

2. November 2004

3. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ kann um $z = 0$ in eine LAURENT-Reihe entwickelt werden.
- 2) *Richtig oder falsch:* Hat die meromorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nur endlich viele Polstellen, so läßt sie sich als Summe einer rationalen und einer holomorphen Funktion schreiben.
- 3) Was ist $\text{Res}_0 \frac{\sin z}{z^4}$?
- 4) *Richtig oder falsch:* Für eine gerade meromorphe Funktion f ist $\text{Res}_0 f = 0$.
- 5) *Richtig oder falsch:* Hat die auf \mathbb{C} meromorphe Funktion f nur Pole mindestens zweiter Ordnung, verschwindet $\int_{\gamma} f(z) dz$ für jede geschlossene Kurve γ .

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Bestimmen Sie die LAURENT-Reihen der folgenden Funktionen um den Nullpunkt:

- a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ b) $f(z) = \frac{z+2}{z(z+1)}$ c) $f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$, hier nur die Terme vom Grad ≤ 3 .

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Berechnen Sie für $\gamma: [0, 8] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \begin{cases} t-1-i & \text{für } 0 \leq t \leq 2 \\ it+1-3i & \text{für } 2 \leq t \leq 4 \\ -t+5+i & \text{für } 4 \leq t \leq 6 \\ -it-1+7i & \text{für } 6 \leq t \leq 8 \end{cases}$ die folgenden Integrale:

- a) $\int_{\gamma} \frac{z dz}{2z^2+1}$ b) $\int_{\gamma} \cot z dz$ c) $\int_{\gamma} \frac{9z}{\cos z} dz$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+100}$!