WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515 A5, ZIMMER C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 18. November 2004

Falls Sie noch Probleme mit der Berechnung von FOURIER*-Reihen haben, sind die entsprechenden Beispiele der letzten Woche wichtiger als die meisten der folgenden Themen:*

a) Berechnen Sie die komplexe FOURIER-Reihe der Funktion $f(t) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{i\omega t}}$ für $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$!

Lösung: Das ist offensichtlich eine geometrische Reihe: $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{i\omega t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{e^{k\cdot i\omega t}}{2^k}$.

b) Schließen Sie daraus auf die reelle FOURIER-Reihe der Funktion
$f(t) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{i\omega t}} + \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-i\omega t}}$ für $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$!

Lösung: Der zweite Summand ist ganz entsprechend $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-i\omega t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{e^{-k\cdot i\omega t}}{2^k}$, insgesamt haben wir also (da der Term mit $k=0$ zweimal vorkommt)

$$f(t) = 1 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-k\cdot i\omega t}}{2^k} = 2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e^{k\cdot i\omega t}}{2^k} + \frac{e^{-k\cdot i\omega t}}{2^k}\right) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{2^{k-1}} .$$

c) Werten Sie die FOURIER-Reihe $\sum_{\ell=1}^{\infty} \dfrac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega}$ aus an der Stelle $t = \frac{T}{4}$ und berechnen Sie den numerischen Wert der entstehenden Summe!

Lösung: Für $t = \frac{T}{4}$ ist $\omega t = \frac{\pi}{2}$, also ist

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell\omega\frac{T}{4}}{\ell\omega} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\ell\pi}{2}}{\ell\omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\omega} ,$$

denn für gerade Werte von ℓ ist $\frac{\ell\pi}{2}$ ein ganzzahliges Vielfaches von π, so daß der Sinus verschwindet, und für ungerades $\ell = 2k+1$ ist $\sin\frac{\ell\pi}{2} = (-1)^k$.
Um den numerischen Wert zu berechnen nützen wir aus, daß die FOURIER-Reihe des Sägezahns überall gegen die Funktion konvergiert; speziell für $t = \frac{T}{4}$ hat diese den Wert $\dfrac{T}{4} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{T}{4} = \dfrac{T}{8}$, also ist $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)\omega} = \dfrac{T}{8}$.

Multiplikation mit ω liefert die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)} = \dfrac{\omega T}{8} = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$.

d) Gibt es eine stückweise stetige periodische Funktion f mit FOURIER-Reihe $\sum_{\ell=1}^{\infty} \dfrac{\sin \ell t}{\sqrt{\ell}}$?

Lösung: Für eine solche Funktion wäre $\sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell^2 = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell}$ die Summe der harmonischen Reihe, also divergent, was nach der BESSELschen Ungleichung bei der FOURIER-Reihe einer stückweise stetigen periodischen Funktion nicht sein kann.

(*Zur Erinnerung:* Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, denn

$$S_r = \sum_{k=2^r+1}^{2^r+1} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^r+1}^{2^r+1} \frac{1}{2^{r+1}} = \frac{2^r}{2^{r+1}} = \frac{1}{2}, \quad \text{so daß} \quad \sum_{k=1}^{2^N} \frac{1}{k} = \sum_{r=0}^{N-1} S_r \geq \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{2} = \frac{N}{2}\,.)$$

e) Gibt es eine stückweise stetige periodische Funktion f mit FOURIER-Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{\sqrt{2k+1}}$?

Lösung: Hier wäre entsprechend $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$, was ebenfalls divergiert, denn $2k+1 \leq 3k$ und

$$\frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{3k} \quad \text{d.h.} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

kann durch eine harmonische Reihe nach unten abgeschätzt werden.

f) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2}$ konvergiert, und finden Sie eine obere Schranke für ihren Grenzwert! (*Hinweis:* Die Reihe $S_f(t) = i\frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2+1} e^{ikt}$ ist aus der Vorlesung bekannt als FOURIER-Reihe eines periodisch fortgesetzten Sinus hyperbolicus.)

Lösung: Tatsächlich ging es in der Vorlesung um jene Funktion $f(t)$, die zwischen $-\pi$ und π mit $\sinh t$ übereinstimmt und ansonsten Periode 2π hat. In der FOURIER-Reihe ist

$$c_k = i\frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^k k}{k^2+1} \quad \text{und} \quad |c_k|^2 = \frac{\sinh^2 \pi}{\pi^2} \frac{k^2}{k^2+1}\,.$$

Nach der BESSELschen Ungleichung ist daher

$$\frac{\sinh^2 \pi}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2} \leq (f,\, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 t \, dt\,.$$

Da $k^2/(k^2+1)$ unabhängig ist vom Vorzeichen von k und für $k=0$ verschwindet, ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2}\,.$$

Damit folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2} \leq \frac{\pi^2}{2\sinh^2 \pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 t \, dt = \frac{\pi}{4\sinh^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 t \, dt\,.$$

Der Integrand kann umgeschrieben werden als

$$\sinh^2 t = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\cosh 2t - 1}{2}\,,$$

also ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cosh 2t - 1)\,dt = \left(\frac{\sinh 2t}{4} - \frac{t}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sinh 2\pi}{2} - \pi\,,$$

und wir erhalten das Ergebnis

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2} \le \frac{\pi}{4\sinh^2\pi}\left(\frac{\sinh 2\pi}{2} - \pi\right) = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{\sinh 2\pi - 2\pi}{\sinh^2\pi} \approx 0{,}769837\,.$$

g) Finden Sie obere Schranken für $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$!

Lösung: Für die erste Summe sind Rechteckschwingungen ein guter Ansatz: Für

$$f(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \le t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} \le t < T \end{cases} \quad \text{mit} \quad f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}$$

ist $S_f(t) = \dfrac{4h}{\pi}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)}$, speziell für $h = \dfrac{\pi}{4}$ also

$$b_\ell = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } \ell \\ \frac{1}{\ell} & \text{für ungerade } \ell \end{cases} \quad \text{und} \quad c_\ell = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } \ell \\ \frac{\pm i}{2\ell} & \text{für ungerade } \ell \end{cases}.$$

Damit ist $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ nach der BESSELschen Ungleichung kleiner oder gleich

$$(f,\,f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T h^2\,dt = h^2 = \frac{\pi^2}{16}\,,$$

also ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \le \frac{\pi^2}{8}\,.$

Für die zweite Summe betrachten wir Sägezahnimpule mit Periode 2π; für diese ist $\omega = 1$, so daß die FOURIER-Reihe laut Vorlesung $S_f(t) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell t}{\ell}$ ist. Diesmal ist $|c_k| = 1/2k$ für alle $k \ne 0$ und $c_0 = 0$, also

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le (f,\,f)\,.$$

Hier ist

$$\begin{aligned}(f,\,f) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{t-\pi}{2}\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{u^2}{4}\,du = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^3}{12} + \frac{\pi^3}{12}\right) = \frac{\pi^2}{12}\,,\end{aligned}$$

also $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le \frac{\pi^2}{6}\,.$

(Tatsächlich gilt nach dem Satz von PARSEVAL *in beiden Abschätzungen das Gleichheitszeichen.)*

h) Die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien periodisch mit Periode eins, und für $0 \le t < 1$ sei $f(t) = t$ und $g(t) = t^2$. Was ist $f * g$?

Lösung: Da wir wissen, daß $f * g$ wieder periodisch mit Periode eins ist, genügt es, $f * g(t)$ für $0 \le t < 1$ zu berechnen. Auch hier schon müssen wir das Integral aufspalten, um einen geschlossenen Ausdruck für den Integranden zu bekommen, etwa als

$$f * g(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^1 f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \int_t^1 f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\,.$$

Für das Intervall $0 \le \tau < t$ ist $t - \tau$ mindestens Null und höchstens gleich t; ist also $0 \le t < 1$, so liegt $t - \tau$ im Intervall $[0, 1)$, so daß $f(t - \tau) = t - \tau$ ist.
Für das Intervall $t < \tau \le 1$ ist $t - \tau$ negativ, kann aber für t aus dem Einheitsintervall nicht kleiner werden als -1. Somit ist dort $f(t - \tau) = t - \tau + 1$, also insgesamt

$$\begin{aligned} f * g(t) &= \int_0^t (t-\tau)\tau^2\,d\tau + \int_t^1 (t-\tau+1)\tau^2\,d\tau = \int_0^1 (t-\tau)\tau^2\,d\tau + \int_t^1 \tau^2\,d\tau \\ &= \left(\frac{t\tau^3}{3} - \frac{\tau^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 + \frac{\tau^3}{3}\Bigg|_t^1 = \frac{t}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{t^3}{3} = \frac{t-t^3}{3} + \frac{1}{12} \end{aligned}$$

im Einheitsintervall, periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$ mit Periode eins.
Man beachte, daß $f * g$ eine stetige Funktion ist, denn $t - t^3$ verschwindet bei $t = 0$ und bei $t = 1$.

i) Die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien periodisch mit Periode eins, und für $-\frac{1}{2} \le t < \frac{1}{2}$ sei $f(t) = t$ und $g(t) = t^2$. Was ist $f * g$?

Lösung: Hier gehen wir im wesentlichen genauso vor, allerdings bietet sich an, nun alle Integrale über eine Periode von $-\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{2}$ zu berechnen, da wir dann zumindest g einfach einsetzen können. Wir betrachten also nur Werte von t aus dem Intervall $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
Allgemein ist

$$-\frac{1}{2} \le t-\tau \Leftrightarrow \tau - t \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tau \le t + \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad t - \tau < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tau - t > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \tau > t - \frac{1}{2}\,.$$

Für $t \ge 0$ ist die erste Bedingung überall im Integrationsintervall erfüllt, die zweite allerdings nur für $\tau > t - \frac{1}{2}$; für kleinere τ liegt $t - \tau$ im Intervall zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$, d.h. $f(t - \tau) = t - \tau - 1$. Somit ist für $0 \le t < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} f * g(t) &= \int_{-\frac12}^{\frac12} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_{-\frac12}^{t-\frac12} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \int_{t-\frac12}^{\frac12} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \\ &= \int_{-\frac12}^{t-\frac12} (t-\tau-1)\tau^2\,d\tau + \int_{t-\frac12}^{\frac12} (t-\tau)\tau^2\,d\tau = \int_{-\frac12}^{\frac12} (t-\tau)\tau^2\,d\tau - \int_{-\frac12}^{t-\frac12} \tau^2 d\tau \\ &= \left(\frac{t\tau^3}{3} - \frac{\tau^4}{4}\right)\Bigg|_{-\frac12}^{\frac12} - \frac{\tau^3}{3}\Bigg|_{-\frac12}^{t-\frac12} = \frac{t}{12} - \frac{(t-\frac12)^3}{3} - \frac{1}{24} = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{6}\,. \end{aligned}$$

Für negative t dagegen ist stets $\tau \geq t-\frac{1}{2}$, aber $\tau \leq t+\frac{1}{2}$ ist nicht immer erfüllt. In diesem Fall liegt $t-\tau$ im Intervall zwischen $-\frac{3}{2}$ und $-\frac{1}{2}$, d.h. $f(t-\tau) = t-\tau+1$. Somit ist für $-\frac{1}{2} \leq t < 0$

$$\begin{aligned} f * g(t) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \int_{t+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} (t-\tau+1)\tau^2\,d\tau + \int_{t+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (t-\tau)\tau^2\,d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (t-\tau)\tau^2\,d\tau + \int_{t+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tau^2 d\tau \\ &= \left(\frac{t\tau^3}{3} - \frac{\tau^4}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{\tau^3}{3}\Bigg|_{t+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{t}{12} + \frac{1}{24} - \frac{(t+\frac{1}{2})^3}{3} = -\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{6}\,. \end{aligned}$$

Für beliebige reelle Zahlen wird die Funktion wieder durch periodische Fortsetzung berechnet. Man beachte, daß auch hier $f * g$ eine stetige Funktion ist.

j) Zeigen Sie: $$\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t\right) * \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} p_\ell \sin \ell\omega t\right) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k p_k \cos k\omega t\,!$$

Lösung: Über die EULERsche Formel $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ lassen sich leicht die komplexen FOURIER-Koeffizienten c_k von $\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin \ell\omega t\right)$ und d_k von $\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} p_\ell \sin \ell\omega t\right)$ berechnen:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2i}b_k & \text{für } k>0 \\ 0 & \text{für } k=0 \\ -\frac{1}{2i}b_{-k} & \text{für } k<0 \end{cases} \quad \text{und} \quad d_k = \begin{cases} \frac{1}{2i}p_k & \text{für } k>0 \\ 0 & \text{für } k=0 \\ -\frac{1}{2i}p_{-k} & \text{für } k<0 \end{cases}.$$

Die komplexen FOURIER-Koeffizienten der Faltung sind die Produkte $c_k d_k$, also $-\frac{1}{4}b_k p_k$ für $k \neq 0$ und Null für $k = 0$. Der Term mit Index k der komlexen FOURIER-Reihe und der mit Index $-k$ ergänzen sich daher zu $-\frac{1}{2}b_k p_k \cos k\omega t$, wie behauptet.

k) Was ist $$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t\right) * \left(\sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos k\omega t\right)\ ?$$

Lösung: Wir gehen genauso vor wie eben; der einzige Unterschied ist, daß nun die komplexen FOURIER-Koeffizienten c_k unabhängig vom Vorzeichen gleich $\frac{1}{2}a_{|k|}$ sind, entsprechend auch d_k. Also ist hier $c_k d_k = \frac{1}{4}a_k q_k$ für $k \neq 0$, wir erhalten somit bis aufs Vorzeichen dasselbe Ergebnis wie oben:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t\right) * \left(\sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos k\omega t\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k \cos k\omega t\,.$$