Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 28. Oktober 2004

a) Berechnen Sie für $\gamma\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 2e^{it} \end{cases}$ die folgenden Integrale

$$I_1 = \int_\gamma \frac{dz}{z}, \qquad I_2 = \int_\gamma \frac{dz}{z-3}, \qquad I_3 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2}, \qquad I_4 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}, \qquad I_5 = \int_\gamma e^{\cos z}\, dz$$

b) Welche dieser Integrale ändern Ihren Wert, wenn man stattdessen den Integrationsweg $\delta\colon \begin{cases} [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 3 + e^{it} \end{cases}$ betrachtet?

c) Berechnen Sie für $\gamma\colon \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto 2e^{it} \end{cases}$ die folgenden Integrale:

$$J_1 = \int_\gamma z\, dz, \qquad J_2 = \int_\gamma \frac{dz}{z}, \qquad J_3 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2}, \qquad J_4 = \int_\gamma e^z\, dz, \qquad J_5 = \int_\gamma \cos z\, dz$$

d) Was ändert sich, wenn Sie bei J_1 bis J_5 statt über γ über $\delta\colon \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto -2e^{-it} \end{cases}$ integrieren?

e) Was ist $\operatorname{Ln} i$?

f) *Richtig oder falsch:* $\operatorname{Ln}(z \cdot w) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} w$ für alle $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

g) *Richtig oder falsch:* $f(z) = \operatorname{Ln} z - 4\pi i$ ist eine Umkehrfunktion von $z \mapsto e^z$.

h) Zeigen Sie: Für $|z| < 1$ ist $\mathfrak{Re}\, \dfrac{1-iz}{1+iz} > 0$.

i) Zeigen Sie: Für $|z| < 1$ ist $f(z) = \dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1-iz}{1+iz}$ eine holomorphe Umkehrfunktion von $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$!

j) Was ist $f'(z)$?

k) Berechnen Sie damit für $\gamma\colon \begin{cases} [0,\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{1}{2}e^{it} \end{cases}$ das Integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$!

l) Welche der folgenden Funktionen sind holomorph *bzw.* meromorph auf $\mathbb{C}$?

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}, \qquad g(z) = e^z - e^{\overline{z}}, \qquad h(z) = \frac{1}{e^z - e^{\overline{z}}}, \qquad k(z) = \frac{1}{\cos z},$$
$$\ell(z) = e^{-z}, \qquad m(z) = e^{-1/z}, \qquad n(z) = e^{-1/z^2}$$