Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C201
*Tel.* 2515

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 4. November 2004

*a)* Berechnen Sie die Laurent-Reihe von $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^5}$ um den Punkt $z = 0$ !

*b)* Berechnen Sie die Laurent-Reihe von $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ um den Punkt $z = i$ !

*c)* Welchen Hauptteil hat die Funktion $\dfrac{\cos z}{z^4}$ bei $z = 0$ ?

*d)* Berechnen Sie die Hauptteile der Funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)^2}$ bei $z = \pm ia$ !

*e)* Was ist $\operatorname{Res}_{-1} \dfrac{z+2}{(z+1)^2}$ ?

*f)* Was ist $\operatorname{Res}_0 \dfrac{\cos z}{z^2}$ ?

Berechnen Sie für $\gamma\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ \quad t \mapsto 5\cos t + 2i\sin t \end{cases}$ die folgenden Integrale:

*g)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\,dz}{z^2+1}$ *h)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+9}$ *i)* $\displaystyle\int_\gamma \tan\frac{z}{2}\,dz$ *j)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\sin z}$ *k)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\,dz}{\sin z}$ *l)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+2}{(z+1)^2}\,dz$

*m)* Was ändert sich, wenn man stattdessen den Integrationsweg $\delta\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ \quad t \mapsto 5\cos t - 2i\sin t \end{cases}$ betrachtet?

*n)* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sei eine ungerade holomorphe Funktion. Was ist $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{13}}\,dz$ ?

*o)* Zeigen Sie: Für ein Polynom $f$ und einen geschlossenen, im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Integrationsweg, der ein Gebiet $G$ berandet und auf dem keine Nullstelle von $f$ liegt, ist $\frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ gleich der Anzahl der (mit Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von $f$ in $G$.

*p)* $a$ sei eine positve reelle Zahl. Was ist $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+a^2)^2}$, wenn $\gamma$ den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreis um Null mit Radius $R_1 = a/2$ *bzw* $R_2 = 2a$ bezeichnet?

*q)* Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ ?

*r)* Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$ !