

10. Januar 2005

11. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^3 - 21x + 20$?
- 2) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^3 - 21x - 20$?
- 3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ ist HERMITESCH.
- 4) *Richtig oder falsch:* Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist ${}^t A \bar{A}$ HERMITESCH.
- 5) *Richtig oder falsch:* Falls es zum Eigenwert λ einen Hauptvektor r -ter Stufe gibt, hat λ mindestens die algebraische Vielfachheit r .
- 6) *Richtig oder falsch:* Zu jedem Eigenwert der algebraischen Vielfachheit r gibt es einen Hauptvektor r -ter Stufe.
- 7) Die komplexe $n \times n$ -Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ mit den algebraischen Vielfachheiten r_1, \dots, r_s . Was ist $\det A$?

Aufgabe 1: (5 Punkte)

- a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 16 & 0 & -8 \\ -28 & 15 & 14 \\ 16 & 0 & -8 \end{pmatrix}$!
- b) Was ist e^A ?
- c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 16x(t) && - 8z(t), && x(0) = 1 \\ \dot{y}(t) &= -28x(t) + 15y(t) + 14z(t), && y(0) = 0 \\ \dot{z}(t) &= 16x(t) && - 8z(t), && z(0) = 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (8 Punkte)

- a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Hauptvektoren zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$!
- b) Finden Sie eine Basis des \mathbb{R}^3 , bezüglich derer A Dreiecksgestalt hat!
- c) Berechnen Sie die Matrizen A^{100} und e^{At} !
- e) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= && -y(t) + z(t), && x(0) = 1 \\ \dot{y}(t) &= 2x(t) - 4y(t) + 2z(t), && y(0) = 2 \\ \dot{z}(t) &= 3x(t) - 5y(t) + 2z(t), && z(0) = 3 \end{aligned}$$

- f) Was können Sie über das Langzeitverhalten dieser Lösung sagen?