

18. Oktober 2004

## 1. Übungsblatt Höhere Mathematik II

**Fragen:** (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:*  $\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$  ist eine auf  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion.
- 2) *Richtig oder falsch:* Die Funktion  $z \mapsto z|z|$  ist holomorph.
- 3) *Richtig oder falsch:* Jede holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  ist konstant.
- 4) Finden Sie eine holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\Re f(x + iy) = u(x, y) = x^2 - y^2$ !  
Ist  $f$  eindeutig bestimmt?
- 5) *Richtig oder falsch:* Die holomorphen Funktionen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  bilden einen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

**Aufgabe 1:** (5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen der Sinus- und der Kosinusfunktion!
- b) Bestimmen Sie die größte Teilmenge  $D_1 \subseteq \mathbb{C}$ , auf der  $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$  als holomorphe Funktion erklärt werden kann, und die größte Teilmenge  $D_2 \subseteq \mathbb{C}$ , auf der  $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$  als holomorphe Funktion erklärt werden kann!
- c) Bestimmen Sie die Ableitungen von Tangens und Cotangens auf  $D_1$  bzw.  $D_2$ !

**Aufgabe 2:** (5 Punkte)

- a) Die Funktion  $u: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf der offenen Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  sei harmonisch (d.h.  $\Delta u \equiv 0$ ) und mindestens  $(m+2)$ -fach stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß dann auch jede  $m$ -te partielle Ableitung von  $u$  harmonisch ist!
- b) Für welche  $r \in \mathbb{R}$  ist die Funktion  $u: \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^r + \dots + x_n^r \end{cases}$  harmonisch?
- c) Für welche  $r \in \mathbb{R}$  ist die Funktion  $u: \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^2 + \dots + x_n^2)^r \end{cases}$  harmonisch?

**Aufgabe 3:** (5 Punkte)

Berechnen Sie für  $\gamma: [0, 8] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = \begin{cases} t - 1 - i & \text{für } 0 \leq t \leq 2 \\ it + 1 - 3i & \text{für } 2 \leq t \leq 4 \\ -t + 5 + i & \text{für } 4 \leq t \leq 6 \\ -it - 1 + 7i & \text{für } 6 \leq t \leq 8 \end{cases}$  die folgenden Integrale:

- a)  $\int_{\gamma} z \, dz$
- b)  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$
- c)  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$ !

Abgabe bis zum Montag, dem 25. Oktober 2004, um 15.30 Uhr