WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515
A5, ZIMMER C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 4. November 2004

a) Berechnen Sie die LAURENT-Reihe von $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^5}$ um den Punkt $z = 0$!

Lösung: Wir kennen die TAYLOR-Reihe

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \cdots ;$$

Division durch z^5 führt zur LAURENT-Reihe

$$\frac{\sin z}{z^5} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k-4}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{120} - \frac{z^2}{5040} + \cdots .$$

b) Berechnen Sie die LAURENT-Reihe von $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ um den Punkt $z = i$!

Lösung: Um die doch recht umständlich anzuwendende Quotientenregel zu vermeiden, schreiben wir den Integranden als

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{\alpha}{z+i} + \frac{\beta}{z-i} = \frac{(\alpha+\beta)z + (\beta-\alpha)i}{z^2+1},$$

d.h. $\alpha = -\beta$ und $(\beta - \alpha)i = 2\beta i = 1$, so daß

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z+i} - \frac{i}{2}\frac{1}{z-i}$$

ist. Die LAURENT-Reihe um $z = i$ ist eine Potenzreihe in $(z-i)$; der Term $\dfrac{1}{z-i}$ kann also so stehen bleiben. Den anderen Summanden schreiben wir nach der Summenformel der geometrischen Reihe als

$$\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z+i} = \frac{-1}{2i} \cdot \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{-1}{2i(z-i)-4} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{i}{2}(z-i)} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^k (z-i)^k$$

und erhalten als Ergebnis

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2+1} &= \frac{i}{2}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^k (z-i)^k \\ &= \frac{i}{2}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4} + \frac{i}{8}(z-i) - \frac{1}{16}(z-i)^2 - \frac{i}{32}(z-i)^3 + \frac{1}{64}(z-i)^4 + \cdots .\end{aligned}$$

c) Welchen Hauptteil hat die Funktion $\dfrac{\cos z}{z^4}$ bei $z = 0$?

Lösung: Wegen $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{24} - \dfrac{z^6}{720} + \cdots$ ist $\dfrac{\cos z}{z^4} = \dfrac{1}{z^4} - \dfrac{1}{2z^2} + \dfrac{1}{24} - \dfrac{z^2}{720} + \cdots$, der Hauptteil ist also $\dfrac{1}{z^4} - \dfrac{1}{2z^2}$.

d) Berechnen Sie die Hauptteile der Funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)^2}$ bei $z = \pm ia$!

Lösung: Auch hier empfiehlt sich eine Partialbruchzerlegung, wobei der Rechenaufwand wahrscheinlich geringer ist, wenn man das Quadrat im Nenner zunächst ignoriert:

$$\frac{1}{z^2+a^2} = \frac{\alpha}{z-ia} + \frac{\beta}{z+ia} = \frac{(\alpha+\beta)z + (\alpha-\beta)ia}{z^2+a^2}$$

zeigt, daß $\beta = -\alpha$ und $(\alpha-\beta)ia = 2\alpha a \cdot i = 1$ ist, also

$$\frac{1}{z^2+a^2} = \frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{z-ia} - \frac{1}{z+ia}\right)$$

und

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z^2+a^2)^2} &= \frac{-1}{4a^2}\left(\frac{1}{(z-ia)^2} - \frac{2}{z^2+a^2} + \frac{1}{(z+ia)^2}\right)\\ &= \frac{-1}{4a^2}\left(\frac{1}{(z-ia)^2} + \frac{1}{(z+ia)^2}\right) + \frac{2}{4a^2\cdot 2ai}\left(\frac{1}{z-ia} - \frac{1}{z+ia}\right).\end{aligned}$$

Da die Terme $\dfrac{1}{(z+ia)^2}$ und $\dfrac{1}{z+ia}$ bei $z = ia$ holomorph sind, lassen sie sich dort in eine TAYLOR-Reihe entwickeln, tragen also nichts zum Hauptteil bei. Somit ist der Hauptteil bei $z = ia$

$$\frac{-1}{4a^2}\frac{1}{(z-ia)^2} - \frac{i}{4a^3}\frac{1}{z-ia},$$

und der bei $z = -ia$ entsprechend $\dfrac{-1}{4a^2}\dfrac{1}{(z+ia)^2} + \dfrac{i}{4a^3}\dfrac{1}{z+ia}$.

e) Was ist $\operatorname{Res}_{-1} \dfrac{z+2}{(z+1)^2}$?

Lösung: $\dfrac{z+2}{(z+1)^2} = \dfrac{1}{(z+1)^2} + \dfrac{z+1}{(z+1)^2} = \dfrac{1}{(z+1)^2} + \dfrac{1}{z+1}$, und das ist bereits die gesamte LAURENT-Reihe um $z = -1$. Also ist das Residuum gleich eins.

f) Was ist $\operatorname{Res}_0 \dfrac{\cos z}{z^2}$?

Lösung: Null, denn genau wie die TAYLOR-Reihe des Cosinus enthält die LAURENT-Reihe von $\dfrac{\cos z}{z^2}$ um $z = 0$ nur gerade Potenzen.

Berechnen Sie für $\gamma\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 5\cos t + 2i \sin t \end{cases}$ die folgenden Integrale:

g) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\,dz}{z^2+1}$ *h)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+9}$ *i)* $\displaystyle\int_\gamma \tan\frac{z}{2}\,dz$ *j)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\sin z}$ *k)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\,dz}{\sin z}$ *l)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+2}{(z+1)^2}\,dz$

Lösung: Der Integrationsweg γ ist eine Ellipse mit reeller Halbachse fünf und imaginärer Halbachse zwei. Alle Integrale können nach dem Residuensatz berechnet werden:
Der Integrand in *g)* hat Pole erster Ordnung bei $\pm i$; die Residuen dort sind

$$\lim_{z\to i}(z-i)\frac{z}{z^2+1} = \lim_{z\to i}\frac{z}{z+i} = \frac{1}{2} \quad\text{und}\quad \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{z}{z^2+1} = \lim_{z\to -i}\frac{z}{z-i} = \frac{1}{2};$$

damit ist $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\,dz}{z^2+1} = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2\pi i\,.$

Der Integrand in *h)* hat seine Pole bei $\pm 3i$, also nicht in der Ellipse. Somit verschwindet das Integral nach dem CAUCHYschen Integralsatz.

Der Tangens hat Polstellen bei den Nullstellen des Cosinus, den echt halbzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ also. Damit hat der Integrand von *i)* seine Pole im Ellipseninnern bei $\pm\pi$. Für jede Nullstelle a des Tangens ist, wie wir in der Vorlesung gesehen haben,

$$\lim_{z\to a}(z-a)\tan z = -1, \quad \text{also auch} \quad \lim_{z\to 2a}\left(\frac{z}{2}-a\right)\tan\frac{z}{2} = -1\,.$$

Multiplikation der letzten Gleichung mit zwei führt zu $\displaystyle\lim_{z\to 2a}(z-2a)\tan\frac{z}{2} = -2$, beide Residuen sind also gleich -2 und $\displaystyle\int_\gamma \tan\frac{z}{2}\,dz = 2\pi i(-2-2) = -8\pi i\,.$

Der Nenner der Integranden von *j)* und *k)* verschwindet bei allen ganzzahligen Vielfachen von π, innerhalb der Ellipse also bei Null und bei $\pm\pi$. Auf Grund der altbekannten Formel $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$ ist $\dfrac{z}{\sin z}$ bei $z=0$ holomorph mit Funktionswert eins, während $\dfrac{1}{\sin z}$ dort Residuum eins hat. Zur Berechnung der Residuen bei $\pm\pi$ nutzen wir aus, daß $\sin(z\pm\pi) = -\sin z$ ist; damit folgt

$$\lim_{z\to\pm\pi}\frac{z\mp\pi}{\sin z} = \lim_{w\to 0}\frac{w}{\sin(w\pm\pi)} = -\lim_{w\to 0}\frac{w}{\sin w} = -1\,.$$

Das Residuum von $\dfrac{1}{\sin z}$ dort ist also -1. Für das Residuum von $\dfrac{z}{\sin z}$ müssen wir diesen Wert noch mit π *bzw.* $-\pi$ multiplizieren, erhalten also die Residuen $\mp\pi$. Somit ist

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sin z} = 2\pi i(1-1-1) = -2\pi i \quad \text{und} \quad \int_\gamma \frac{z\,dz}{\sin z} = 2\pi i(\pi-\pi) = 0\,.$$

Für den Integranden in *l)* schließlich kennen wir das Residuum Eins an der einzigen Polstelle -1 bereits aus *e)*; das Integral hat daher nach dem Residuensatz den Wert $2\pi i$.

h) Was ändert sich, wenn man stattdessen den Integrationsweg $\delta\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 5\cos t - 2i\sin t \end{cases}$ betrachtet?

Lösung: Da sich nur das Vorzeichen des Imaginärteils ändert, ist dies derselbe Integrationsweg in Gegenrichtung durchlaufen. Daher ändern alle Integrale ihr Vorzeichen.

n) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ sei eine ungerade holomorphe Funktion. Was ist $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{13}}\,dz$?

Lösung: Da f eine ungerade Funktion ist, enthält seine TAYLOR-Reihe nur ungerade z-Potenzen. Die LAURENT-Reihe von $\dfrac{f(z)}{z^{13}}$ entsteht daraus durch Division durch z^{13}, enthält also nur *gerade* Potenzen. Insbesondere gibt es keinen Term mit z^{-1}, das Residuum von $\dfrac{f(z)}{z^{13}}$ bei Null ist also Null, und weitere Pole gibt es nicht wegen der Holomorphie von f. Daher verschwindet das Integral.

o) Zeigen Sie: Für ein Polynom f und einen geschlossenen, im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Integrationsweg, der ein Gebiet G berandet und auf dem keine Nullstelle von f liegt, ist $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ gleich der Anzahl der (mit Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von f in G.

Lösung: Kandidaten für Polstellen des Integranden sind die Nullstellen von f. Ist $z = z_0$ eine e-fache Nullstelle, so läßt sich $f'(z)/f(z)$ schreiben als $(z-z_0)^e g(z)$ mit einem Polynom g, das bei $z = z_0$ nicht verschwindet. Dann ist

$$f'(z) = (z-z_0)^e g'(z) + e(z-z_0)^{e-1} g(z)$$

und

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z-z_0)^e g'(z) + e(z-z_0)^{e-1} g(z)}{(z-z_0)^e g(z)} = g'(z) + \frac{e}{z-z_0}\,.$$

$g'(z)$ ist ein Polynom, also in ganz $\mathbb{C}$ holomorph; somit hat $f'(z)/f(z)$ bei jeder Nullstelle von f deren Vielfachheit als Residuum. Damit folgt die Behauptung aus dem Residuensatz.

p) a sei eine positve reelle Zahl. Was ist $\int\limits_\gamma \frac{dz}{(z^2+a^2)^2}$, wenn γ den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreis um Null mit Radius $R_1 = a/2$ *bzw* $R_2 = 2a$ bezeichnet?

Lösung: Da der Integrand nur bei $\pm ia$ Polstellen hat, verschwindet das Integral über den Kreis mit Radius $a/2$ nach dem CAUCHYschen Integralsatz. Das über den Kreis mit Radius $2a$ enthält beide Polstellen, ist also gleich $2\pi i$ mal der Summe der zugehörigen Residuen, die nach der vorigen Aufgabe $\pm\frac{i}{4a^3}$ sind, sich also aufheben. Somit verschwindet auch dieses Integral.

q) Was ist $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$?

Lösung: Wir integrieren wie bei den entsprechenden Beispielen in der Vorlesung für eine reelle Zahl $R > a$ zunächst von $-R$ nach R und dann entlang des Halbkreises durch die obere Halbebene mit Radius R zurück nach $-R$. Der Halbkreis enthält nur die Polstelle bei ia, nach dem Residuensatz ist das Integral also $2\pi i \cdot \frac{-i}{4a^3} = \frac{\pi}{2a^3}$.

Auf dem Halbkreisbogen ist $\left|z^2+a^2\right|^2$ größer als R^4, der Betrag des Integranden also kleiner als $1/R^4$, und wenn wir umschreiben in ein Integral von 0 bis π, wozu wir mit $\dot\gamma(t)$ vom Betrag R multiplizieren müssen, immer noch kleiner als $1/R^3$. Somit verschwindet dieses Integral für $R \to \infty$, und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}$.

r) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{16x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx\,!$

Lösung: Hier könnte man zwar über eine Partialbruchzerlegung relativ schnell eine Stammfunktion des Integranden finden, insgesamt dürfte der Rechenaufwand allerdings beim Umweg über das Komplexe etwas geringer sein.

Das Nennerpolynom $(x^2+1)(x^2+9)$ verschwindet für $x = \pm i$ und $x = \pm 3i$, an diesen vier Stellen hat der Integrand also Pole.

Der Integrationsweg sei wie oben; hier sei er zur Abwechslung noch einmal formal erklärt: Wir betrachten zunächst den Halbkreis γ_R um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also $\gamma_R\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto Re^{it}$.

δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.

Für $R > 3$ liegen im Innern des von δ_R berandeten Halbkreises die beide Pole $z_1 = i$ und $z_2 = 3i$. Beide sind Pole erster Ordnung, d.h.

$$\operatorname{Res}_{z=z_\nu} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z \to z_\nu} \frac{16(z-z_\nu)z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} .$$

Damit ist

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z \to i} \frac{16z^2}{(z+i)(z^2+9)} = \frac{16i^2}{(2i)(i^2+9)} = \frac{-16}{16i} = i$$

und

$$\operatorname{Res}_{z=3i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z \to i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z+3i)} = \frac{16 \cdot 9i^2}{(9i^2+1)(6i)} = \frac{-16 \cdot 9}{-8 \cdot 6i} = -3i .$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\int_{\delta_R} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}\, dz &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} + \operatorname{Res}_{z=3i} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} \right) \\ &= 2\pi i \big(i - 3i\big) = 4\pi .\end{aligned}$$

Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn für $R \to \infty$ geht wegen $\dot\gamma_R(t) = iRe^{it}$ der Integrand von

$$\int_{\gamma_R} \frac{16z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}\, dz = \int_0^\pi \frac{16R^2e^{2it} \cdot iRe^{it}}{(R^2e^{2it}+1)(R^2e^{2it}+4)}\, dt$$

gegen Null, also – wegen des festen Integrationsintervalls $[0, \pi]$ – auch das Integral, so daß das Integral über δ_R für $R \to \infty$ gleich dem Integral über die reelle Achse wird.