

14. Februar 2005

16. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Gleichzeitig Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 17. Februar 2005

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Verdoppelt man alle Werte einer Meßreihe, verdoppelt sich dadurch auch die Standardabweichung.
- 2) Nach dem Brechungsgesetz gilt für die Winkel α des einfallenden und β des gebrochenen Strahls die Beziehung $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$, wobei n der (relative) Brechungsindex ist. Wie wirken sich Fehler bei der Bestimmung von α und β auf n aus?
- 3) Zehn Dämonen seien nach den Regeln des LAPLACESchen Fehlermodells damit beschäftigt, Ihre Meßergebnisse zu verfälschen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ergebnis trotzdem richtig ist?
- 4) Eine Meßreihe habe Mittelwert 3,8 und Standardabweichung 0,1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der dritte Meßwert größer als vier?
- 5) Zur Bestimmung des wahren Werts einer physikalischen Meßgröße werde diese fünfzigmal gemessen; die entsprechende Meßreihe habe einen Mittelwert von 3,145 und eine Standardabweichung von 0,07. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der wahre Wert zwischen 3,14 und 3,145?
- 6) Bestimmen Sie ein Intervall, in dem der wahre Wert mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit liegt!
- 7) Die Zufallsvariable X habe Mittelwert \bar{x} und Standardabweichung σ . Bestimmen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen $U = 2X + 1$!
- 8) *Richtig oder falsch:* Ist X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert x , so ist X^2 eine Zufallsvariable mit Erwartungswert x^2 .
- 9) *Richtig oder falsch:* Schreiben tausend Studenten eine Klausur, sind die dort erreichten Punktezahlen annähernd normalverteilt.
- 10) *Richtig oder falsch:* Der jährliche Abitursdurchschnitt im Fach Mathematik in Baden-Württemberg ist, als Funktion des Jahres, ungefähr normalverteilt.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Zwischen 1911 und 1960 wurden jedes Jahr die mittleren Oktobertemperaturen in München gemessen; der Mittelwert der 50 Werte ist 7,974 und die Standardabweichung 1,416. Wir nehmen an, die Meßwerte seien normalverteilt.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die mittlere Temperatur in einem bestimmten Jahr zwischen sieben und acht Grad liegt?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie unter sechs Grad sinkt?
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie auf über zehn Grad steigt?
- d) Wie warm muß es werden, daß man von einem „Jahrhundertherbst“, reden kann, d.h. einen Oktober, der so warm ist, wie es höchstens einmal alle hundert Jahre vorkommt?

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) Der jährliche Höchststand des Pegels Haltern des Flusses Stever ist mit ziemlich guter Genauigkeit normalverteilt mit Mittelwert 4 m und Standardabweichung 2 m. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er 2005 zwischen zwei und drei Metern liegt?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fluß nächstes Jahr irgendwann einen Pegelstand von mehr als sieben Meter erreicht?
- c) Was können Sie über die entsprechende Wahrscheinlichkeit für letztes Jahr sagen?
- d) Ab welchem Pegelstand kann man von einem Jahrhunderthochwasser reden?
- e) Können Sie auch sagen, ab welchem Pegelstand man von einem Jahrhunderttiefststand reden kann?

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Durch Digitalisierung von thermischen Rauschen werde eine Folge einer Million Bit erzeugt, deren jedes, unabhängig von den anderen, mit gleicher Wahrscheinlichkeit null oder eins ist. (So etwas ist z.B. gelegentlich in der Kryptographie nützlich.)

- a) Wie ist die Anzahl der Nullen unter den erzeugten Bits verteilt?
- b) Durch welche Normalverteilung läßt sich dies nach dem zentralen Grenzwertsatz approximieren?
- c) Bestimmen Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Anteil der Nullen zwischen 49,9% und 50,1% liegt!
- d) Bestimmen Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Anteil der Nullen zwischen 49% und 50% liegt!

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Ein beliebtes, weil einfaches Verfahren zur näherungsweisen Erzeugung (standard)-normalverteilter Zufallsvariablen besteht darin, daß man zwölf voneinander unabhängige im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen addiert und sechs vom Ergebnis subtrahiert. Begründen Sie, warum dieses Verfahren einigermaßen brauchbare Ergebnisse liefert!

Aufgabe 5: (5 Punkte)

- a) In zehn preußischen Kavallerieregimentern wurden über zwanzig Jahre hinweg die jährlichen Todesfälle durch Hufschlag gezählt: 109 mal gab es *keine* Todesfälle, 65 mal einen, 22 mal zwei, dreimal drei und einmal kam es vor, daß ein Regiment während eines Jahres vier Tote zu beklagen hatte. Finden Sie eine POISSON-Verteilung, die diese Zahlen ungefähr beschreiben könnte, und vergleichen Sie die aufgrund dieser Verteilung berechneten Wahrscheinlichkeiten mit den beobachteten Häufigkeiten!
- b) Welche Verteilung beschreibt näherungsweise die Gesamtzahl der in einem Jahr durch Hufschlag getöteten Offiziere aus allen zehn Regimentern?

Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)
0,00	0,500000	0,01	0,503989	0,02	0,507978	0,03	0,511966	0,04	0,515953
0,05	0,519939	0,06	0,523922	0,07	0,527903	0,08	0,531881	0,09	0,535856
0,10	0,539828	0,11	0,543795	0,12	0,547758	0,13	0,551717	0,14	0,555670
0,15	0,559618	0,16	0,563559	0,17	0,567495	0,18	0,571424	0,19	0,575345
0,20	0,579260	0,21	0,583166	0,22	0,587064	0,23	0,590954	0,24	0,594835
0,25	0,598706	0,26	0,602568	0,27	0,606420	0,28	0,610261	0,29	0,614092
0,30	0,617911	0,31	0,621720	0,32	0,625516	0,33	0,629300	0,34	0,633072
0,35	0,636831	0,36	0,640576	0,37	0,644309	0,38	0,648027	0,39	0,651732
0,40	0,655422	0,41	0,659097	0,42	0,662757	0,43	0,666402	0,44	0,670031
0,45	0,673645	0,46	0,677242	0,47	0,680822	0,48	0,684386	0,49	0,687933
0,50	0,691462	0,51	0,694974	0,52	0,698468	0,53	0,701944	0,54	0,705401
0,55	0,708840	0,56	0,712260	0,57	0,715661	0,58	0,719043	0,59	0,722405
0,60	0,725747	0,61	0,729069	0,62	0,732371	0,63	0,735653	0,64	0,738914
0,65	0,742154	0,66	0,745373	0,67	0,748571	0,68	0,751748	0,69	0,754903
0,70	0,758036	0,71	0,761148	0,72	0,764238	0,73	0,767305	0,74	0,770350
0,75	0,773373	0,76	0,776373	0,77	0,779350	0,78	0,782305	0,79	0,785236
0,80	0,788145	0,81	0,791030	0,82	0,793892	0,83	0,796731	0,84	0,799546
0,85	0,802337	0,86	0,805105	0,87	0,807850	0,88	0,810570	0,89	0,813267
0,90	0,815940	0,91	0,818589	0,92	0,821214	0,93	0,823814	0,94	0,826391
0,95	0,828944	0,96	0,831472	0,97	0,833977	0,98	0,836457	0,99	0,838913
1,00	0,841345	1,01	0,843752	1,02	0,846136	1,03	0,848495	1,04	0,850830
1,05	0,853141	1,06	0,855428	1,07	0,857690	1,08	0,859929	1,09	0,862143
1,10	0,864334	1,11	0,866500	1,12	0,868643	1,13	0,870762	1,14	0,872857
1,15	0,874928	1,16	0,876976	1,17	0,879000	1,18	0,881000	1,19	0,882977
1,20	0,884930	1,21	0,886861	1,22	0,888768	1,23	0,890651	1,24	0,892512
1,25	0,894350	1,26	0,896165	1,27	0,897958	1,28	0,899727	1,29	0,901475
1,30	0,903200	1,31	0,904902	1,32	0,906582	1,33	0,908241	1,34	0,909877
1,35	0,911492	1,36	0,913085	1,37	0,914657	1,38	0,916207	1,39	0,917736
1,40	0,919243	1,41	0,920730	1,42	0,922196	1,43	0,923641	1,44	0,925066
1,45	0,926471	1,46	0,927855	1,47	0,929219	1,48	0,930563	1,49	0,931888
1,50	0,933193	1,51	0,934478	1,52	0,935745	1,53	0,936992	1,54	0,938220
1,55	0,939429	1,56	0,940620	1,57	0,941792	1,58	0,942947	1,59	0,944083
1,60	0,945201	1,61	0,946301	1,62	0,947384	1,63	0,948449	1,64	0,949497
1,65	0,950529	1,66	0,951543	1,67	0,952540	1,68	0,953521	1,69	0,954486
1,70	0,955435	1,71	0,956367	1,72	0,957284	1,73	0,958185	1,74	0,959070
1,75	0,959941	1,76	0,960796	1,77	0,961636	1,78	0,962462	1,79	0,963273
1,80	0,964070	1,81	0,964852	1,82	0,965620	1,83	0,966375	1,84	0,967116
1,85	0,967843	1,86	0,968557	1,87	0,969258	1,88	0,969946	1,89	0,970621
1,90	0,971283	1,91	0,971933	1,92	0,972571	1,93	0,973197	1,94	0,973810
1,95	0,974412	1,96	0,975002	1,97	0,975581	1,98	0,976148	1,99	0,976705
2,00	0,977250	2,01	0,977784	2,02	0,978308	2,03	0,978822	2,04	0,979325
2,05	0,979818	2,06	0,980301	2,07	0,980774	2,08	0,981237	2,09	0,981691
2,10	0,982136	2,11	0,982571	2,12	0,982997	2,13	0,983414	2,14	0,983823
2,15	0,984222	2,16	0,984614	2,17	0,984997	2,18	0,985371	2,19	0,985738
2,20	0,986097	2,21	0,986447	2,22	0,986791	2,23	0,987126	2,24	0,987455
2,25	0,987776	2,26	0,988089	2,27	0,988396	2,28	0,988696	2,29	0,988989
2,30	0,989276	2,31	0,989556	2,32	0,989830	2,33	0,990097	2,34	0,990358
2,35	0,990613	2,36	0,990863	2,37	0,991106	2,38	0,991344	2,39	0,991576
2,40	0,991802	2,41	0,992024	2,42	0,992240	2,43	0,992451	2,44	0,992656
2,45	0,992857	2,46	0,993053	2,47	0,993244	2,48	0,993431	2,49	0,993613
2,50	0,993790	2,51	0,993963	2,52	0,994132	2,53	0,994297	2,54	0,994457
2,55	0,994614	2,56	0,994766	2,57	0,994915	2,58	0,995060	2,59	0,995201
2,60	0,995339	2,61	0,995473	2,62	0,995604	2,63	0,995731	2,64	0,995855
2,65	0,995975	2,66	0,996093	2,67	0,996207	2,68	0,996319	2,69	0,996427
2,70	0,996533	2,71	0,996636	2,72	0,996736	2,73	0,996833	2,74	0,996928
2,75	0,997020	2,76	0,997110	2,77	0,997197	2,78	0,997282	2,79	0,997365
2,80	0,997445	2,81	0,997523	2,82	0,997599	2,83	0,997673	2,84	0,997744
2,85	0,997814	2,86	0,997882	2,87	0,997948	2,88	0,998012	2,89	0,998074
2,90	0,998134	2,91	0,998193	2,92	0,998250	2,93	0,998305	2,94	0,998359
2,95	0,998411	2,96	0,998462	2,97	0,998511	2,98	0,998559	2,99	0,998605
3,00	0,998650	3,01	0,998694	3,02	0,998736	3,03	0,998777	3,04	0,998817