Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 21. Oktober 2004

a) Schreiben Sie die Funktion $\sin 2x \cdot \sin 3y$ als Summe von reinen Sinus- und Cosinustermen!

Lösung:

$$\begin{aligned}\sin 2x \cdot \sin 3y &= \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} \cdot \frac{e^{3iy} - e^{-3iy}}{2i} \\ &= \frac{e^{i(2x+3y)} - e^{i(2x-3y)} - e^{-i(2x-3y)} + e^{i(2x+3y)}}{(-4)} \\ &= -\frac{e^{i(2x+3y)} - e^{i(2x+3y)}}{4} + \frac{e^{i(2x-3y)} - e^{-i(2x-3y)}}{4} \\ &= \frac{1}{2}\cos(2x-3y) - \frac{1}{2}\cos(2x+3y)\end{aligned}$$

b) In einem Wechselstromkreis sind eine Spule mit Widerstand R und Induktivität L sowie ein Kondensator der Kapazität C parallelgeschaltet; die Kreisfrequenz des Stroms sei ω, seine Amplitude sei I_0. Welche Impedanz hat die Schaltung als ganzes?

Lösung: $R + i\omega L + \frac{i}{\omega C}$

c) Welche Amplitude U_0 hat die Spannung in diesem Stromkreis?

Lösung: Die Impedanz $R + i\omega L + \frac{i}{\omega C}$ hat Betrag $\sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2}$; daher ist

$$U_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot I_0 .$$

d) Zeigen Sie: e^z verschwindet für keine komplexe Zahl z.

Lösung: Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$. Da die reelle Exponentialfunktion keine Nullstellen hat und Sinus und Cosinus im Reellen keine gemeinsame Nullstelle haben, kann dieses Produkt nie verschwinden.

e) Zeigen Sie: $e^z = 1$ genau dann, wenn z ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ ist.

Lösung: Sei wieder $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Da e^{iy} stets den Betrag eins hat, ist $|e^z| = e^x$, was genau für $x = 0$ den Wert eins hat. Damit nicht nur $|e^z|$, sondern sogar $e^z = 1$ ist, muß auch $e^{iy} = \cos y + i\sin y = 1$ sein, d.h. $\cos y = 1$ und $\sin y = 0$. Der Sinus verschwindet bei allen ganzzahligen Vielfachen von π, und für $k \in \mathbb{Z}$ ist $\cos k\pi = (-1)^k$. Daher muß y ein geradzahliges Vielfaches von π sein, z also ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$.

f) Betrachten Sie $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ und $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ für beliebige komplexe Argumente $z \in \mathbb{C}$. Wo haben diese Funktionen ihre Nullstellen?

Lösung: $\sinh z = 0$ genau dann, wenn $e^z = e^{-z}$ ist, d.h. $e^{2z} = 1$. Dies ist, wie wir gerade gesehen haben, genau dann der Fall, wenn $2z$ ein ganzahliges Vielfaches von $2\pi i$ ist, z selbst also eines von πi.

$\cosh z = 0$ genau dann, wenn $e^z = -e^{-z}$ ist, d.h. $e^{2z} = -1 = e^{\pi i}$ oder $e^{2z-\pi i} = 1$. Hier muß $2z$ also ein ungeradzahliges Vielfaches von π sein, d.h. $z = (k + \frac{1}{2})\pi i$ für eine ganze Zahl k.

g) Welche der folgenden Funktionen ist komplex differenzierbar?

$$f(z) = 2\cosh z, \qquad g(z) = e^z + e^{\overline{z}}, \qquad h(z) = z^2 \sin z$$

Lösung: Wir können z.B. die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen verwenden: Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} 2\cosh z &= e^z + e^{-z} = e^{x+iy} + e^{-x-iy} \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y) \\ &= (e^x + e^{-x})\cos y + i(e^x - e^{-x})\sin y\,. \end{aligned}$$

Somit ist

$$u(x, y) = \Re f(x + iy) = (e^x + e^{-x})\cos y \quad \text{und} \quad v(x, y) = \Im f(x + iy) = (e^x - e^{-x})\sin y\,.$$

Ableiten zeigt, daß

$$u_x(x, y) = (e^x - e^{-x})\cos y \quad \text{und} \quad v_y(x, y) = (e^x - e^{-x})\cos y$$

übereinstimmen, während sich

$$u_y(x, y) = -(e^x + e^{-x})\sin y \quad \text{und} \quad v_x(x, y) = (e^x + e^{-x})\sin y$$

genau im Vorzeichen unterscheiden. Somit ist f komplex differenzierbar.
Die entsprechende Rechnung für $g(z)$ führt auf

$$\begin{aligned} g(z) &= e^z + e^{\overline{z}} = e^{x+iy} + e^{x-iy} \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) + e^x(\cos y - i \sin y) = 2e^x \cos y\,. \end{aligned}$$

Somit ist hier

$$u(x, y) = \Re g(x + iy) = 2e^x \cos y \quad \text{und} \quad v(x, y) = \Im g(x + iy) = 0\,.$$

Ganz offensichtlich sind hier die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen nicht erfüllt, d.h. g ist nicht komplex differenzierbar.
Auch für $h(z)$ könnten wir die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen verwenden, schneller geht es allerdings, wenn wir beachten, daß jede Funktion, die durch Grundrechenarten und Hintereinanderausführungen aus Potenzen, Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen hervorgeht, holomorph ist, was hier offensichtlich der Fall ist – wie übrigens schon bei $f(z)$, wo die ausführliche Rechnung oben also auch überflüssig gewesen wäre.

h) Berechnen Sie für $\gamma\colon [0, 8] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = \begin{cases} (t-1, -1) & \text{für } 0 \le t \le 2 \\ (1, t-3) & \text{für } 2 \le t \le 4 \\ (5-t, 1) & \text{für } 4 \le t \le 6 \\ (-1, -t+7) & \text{für } 6 \le t \le 8 \end{cases}$ das Integral $\int_\gamma \vec{V}_k(x, y)\, ds$ für:

$$\vec{V}_1(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{V}_2(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad \vec{V}_3(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{V}_4(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix}!$$

Lösung: Da $\gamma(t)$ offenbar in jedem der vier Definitionsintervalle linear ist, besteht der Integrationsweg aus vier Strecken $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, die wir über ihre Endpunkte identifizieren können: γ^1 geht von $(-1, -1)$ nach $(1, -1)$, γ_2 von dort nach $(1, 1)$, γ_3 von $(1, 1)$

nach $(-1,1)$, und γ_4 schließlich von dort zurück zum Ausgangspunkt $(-1,-1)$. Insgesamt durchlaufen wir also das Quadrat mit Seiten $(\pm 1, \pm 1)$ im Gegenuhrzeigersinn.
Die Tangentenvektoren an die vier Teilstrecken sind

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \dot\gamma_3(t) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot\gamma_4(t) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\int_\gamma \vec V_1(x,y)\,ds = \int_{\gamma_1} \vec V_1(x,y)\,ds + \int_{\gamma_2} \vec V_1(x,y)\,ds + \int_{\gamma_3} \vec V_1(x,y)\,ds + \int_{\gamma_4} \vec V_1(x,y)\,ds$$

$$= \int_0^2 \begin{pmatrix}t-1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} dt + \int_2^4 \begin{pmatrix}1\\t-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} dt + \int_4^6 \begin{pmatrix}5-t\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} dt + \int_6^8 \begin{pmatrix}-1\\7-t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^2 (t-1)\,dt + \int_2^4 (t-3)\,dt + \int_4^6 (t-5)\,dt + \int_6^8 (t-7)\,dt = 4\int_{-1}^1 s\,ds = 0.$$

Für $\vec V_2(x,y)$ erhalten wir entsprechend

$$\int_\gamma \vec V_2(x,y)\,ds = \int_{\gamma_1} \vec V_2(x,y)\,ds + \int_{\gamma_2} \vec V_2(x,y)\,ds + \int_{\gamma_3} \vec V_2(x,y)\,ds + \int_{\gamma_4} \vec V_2(x,y)\,ds$$

$$= \int_0^2 \begin{pmatrix}1\\t-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} dt + \int_2^4 \begin{pmatrix}3-t\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} dt + \int_4^6 \begin{pmatrix}-1\\5-t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} dt + \int_6^8 \begin{pmatrix}t-7\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^2 1\,dt + \int_2^4 1\,dt + \int_4^6 1\,dt + \int_6^8 1\,dt = \int_0^8 dt = 8.$$

Ähnlich für $\vec V_3$:

$$\int_\gamma \vec V_3(x,y)\,ds = \int_{\gamma_1} \vec V_3(x,y)\,ds + \int_{\gamma_2} \vec V_3(x,y)\,ds + \int_{\gamma_3} \vec V_3(x,y)\,ds + \int_{\gamma_4} \vec V_3(x,y)\,ds$$

$$= \int_0^2 \begin{pmatrix}(t-1)^2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} dt + \int_2^4 \begin{pmatrix}1\\(t-3)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} dt + \int_4^6 \begin{pmatrix}(5-t)^2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} dt + \int_6^8 \begin{pmatrix}1\\(7-t)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^2 (t-1)^2\,dt + \int_2^4 (t-3)^2\,dt - \int_4^6 (t-5)\,dt - \int_6^8 (t-7)\,dt = 2\int_{-1}^1 s^2\,ds - 2\int_{-1}^1 s^2\,ds = 0.$$

Für $\vec V_4$ schließlich erhalten wir

$$\int_\gamma \vec V_4(x,y)\,ds = \int_{\gamma_1} \vec V_4(x,y)\,ds + \int_{\gamma_2} \vec V_4(x,y)\,ds + \int_{\gamma_3} \vec V_4(x,y)\,ds + \int_{\gamma_4} \vec V_4(x,y)\,ds$$

$$= \int_0^2 \begin{pmatrix}1\\(t-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} dt + \int_2^4 \begin{pmatrix}(t-3)^2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} dt + \int_4^6 \begin{pmatrix}1\\(5-t)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} dt + \int_6^8 \begin{pmatrix}(7-t)^2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^2 1\,dt + \int_2^4 1\,dt + \int_4^6 (-1)\,dt + \int_6^8 1\,dt = 2+2-2+2 = 4.$$

i) Definieren Sie ein Kurvenstück δ, das γ in Gegenrichtung durchläuft!

Lösung: $\delta(t) = \gamma(8-t)$; auf die explizite Formel sei verzichtet.

j) Wie ändern sich die obigen Integrale, wenn man über δ statt über γ integriert?

Lösung: $\dot\delta(t) = -\dot\gamma(8-t)$; abgesehen vom Vorzeichen der Tangentenvektoren haben wir also dieselben Integrale. Somit ändert sich auch hier nur das Vorzeichen – falls das Integral nicht ohnehin verschwindet.

k) Das Vektorfeld $\vec V$ sei gegeben durch $\vec V(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ durch

$$\gamma_1\colon \begin{cases} [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto (\cos t, \sin t, t) \end{cases}, \quad \gamma_2\colon \begin{cases} [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto (1,0,t) \end{cases}$$

und

$$\gamma_3\colon \begin{cases} [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto \begin{cases} (\cos 2t, \sin 2t, 0) & \text{falls } t \le 10\pi \\ \big(1,0,2(t-10\pi)\big) & \text{falls } t \ge 10\pi \end{cases} \end{cases}.$$

Berechnen Sie die Integrale von $\vec V$ längs der γ_i! Ist das Vektorfeld $\vec V$ konservativ?

Lösung: Die Tangentenvektoren an die drei Kurvenstücke sind

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ 2\cos 2t \\ 0 \end{pmatrix} \ \textit{bzw.} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

je nachdem ob $t < 10\pi$ oder $t > 10\pi$ ist. (In $\gamma_3(10\pi) = (0,0,0)$ ist kein Tangentenvektor definiert.) Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \vec V(t)\,ds &= \int_0^{20\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^{20\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{20\pi} dt = 20\pi \\
\int_{\gamma_2} \vec V(t)\,ds &= \int_0^{20\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^{20\pi} 0\,dt = 0 \\
\int_{\gamma_2} \vec V(t)\,ds &= \int_0^{10\pi} \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ 2\cos 2t \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_{10\pi}^{20\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{10\pi} (2\sin^2 t + 2\cos^2 t)\,dt = \int_0^{10\pi} 2\,dt = 20\pi\,.
\end{aligned}$$

Das Vektorfeld ist nicht konservativ, denn γ_3 ist eine geschlossene Kurve, über die das Integral darüber nicht verschwindet. (γ_1 ist eine Schraubenlinie, also nicht geschlossen; daß das Integral darüber einen von Null verschiedenen Wert hat, bedeutet nichts.) Man kann das auch daran erkennen, daß seine Rotation nicht verschwindet:

$$\operatorname{rot} \vec V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

l) *Richtig oder falsch:* $\gamma\colon [a,b] \to D$ sei eine geschlossene Kurve und $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Falls $\operatorname{rot} \vec V = \vec 0$ auf D, ist $\int_\gamma \vec V(x,y)\,ds = 0$.

Lösung: *Falsch;* das gilt nur, wenn D einfach zusammenhängend ist. Das Standard-Gegenbeispiel ist das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters: Da es im (als Kurve gedachten) Leiter selbst nicht definiert ist, hat es hier eine Definitionslücke, so daß D nicht einfach zusammenhängend ist. Konkret sei der Leiter etwa die z-Achse; das Feld ist dann

$$\vec{H}(\boldsymbol{x}) = \frac{I}{4\pi\|\vec{r}\|^2}\,\vec{a}\times\vec{x}\,.$$

Wie man leicht nachrechnet ([**HM1**], *Kap. 2*, §2e2), ist $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{0}$, aber wie wir in [**HM1**], *Kap. 2*, §4d gesehen haben, verschwindet das Integral etwa entlang des Einheitskreises der (x,y)-Ebene zum Glück nicht: Andernfalls gäbe es weder Generatoren noch Elektromotoren.

m) Berechnen Sie die Bogenlänge der Parabel $y = x^2$ zwischen den beiden Punkten $(0,0)$ und $(2,4)$!

Lösung: Wir können dieses Kurvenstück beispielsweise paramatrisieren durch

$$\gamma\colon \begin{cases} [0,2] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (t,t^2) \end{cases} \quad \text{mit} \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{1+2t}\,.$$

Die Bogenlänge ist also mit der Substitution $u = 1+2t$, $du = 2\,dt$

$$\int_0^2 |\dot{\gamma}(t)|\;dt = \int_0^2 \sqrt{1+2t}\,dt = \int_1^5 \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{3/2}\Big|_1^5 = \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\,.$$

n) Berechnen Sie die Länge der Kurve $y = \cosh x$ über dem Intervall $[-c,c]$!

Lösung: Hier parametrisieren wir durch

$$\gamma\colon \begin{cases} [-c,c] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (t,\cosh t) \end{cases} \quad \text{mit} \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t\,.$$

Die Bogenlänge ist somit

$$\int_{-c}^{c} |\dot{\gamma}(t)|\;dt = \int_{-c}^{c} \cosh t\,dt = \sinh c - \sinh(-c) = 2\sinh c\,.$$

o) Der Graph der Funktion $y = f(x)$ über dem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ werde parametrisiert durch $\gamma\colon [a,\,b] \to \mathbb{R}^2;\;\; t \mapsto \big(t, f(t)\big)$. Unter welchen Bedingungen ist das ein reguläres Kurvenstück?

Lösung: Hier ist $\dot{\gamma}(t) = \binom{1}{\dot{f}(t)}$, was offensichtlich nie der Nullvektor sein kann. γ ist also stets regulär.

p) Nun sei $b \ge a \ge 0$, und derselbe Graph werde parametrisiert durch $\tilde{\gamma}\colon [\sqrt{a},\,\sqrt{b}] \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto \big(t^2, f(t^2)\big)$. Sind diese beiden Kurvenstücke äquivalent?

Lösung: Ja, denn die Abbildung $[\sqrt{a},\,\sqrt{b}] \to [a,b]$, die t auf t^2 abbildet, ist wegen $0 \le \sqrt{a} \le sqrtb$ strikt monoton.