Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

20. Dezember 2004

10. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Unter welcher Bedingung an $\widehat{f}(\omega)$ ist eine stetige Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ durch ihre ganzzahligen Werte bestimmt?

2) *Richtig oder falsch:* $\dot{y}(t) = y(t)$ hat nur die Lösung $y(t) = e^t$.

3) Finden Sie eine $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so daß $e^A = -E$ die negative Einheitsmatrix ist!

4) *Richtig oder falsch:* Für eine $n \times n$-Matrix A gilt: $\det e^A = e^{\det A}$.

5) *Richtig oder falsch:* (A_i) sei eine konvergente Folge von $n\times n$-Matrizen. Dann konvergiert auch die Folge der Matrizen e^{A_i}.

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)

a) Beim radioaktiven Zerfall gemäß $m(t) = m_0e^{-\lambda t}$ bezeichnet man den Zeitpunkt $t_{1/2}$, zu dem $m(t_{1/2}) = m_0/2$ ist, als *Halbwertszeit.* Wie hängt λ von $t_{1/2}$ ab?

b) Das Cäsium 137, das am 26. April 1986 bei der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl freigesetzt wurde, hat eine Halbwertszeit von 30,14 Jahren. Wieviel Prozent dieses Cäsiums 137 sind bis zum 26. Dezember 2004 zerfallen?

c) Die C^{14}-Methode zur radioaktiven Datierung beruht darauf, daß das stabile Kohlenstoffisotop C^{12} und das radioaktive C^{14} in lebenden Organismen in einem festen Massenverhältnis stehen; nach dem Tod des Organismus zerfällt das vorhandene C^{14} mit einer Halbwertszeit von 5763 Jahren, ohne daß neues nachkommt. Bei einer Holzprobe aus den Höhlen von Lascoux maß man 0,97 Zerfälle pro Gramm und Minute; für lebendes Holz wären 6,68 Zerfälle normal. Wie alt ist die Probe?

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)
Eine Rakete wird am 1. Januar 2005 genau um Mitternacht gezündet. Die Treibladung gibt ihr für zwei Sekunden eine konstante Beschleunigung und einem während der Beschleunigungsphase konstanten Steigungswinkel von 3° gegenüber der Senkrechten; sie erreicht eine Höhe von $100\,\text{m}$.

a) Wann erreicht sie diese Höhe, falls die Masse während des Flugs annähernd konstant ist?

b) Wann und in welcher Entfernung vom Abschußpunkt kommt sie zurück zur Erde?

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Für $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}\cdot n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}$ die Matrix e^{At} !

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{x}(t) = -x(t)+y(t)$ und $\dot{y}(t) = -y(t)$!

d) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(0) = 1$ und $y(0) = -1$!

Abgabe bis zum Montag, dem 10. Januar 2005, um 15.30 Uhr