

6. Dezember 2004

8. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Für $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist auch $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- 2) *Richtig oder falsch:* Für $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt auch für jedes $r \in \mathbb{R}$ die Funktion
$$g_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \text{ in } L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$
- 3) *Richtig oder falsch:* Für jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$.
- 4) *Richtig oder falsch:* Falls $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ existiert und nicht verschwindet, liegt f nicht in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- 5) *Richtig oder falsch:* $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $T(\varphi) = \hat{\varphi}(0) - |\varphi(2)|$ ist eine Distribution.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

- a) Was ist $\left\| \frac{1}{1+it} \right\|_2$?
- b) Berechnen Sie die L^2 -Normen der Funktion $f(t) = \frac{1}{\cosh t}$ und ihrer FOURIER-Transformierten $\hat{f}(\omega)$! (*Hinweis:* Aus den kleinen Übungen ist bekannt, daß $1/\cosh t$ im SCHWARTZ-Raum liegt. Außerdem sollten Sie die Ableitung von $\tanh t$ kennen.)

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ habe an der Stelle $t \in \mathbb{R}$ den Wert eins, falls es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $n - \frac{1}{2n^2} < t < n + \frac{1}{2n^2}$; ansonsten sei $f(t) = 0$.

- a) Berechnen Sie, falls es existiert, das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$!
- b) Liegt f in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$? Falls ja, was ist $\|f\|_2$?
- c) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von f und, falls existent, deren L^2 -Norm!
- d) Ist f absolut integrierbar?
- e) *Richtig oder falsch:* Zu jeder Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gibt es eine beschränkte Funktion $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, so daß $f - g$ eine Nullfunktion ist.

Aufgabe 3: (3 Punkte)

- a) Was ist die FOURIER-Transformierte der DIRAC-Distribution Δ_a ?
- b) Gibt es eine Funktion f , so daß $\hat{\Delta}_a = T_f$ ist?
- c) Was gilt im Spezialfall $a = 0$?

Abgabe bis zum Montag, dem 13. Dezember 2004, um 15.30 Uhr