

13. Dezember 2004

9. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Welche Ableitung im Distributionensinne hat die Funktion $f(t) = [t]$, wobei $[t]$ die größte ganze Zahl $s \leq t$ bezeichnet?
- 2) *ditto* für $f(t) = t - [t]$
- 3) Die differenzierbare periodische Funktion f habe die FOURIER-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_0 k}$. Stellen Sie \widehat{T}_f durch eine Linearkombination F geeigneter δ -„Funktionen“ in der Form T_F dar!
- 4) *Richtig oder falsch:* Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gilt bis auf Nullfunktionen
$$(f + g) * (f - g) = f * f - g * g.$$
- 5) *Richtig oder falsch:* $\delta * \delta = \delta$

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ t + 1 & \text{für } -1 \leq t < 0. \\ t - 1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$

- a) Skizzieren Sie die Funktion f !
- b) Berechnen Sie die Ableitung der Distribution T_f !
- c) Geben Sie diese Ableitung, eventuell unter Verwendung von $\delta(t)$, als „Funktion“ an!

Aufgabe 2: (8 Punkte)

- a) Berechnen Sie die Faltung des Rechteckimpulses $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ mit sich selbst!
- b) Was ist die FOURIER-Transformierte dieser Faltung?
- c) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$!
- d) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$ quadratintegrierbar ist!
- e) Was ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt$?

Aufgabe 3: (3 Punkte)

- a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Funktion

$$f(t) = (N_\sigma * N_\tau)(t) \quad \text{mit} \quad N_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}!$$

- b) Zeigen Sie, daß $N_\sigma * N_\tau = N_{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}$ ist!

Abgabe bis zum Montag, dem 20. Dezember 2004, um 15.30 Uhr