WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515

A5, ZIMMER C201

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 21. Oktober 2004

*a)* Schreiben Sie die Funktion $\sin 2x \cdot \sin 3y$ als Summe von reinen Sinus- und Cosinustermen!

*b)* In einem Wechselstromkreis sind eine Spule mit Widerstand $R$ und Induktivität $L$ sowie ein Kondensator der Kapazität $C$ parallelgeschaltet; die Kreisfrequenz des Stroms sei $\omega$, seine Amplitude sei $I_0$. Welche Impedanz hat die Schaltung als ganzes?

*c)* Welche Amplitude $U_0$ hat die Spannung in diesem Stromkreis?

*d)* Zeigen Sie: $e^z$ verschwindet für keine komplexe Zahl $z$.

*e)* Zeigen Sie: $e^z = 1$ genau dann, wenn $z$ ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ ist.

*f)* Betrachten Sie $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ und $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ für beliebige komplexe Argumente $z \in \mathbb{C}$. Wo haben diese Funktionen ihre Nullstellen?

*g)* Welche der folgenden Funktionen ist komplex differenzierbar?

$$f(z) = 2\cosh z, \qquad g(z) = e^z + e^{\overline{z}}, \qquad h(z) = z^2 \sin z$$

*h)* Berechnen Sie für $\gamma\colon [0,8] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = \begin{cases} (t-1,-1) & \text{für } 0 \le t \le 2 \\ (1,t-3) & \text{für } 2 \le t \le 4 \\ (5-t,1) & \text{für } 4 \le t \le 6 \\ (-1,-t+7) & \text{für } 6 \le t \le 8 \end{cases}$ das Integral $\int_\gamma \vec{V}_k(x,y)\, ds$ für:

$$\vec{V}_1(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{V}_2(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad \vec{V}_3(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{V}_4(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix}!$$

*i)* Definieren Sie ein Kurvenstück $\delta$, das $\gamma$ in Gegenrichtung durchläuft!

*j)* Wie ändern sich die obigen Integrale, wenn man über $\delta$ statt über $\gamma$ integriert?

*k)* Das Vektorfeld $\vec{V}$ sei gegeben durch $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ durch

$$\gamma_1\colon \begin{cases} [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto (\cos t, \sin t, t) \end{cases}, \qquad \gamma_2\colon \begin{cases} [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto (1,0,t) \end{cases}$$

und

$$\gamma_3\colon \begin{cases} [0,20\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto \begin{cases} (\cos 2t, \sin 2t, 0) & \text{falls } t \le 10\pi \\ \big(1,0,2(t-10\pi)\big) & \text{falls } t \ge 10\pi \end{cases} \end{cases}.$$

Berechnen Sie die Integrale von $\vec{V}$ längs der $\gamma_i$! Ist das Vektorfeld $\vec{V}$ konservativ?

*l)* *Richtig oder falsch:* $\gamma\colon [a,b] \to D$ sei eine geschlossene Kurve und $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Falls $\operatorname{rot} \vec{V} = \vec{0}$ auf $D$, ist $\int_\gamma \vec{V}(x,y)\, ds = 0$.

*m)* Berechnen Sie die Bogenlänge der Parabel $y = x^2$ zwischen den beiden Punkten $(0,0)$ und $(2,4)$!

*n)* Berechnen Sie die Länge der Kurve $y = \cosh x$ über dem Intervall $[-c,c]$!

*o)* Der Graph der Funktion $y = f(x)$ über dem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ werde parametrisiert durch $\gamma\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto \big(t, f(t)\big)$. Unter welchen Bedingungen ist das ein reguläres Kurvenstück?

*p)* Nun sei $b \ge a \ge 0$, und derselbe Graph werde parametrisiert durch $\widetilde{\gamma}\colon [\sqrt{a},\, \sqrt{b}] \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto \big(t^2, f(t^2)\big)$. Sind diese beiden Kurvenstücke äquivalent?