

25. Oktober 2004

2. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Berechnen Sie $\int_{\gamma} \frac{dz}{e^{\cos^2 z}}$ für $\gamma: \begin{cases} [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto 2e^{it} \end{cases}$!
- 2) Was ist $\int_{\gamma} \frac{dz}{|z|}$ für diesen Integrationsweg?
- 3) Richtig oder falsch: $\int_{\gamma} \sqrt{z} dz = 0$.
- 4) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(z) = \frac{1}{\operatorname{Ln} z}$ ist meromorph auf der Menge aller komplexer Zahlen mit positivem Realteil.
- 5) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(z) = \frac{1}{|z|}$ ist meromorph auf ganz \mathbb{C} .

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Berechnen Sie für $\gamma: \begin{cases} [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto 3 + e^{it} \end{cases}$ die folgenden Integrale:

- a) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - \pi}$
- b) $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z - \pi)^2}$
- c) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - \pi^2}$

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Berechnen Sie für $\gamma: \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto 3 + e^{it} \end{cases}$ die folgenden Integrale:

- a) $\int_{\gamma} z^2 dz$
- b) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - \pi}$
- c) $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z - \pi)^2}$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- a) Für $z, w \in \mathbb{C}$ sei $\sin z = \sin w$. Zeigen Sie: Dann ist $\cos z = \pm \cos w$ und $e^{iz} = e^{iw}$ oder $e^{iz} = -e^{-iw}$.
- b) Zeigen Sie: Die komplexe Sinusfunktion ist injektiv auf der Menge

$$W = \left\{ x + iy \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

- c) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion des auf W eingeschränkten Sinus!