Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

22. November 2004

6. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* V sei der Vektorraum aller im Intervall $[-1,1]$ durch eine Taylor-Reihe um Null darstellbaren Funktionen $[-1,1] \to \mathbb{R}$ mit Produkt $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Dann bilden die Potenzen $1, x, x^2, \dots$ ein vollständiges Orthonormalsystem von V.

2) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verschwinde für alle $t < 0$. Dann gilt für alle $\omega \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\widehat{f}(\omega) = \mathcal{L}\{f(t)\}(i\omega)$.

3) Was ist $\mathcal{L}\{\sin(at+b)\}(s)$?

4) *Richtig oder falsch:* Falls es reelle Zahlen c, M gibt, so daß $|f(t)| < Me^{ct}$ ist für alle $t \ge 0$, existiert $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{Re}\, s > c$.

5) *Richtig oder falsch:* Für $f(t) = e^{-t^2}$ existiert $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 1: (*4 Punkte*)
Die Funktion $u(x,y)$ sei harmonisch im Gebiet $x^2+y^2<1$, und ihr Grenzwert für Punkte (x,y) mit $x^2+y^2=1$ sei 1 für $x>0$, und null sonst. Was ist $u(x,y)$?
Hinweis: $\int \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\psi)}\,d\psi = 2\arctan\bigl(\tan(\frac{\varphi-\psi}{2})\cdot\frac{r+1}{r-1}\bigr)$, Unstetigkeit bei $\varphi-\psi=\pi$.

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)
Für eine periodische Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit komplexer Fourier-Reihe $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$ wird $\kappa = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{|k|>1} |c_k|^2}{\sum\limits_{|k|>0} |c_k|^2}}$ als *Klirrfaktor* bezeichnet. Berechnen Sie den Klirrfaktor

a) für eine reine Sinusschwingung
b) für eine periodischen Rechteckschwingung
c) für eine Sägezahnschwingung,
jeweils für die in der Vorlesung behandelte Standardform!

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)
Berechnen Sie die Fourier- und Laplace-Transformierten von

a) $f(t) = \begin{cases} 4-t^2 & \text{für } |t|<2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b) $g(t) = \begin{cases} \cos t & \text{für } |t|<10\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Abgabe bis zum Montag, dem 29. November 2004, um 15.30 Uhr