?

Lösung: $\mathcal{L}\{t^2f(t)\}(s) = \mathcal{L}\big\{t\big(tf(t)\big)\big\}(s) = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = \dfrac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

o) Was ist $\mathcal{L}\{t^{2004}e^{-2005}\}(s)$?

Lösung: $\mathcal{L}\{t^{2004}e^{-2005}\}(s) = e^{-2005}\mathcal{L}\{t^{2004}\}(s) = \dfrac{2004!\,e^{-2005}}{s^{2005}} = \dfrac{2004!}{(es)^{2005}}$

Randbemerkung für Interessierte: Der Zahlenwert von 2004! ist

5332616809682622545403622943006811871969195966778055117754454008555538153705720712741346250241750089543678399378 68
8134686818130940343038160071502125478116837558043589448455100903712132857288150670297764534190529167838132786625 61
6900856488516708555479336425280314054750135175917114192207623138995227392551351576359542687842920591131298882746 38
5238205932082629806730022544656743817427664735208199271194663418285065243686910160343706169070216369824858286210 30
9758436822909360178889299689165455048198342024757652727839107944229420432744992000257696367965830315199056372703 34
2056939390468012430528635375944420028127682040424661625338788866815424481522743208668913933116318910807798899470 18
6008028254527505708920999895264061035531054652284805097520116490668055405001292265362761293310856392217841289827 96
2426102652564452898567904955263014868277450139417747957265830522841000416756490690762041366692877629046354245626 76
5119900346647923548249223764828132872910299124095199422890639639294229802600680374938999263370765795914992184024 52
1526578310434695494978921446602448817370696767542812630629928215984138529127073732676816435993000085837089121302 85
8460204590444993431122428450317950847764168960146528485207264028537566371271814122590288124798694747653630809513 67
8268849647825358721817551977781610932572733016334840680270888973892074068170504570883276139218415545119180079109 22
5564490239416634084052443527310936682054214025561303321713771338593237266601222508649786147554948607705541117863 36
2130779256967603380285820985650058299658213017619721950776511100260873827992885252768859609707793826965118497370 59
1155515096858729436665421052419240944998580343305946118236088491369609460427717648778666282449304230408689371269 13
4248162379873664935513428346643174817091580482921557475492436465418529810263304737341000487918890689839765507063 95
2040185879067016569958470686803883541130474097957363610761943935602494611902854800240439835184111084470116812851 50
1861727794430353012223133189453863189357946774722902890586818532416814022781220114590433433374483355137169339132 55
1433646106946478640668528683915087301141035264845155365137829933712463966481880420351318192464592288980882219236 29
2722031045561114537459077217773049405215559553451804056786744954053135220300277107974718625289071144417024921598 78
2499740727627601802752971394201706124829448088059132971327827108609187925071296132505110276466820767404190079471 76
4912895833257868197684653283714735785837166249650286780744001217981020344931286229992814035406357538431230771721 12
8170622608743006793371713167067443273811307622365391813455228639248214496214470751612507991032416186412800086851 57
1674720157453624805960065444943537554925365215677438079279629161522292718288933116425319747241126157114344395431 52
9748923321730823288963581610041391134822498939678157961226363379088572511016355848586110594672655219938868510167 31
7674967152902082016959268857586298197101255636256584532024952265399113642407974582312653819187791895902203271610 24
1334489844838065494285990836542384786517684476753468732113389067494304315709239329947940589465478020408122579056 38
9042673016590536701211882567948449856714116514789215125301862464582422368455629031947437367898066454785132133438 37
9778928073063999327584122440332459314873597206241241797843890470779614247633959174689164823729633286349074537922 63
2463726466860558632672157126796627494513579044357182413357620070104298490433461345601725054613300596709395981667 82
5091304272723587564950785854685942857360104509457807988208069149275660550553259638842654377789739989073400734750 58
6460349791627142770143690675010513001447036185521798965609042770791382267528991743350505343569385573242465998277 13
4289852199779380592347610397379871057328734057342640509590341815157006438910494907147544778045300541347549802737 20
5269704784906687983760985155836874285675047144786286879237602034225510700635812581927454838185774216596436551240 88
0811822468886429131608863341041569510773142193730737519864112324508307903400353368666991393081303406422370088319 24
2377141766680685026897981346315424284884097346195135107523479248335927903775446503548375416939720471165524554085 14
6051907207851793809163567212206526432154090474754224579534487144427910134677326942339381455880901743437180993579 46
2131090244712623294194541581882737918256471809006646288766025328077621996268261693011014121115541743724391523793 93
0765940773084539558469899008852096094919245957308850528350041545040473035308862835222581445970276336301478925662 44
1912311563283505974071000043278176664470953619544967027497770582287701450009741934395913569844819704024433400636 36
8314235423485385859177076669470334047879753209007573584251509912638237294842874140825861447939305588291939422500 46
5385541953666680579739880036693660804251721504315443355177817625457643838303671669927670763513830224240078990116 32
0935283470619803697544772334106553755422002158559293464607658165310195189018645757435765531684288211854047715065 43
8484900787403063362354638070550634151965773895419755164377934738451658081359916767141385207756474877997961347814 13
3056099995433018887688018206137038915989645602642963245677405397066579575208632869965194580316815279047956230587 45
7007296956351442972329838124948378565578392801952844855570407435463410598833657255167271264491922947274156836543 96
936192000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000 $\approx 5{,}332616810 \cdot 10^{5748}$

und $\frac{2004!}{e^{2005}} \approx 2{,}385285427 \cdot 10^{4009}$.

(Ich erwarte nicht, daß Sie diese Zahlenwerte in der Klausur auswendig kennen.)

p) Was ist $\mathcal{L}\{t^{2004}e^{-2005t}\}(s)$?

Lösung: $\mathcal{L}\{t^{2004}e^{-2005t}\}(s) = \mathcal{L}\{t^{2004}\}(s+2005) = \dfrac{2004!}{(s+2005)^{2005}}$

q) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0, \qquad x(0) = \sin a, \quad \dot{x}(0) = \cos a$$

via Laplace-Transformation und beweisen Sie so die Additionsformel für $\sin(t+a)$!

Lösung: Für $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$ ist $s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + X(s) = 0$, also

$$X(s) = \frac{s\sin a + \cos a}{s^2+1} = \sin a \cdot \frac{s}{s^2+1} + \cos a \cdot \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\sin a \cos t + \cos a \sin t\}(s)\,.$$

Da $\sin(a+t)$ das Anfangswertproblem offensichtlich löst, folgt (modulo der noch nicht gezeigten Umkehrbarkeit der LAPLACE-Transformation) $\sin(a+t) = \sin a \cos t + \cos a \sin t$.

r) Wie kann man auf ähnliche Weise die Additionsformel für den Kosinus herleiten?

Lösung: $\cos(a+t)$ löst das Anfangswertproblem $\ddot{x}(t) + x(t) = 0$ mit $x(0) = \cos a$ und $\dot{x}(0) = -\sin a$. Hier folgt entsprechend

$$X(s) = \frac{s\cos a - \sin a}{s^2+1} = \cos a \cos t \frac{s}{s^2+1} - \sin a \cdot \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\cos t \cos a - \sin t \sin a\}\,.$$

Somit ist $\cos(t+a) = \cos t \cos a - \sin t \sin a$.

s) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \lambda y(t)$ und $y(0) = c$ mit Hilfe von LAPLACE-Transformationen!

Lösung: $\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - c = \lambda\mathcal{L}\{y(t)\}$, also ist

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{c}{s-\lambda} = c\mathcal{L}\{1\}(s-\lambda) = \mathcal{L}\{ce^{\lambda t}\}(s) \Longrightarrow y(t) = ce^{\lambda t}\,.$$

t) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y^{(4)} - 16y(t) = 0$ mit $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 2$, $\ddot{y}(0) = 3$ und $y^{(3)}(0) = 0$ mit Hilfe einer Tabelle von LAPLACE-Transformationen!

Lösung: $\mathcal{L}\{y^{(4)}(t)\}(s) = s^4\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^3 - 2s^2 - 3s = 16\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, also ist

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{s^3+2s^2+3s}{s^4-16}\,.$$

In der Tabelle auf der Rückseite des Übungsblatts stehen LAPLACE-Transformationen mit Nenner $s^4 - \omega^4$ und Zähler s, s^2, s^3; mit $\omega = 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}(\cosh 2t + \cos 2t) + \frac{1}{2}(\sinh 2t + \sin 2t) + \frac{3}{8}(\cosh 2t - \cos 2t) \\ &= \frac{7}{8}\cosh 2t + \frac{1}{8}\cos 2t + \frac{1}{2}\sinh 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\,. \end{aligned}$$

u) Lösen Sie die Differentialgleichung $y^{(3)}(t) = y(t)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ und $\ddot{y}(0) = 0$!

Lösung: $\mathcal{L}\{y^{(3)}(t)\}(s) = s^3\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s) \Longrightarrow \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = 0 \Longrightarrow y(t) \equiv 0\,.$