h) Die Cramersche Regel

Determinanten können auch angewandt werden, um die Lösungen eines linearen Gleichungssystems vom Rang n aus n Gleichungen in n Unbekannten in geschlossener Form als Funktion der Koeffizienten darzustellen. Dazu schreiben wir das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ in der Form $x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$, wobei die $\vec{a}_i$ die Spaltenvektoren der Matrix A seien und $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems.

Nun ersetzen wir in $\det A = \det\bigl(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\bigr)$ rechts den Vektor $\vec{a}_i$ durch die rechte Seite $\vec{b}$ des Gleichungssystems. (Es gibt eigentlich keinen vernünftigen Grund, warum wir das tun sollten; auch dieser Trick wird, wie so viele, erst nachträglich durch das Ergebnis gerechtfertigt.) Die so entstehende Determinante ist

$$\begin{aligned}
&\det\bigl(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{a}_n\bigr)\\
&= \det\Bigl(\vec{a}_1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} x_j\vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n\Bigr)\\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \det\bigl(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n\bigr)\\
&= x_i \det\bigl(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_n\bigr) = x_i \det A\,,
\end{aligned}$$

da für jeden Index $j \neq i$ der Vektor $\vec{a}_j$ zweimal als Argument der Determinante auftritt, so daß alle Summanden bis auf den i-ten verschwinden.

Falls $\det A = 0$ ist, nützt uns diese Formel überhaupt nichts; ist allerdings $\det A \neq 0$, wissen wir bereits, daß das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, und wir können die Komponenten dieser eindeutig bestimmten Lösung explizit ausdrücken durch die

CRAMERsche Regel: $$x_i = \frac{\det\bigl(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{a}_n\bigr)}{\det A}$$

Der Schweizer Mathematiker GABRIEL CRAMER (1704–1752) lehrte an der Universität Genf. Bekannt wurde er vor allem durch seine Arbeiten über Determinanten, er beschäftigte sich aber auch viel mit Analysis und Geometrie, insbesondere ist er Autor eines Buchs über algebraische Kurven. Weitere Arbeitsgebiete sind mathematische Methoden der Physik sowie die Geschichte der Mathematik. Die CRAMERsche Regel im Spezialfall $n = 2$ ist bereits 1545 in der *Ars magna* des italienischen Mathematikers GIROLAMO CARDANO (1501–1576) zu finden.

Die CRAMERsche Regel ist sicherlich kein Verfahren, das man oft anwendet zur Lösung eines einzelnen Gleichungssystems: Abgesehen von einigen Fällen mit sehr spärlich besetzter Matrix ist der Aufwand für die Berechnung von $n + 1$ Determinanten weit größer als eine Lösung nach dem GAUSS-Algorithmus. Falls man allerdings eine ganze Familie ähnlicher Gleichungssysteme hat, in der sich nur wenige Parameter ändern und bei denen die Determinanten auf Grund einer speziellen Form des Gleichungssystems gut berechenbar sind, kann es sich lohnen, mit Hilfe der CRAMERschen Regel eine (von den Parametern abhängige) Lösungsformel zu berechnen und dann diese anzuwenden.

i) Eigenwerte und Eigenvektoren

Aus §3*j1)* kennen wir die Begriffe *Eigenwert* und *Eigenvektor:* Ein vom Nullvektor verschiedener Vektor $\vec{v} \in k^n$ heißt Eigenvektor der Matrix $A \in k^{n\times n}$ zum Eigenwert $\lambda \in k$, wenn $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ist, wenn also die Matrix A den Vektor $\vec{v}$ einfach auf eines seiner skalaren Vielfachen abbildet. Falls es eine Basis aus Eigenvektoren gibt, bekommt die Matrix A bezüglich dieser Basis Diagonalgestalt, wobei in der Diagonalen gerade die zugehörigen Eigenwerte stehen.

Wir werden uns erst im nächsten Semester (im Zusammenhang mit Systemen linearer Differentialgleichungen) genauer mit Eigenwerten und Eigenvektoren befassen und dann auch Kriterien kennenlernen, wann eine Matrix diagonalisierbar ist. In diesem Semester möchte ich, als Abschluß des Kapitels über lineare Algebra, nur kurz zeigen werden, wie man die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix finden kann.

Die Gleichung $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ läßt sich umschreiben als

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}\,,$$

das heißt, als ein homogenes lineares Gleichungssystem für den Vektor $\vec{v}$. Ein solches homogenes Gleichungssystem hat bekanntlich stets den Nullvektor als Lösung, der aber nach Definition genau aus diesem Grund kein Eigenvektor ist. Weitere Lösungen gibt es genau dann, wenn die Matrix $A - \lambda E$ des Gleichungssystems nicht den maximal möglichen Rang hat, wenn ihre Spaltenvektoren also linear abhängig sind oder wenn $\det(A - \lambda E)$ verschwindet.

Somit ist $\lambda \in k$ genau dann ein Eigenwert, wenn $\det(A - \lambda E) = 0$ ist; die zugehörigen Eigenvektoren sind die nichttrivialen Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$.

Damit ist klar, wie man Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen kann: Man löse die Gleichung $\det(A-\lambda E) = 0$ und dann für jede Nullstelle λ_i dieser Gleichung das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$. Dieses homogene lineare Gleichungssystem hat *nie* maximalen Rang, da es nach Definition eines Eigenwerts nichttriviale Lösungen geben muß; kommt man also auf ein eindeutig lösbares Gleichungssystem (und damit auf den Nullvektor als einzige Lösung), ist das immer ein Zeichen für einen Rechenfehler.

Dies zeigt auch, daß die numerische Bestimmung von Eigenvektoren nicht nach obigem Schema vorgehen kann: Falls man die Nullstellen der charakterischen Gleichung nur näherungsweise kennt, kann die Matrix des linearen Gleichungssystems eine leicht von null verschiedene Determinante haben, so daß das Gleichungssystem nur die triviale Lösung hat. In der Numerik werden Eigenwerte und Eigenvektoren daher simultan berechnet – sofern man beides braucht. Es gibt auch numerische Algorithmen, die nur die (angenäherten) Eigenwerte bestimmen ohne $\det(A-\lambda E)$ zu berechnen; dies ist vor allem nützlich für große n, wo die Berechnung einer Determinanten sehr aufwendig wäre. Für Genaueres sei auf die Numerikvorlesung verwiesen.

Als Beispiel für die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

nach obiger Methode betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hier ist

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6-\lambda & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6-\lambda & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix},$$

und nach dem Entwicklungssatz ist (bei Entwicklung nach der ersten Zeile)

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E) &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & 7 & 8 \\ 7 & 6-\lambda & 5 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\quad - 2\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 8 & 6-\lambda & 5 \\ 4 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\quad + 3\begin{vmatrix} 5 & 6-\lambda & 8 \\ 8 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 6-\lambda & 7 \\ 8 & 7 & 6-\lambda \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)(-\lambda^3 + 13\lambda^2 + 35\lambda) - 2(5\lambda^2 + 53\lambda) \\
&\quad + 3(-8\lambda^2 + \lambda) - 4(4\lambda^2 - 17\lambda) \\
&= \lambda^4 - 14\lambda^3 - 72\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 14\lambda - 72)\,.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck verschwindet genau dann, wenn entweder λ verschwindet oder der Klammerausdruck ganz hinten. Letzterer ist eine quadratische Gleichung für λ, die man entweder nach der üblichen Formel lösen kann, oder aber man beachtet den Wurzelsatz von VIÈTE, wonach die Summe der beiden Lösungen 14 und ihr Produkt -72 sein muß; da $72 = 4 \times 18$ ist, können die beiden Lösungen daher nur -4 und 18 sein. Die Nullstellen des Polynoms sind also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -4$ und $\lambda_4 = 18$.

Die Eigenwerte von A sind damit 0, -4 und 18; für jeden dieser Werte müssen wir über ein lineares Gleichungssystem die Eigenvektoren bestimmen.

Beginnen wir mit $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Hier ist das Gleichungssystem einfach $A\vec{x} = \vec{0}$, d.h.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 0 \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \,. \end{aligned}$$

Aufgrund der speziellen Struktur der Matrix A ergänzen sich die erste und die vierte Gleichung zu

$$5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0\,;$$

entsprechend addieren sich die beiden mittleren Gleichungen zu

$$13(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0\,.$$

Da außerdem noch die Differenz zwischen den ersten beiden Gleichungen auf

$$4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0$$

führt, genügt es, außer der ersten Gleichung noch als einzige weitere Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{oder} \quad x_1 = -(x_2 + x_3 + x_4)$$

zu betrachten. Subtrahiert man diese Gleichung von der ersten oder, was dasselbe ist, setzt man sie ein, so bleibt

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

als einzige Relation zwischen x_2, x_3 und x_4. Das gegebene Gleichungssystem ist also äquivalent zu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0\,; \end{aligned}$$

insbesondere hat es den Rang zwei und damit einen Lösungsraum der Dimension $4 - 2 = 2$.

(Es ist klar, daß der Rang des Gleichungssystems kleiner als vier sein muß, denn sont gäbe es keine nichttriviale Lösungen. Bei der Berechnung von Eigenvektoren über lineare Gleichungssysteme gibt es also immer Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Gleichungen.)

Im noch verbliebenen Gleichungssystem kann beispielsweise x_4 beliebig gewählt werden. Ist $x_4 = 0$, so bleibt noch die Relation $x_2 + 2x_3 = 0$ übrig, in der etwa x_3 beliebig gewählt werden kann; danach sind $x_2 = -2x_3$ und $x_1 = x_3$ eindeutig festgelegt; die entsprechenden Lösungen sind also die Vielfachen der Lösung $(1, -2, 1, 0)$.

Genausogut könnte etwa $x_3 = 0$ gesetzt werden; dann wäre $x_2 = -3x_4$ und $x_1 = 2x_4$; dies führt auf die Vielfachen der Lösung $(2, -3, 0, 1)$.

Damit haben wir zwei linear unabhängige Lösungen gefunden; da der Lösungsraum zweidimensional ist, sind die sämtlichen Lösungen des Gleichungssystems die Linearkombinationen

$$x_1 = -\lambda - 2\mu, \quad x_2 = 2\lambda - 3\mu, \quad x_3 = \lambda \quad \text{und} \quad x_4 = \mu$$

dieser beiden Lösungen; die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden also eine Basis des Eigenraums von A zum Eigenwert Null.

Genauso lassen sich auch die Eigenwerte -4 und 18 behandeln: -4 führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 0 \\ 8x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_1 &= 0\,, \end{aligned}$$

dessen sämtliche Lösungen die Vielfachen von $(-1, -1, 1, 1)$ sind, und für den Eigenwert 18 schließlich erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -17x_1 + \ 2x_2 + \ 3x_3 + \ 4x_4 &= 0 \\ 5x_1 - 12x_2 + \ 7x_3 + \ 8x_4 &= 0 \\ 8x_1 + \ 7x_2 - 12x_3 + \ 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + \ 3x_2 + \ 2x_3 - 17x_4 &= 0 \end{aligned}$$

mit den Vielfachen von (5, 13, 13, 5) als Lösungsraum.

Im nächsten Semester werden wir (durch ein sehr einfaches Argument) allgemein sehen, daß Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stets linear unabhängig sind. Hier bei diesem Beispiel allerdings soll die lineare Unabhängigkeit zum weiteren Üben des Umgangs mit Determinanten direkt nachgerechnet werden:

$$\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 1 & 13 \\ 1 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Dieses Mal wollen wir die Determinante zur Abwechslung à la GAUSS ausrechnen, d.h. indem wir die Matrix zut Zeilenumformungen auf Dreiecksgestalt bringen: Addition von zweimal der ersten Zeile zur zweiten und Subtraktion der ersten Gleichung von der dritten zeigt, daß

$$\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 23 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 23 \\ -2 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

ist. Addition von zweimal der ersten Zeile zur zweiten und Subtraktion der ersten Zeile von der dritten vereinfacht die rechtsstehende Determinante weiter zu

$$\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 23 \\ 0 & -4 & 54 \\ 0 & 4 & -18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 54 \\ 4 & -18 \end{vmatrix}.$$

Addiert man schließlich noch in der verbleibenden 2×2-Matrix die erste Zeile zur zweiten, erhält man das Endergebnis

$$\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4) = \begin{vmatrix} -4 & 54 \\ 0 & 36 \end{vmatrix} = -4 \cdot 36 = -144 \neq 0\,.$$

Also sind die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

Was haben wir nun erreicht? Betrachten wir die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4; \quad \vec{v} \mapsto A \cdot \vec{v}\,.$$

Für die Vektoren

$$\vec{b}_1 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ist

$$\varphi(\vec{b}_1) = 0\,\vec{b}_1, \quad \varphi(\vec{b}_2) = 0\,\vec{b}_2, \quad \varphi(\vec{b}_3) = -4\,\vec{b}_3 \quad \text{und} \quad \varphi(\vec{b}_4) = 18\,\vec{b}_4\,;$$

bezüglich der neuen Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ hat φ daher die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix},$$

bei der die Eigenwerte von A in der Hauptdiagonalen stehen und alle sonstigen Einträge verschwinden, wir konnten die Matrix A also diagonalisieren.

j) Geschichte und Anwendungen von Determinanten

Determinanten erblickten das Licht der Welt im Jahr 1683, und zwar gleich zweimal: Der japanische Mathematiker SEKI benutzte sie, ohne Ihnen einen Namen zu geben, zur Lösung von Gleichungen höheren Grades und zeigte anhand von Beispielen, wie man sie für 2×2- bis 5×5-Matrizen berechnet. Im gleichen Jahr schrieb auch LEIBNIZ einen Brief an DE L'HÔPITAL, in dem er erwähnte, daß ein gewisses homogenes lineares Gleichungssystem in drei Variablen nichttrivial lösbar sei, da (in heutiger Terminologie) seine Determinante verschwinde.

TAKAKAZU SEKI KOWA (1642–1708) war Sohn eines Samurai, wurde aber schon sehr jung von einem Adeligen namens SEKI GOROZAYEMON adoptiert. Einer von dessen Dienern weckte das Interesse des neunjährigen SEKI an der Mathematik, woraufhin dieser eine große Bibliothek japanischer und chinesischer Mathematikbücher anschaffte, anhand derer er sich selbst in das Gebiet einarbeitete. Als Staatsbeamter und ab 1704 Zeremonienmeister des Shogun befaßte er sich weiterhin viel mit Mathematik und entdeckte außer Determinanten beispielsweise auch das NEWTON-Verfahren und (vor JAKOB BERNOULLI) die BERNOULLI-Zahlen.

LEIBNIZ sprach noch nicht von Determinanten, sondern von *Resultanten;* ein Begriff, den unabhängig davon 1772 auch LAPLACE benutzte, als er damit die Bahnen der inneren Planeten berechnete. Das *Wort* Determinante erschien erstmal 1801 in den *Disquisitiones arithmeticae* von GAUSS, der damit die Eigenschaften quadratischer Formen untersuchte. Auch CAUCHY, der 1812 den Multiplikationssatz bewies, sprach von Determinanten.

Heute bezeichnet man als *Resultanten* spezielle Determinaten, die zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme benutzt werden und auf den englischen Mathematiker JAMES JOSEPH SYLVESTER (1814–1897) zurückgehen. Mit Hilfe solcher Resultanten gelang es beispielsweise 1985 zwei Mathematikern bei *General Motors* das inverse kinematische Problem für einen Roboterarm mit sechs Freiheitsgraden zu lösen, d.h. also ein Verfahren zu entwickeln, mit dem der Manipulator am Ende des Arms *automatisch* auf eine vorgegebene Position und Ausrichtung gebracht werden kann.

Weitere wichtige Anwendungen haben Determinanten auch in der Numerik, wo sie sowohl *Konditionszahlen* definieren, die etwas über die Stabilität und Robustheit eines Verfahrens aussagen, als auch beispielsweise (wie die VANDERMONDEsche Determinante) bei der Approximation von Funktionen oder Datenpunkten durch Polynomfunktionen verwendet werden. Natürlich sind sie auch wichtig für Volumenberechnungen; dieser Aspekt wird uns auch im nächsten Kapitel wieder begegnen, wenn wir Mehrfachintegrale von einem Koordinatensystem in ein anderes transformieren.

Kapitel 2
Mehrdimensionale Analysis

Im letzten Kapitel hatten wir *lineare* Funktionen zwischen Vektorräumen betrachtet, insbesondere also auch Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$. Um solche Funktionen soll es auch in diesem Kapitel gehen, allerdings lassen wir nun die Forderung der Linearität fallen und verlangen nur noch deutlich schwächere Eigenschaften wie etwa Stetigkeit und/oder Differenzierbarkeit.

§1: Funktionen und ihre Eigenschaften

a) Darstellungsmöglichkeiten für Funktionen

Bei den linearen Funktionen im vorigen Kapitel hatten wir sowohl die Argumente als auch die Bilder als *Vektoren* aufgefaßt. Zumindest bei den Argumenten entspricht dies definitiv nicht der Betrachtungsweise der Analysis oder auch der Geometrie: Wir wollen Funktionen in *Punkten* auswerten, nicht in Vektoren. Wir fassen daher bei einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ den $\mathbb{R}^n$ nicht als Vektorraum auf, sondern als Punktmenge, wie wir es schon aus Kapitel I, §3*g)* von den affinen Räumen her gewohnt sind. Wie dort wollen wir aber Punkte mit Vektoren verknüpfen, wobei der Punkt $\boldsymbol{x} + \vec{h}$ der Endpunkt des im Punkt $\boldsymbol{x}$ abgetragenen Vektors $\vec{h}$ sein soll. Seine i-te Koordinate ist also $x_i + h_i$, wobei x_i die i-te Koordinate von $\boldsymbol{x}$ und h_i die i-te Komponente von $\vec{h}$ bezeichnet.

Für Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind wir gewohnt, deren Graphen

$$\Gamma_f \underset{\text{def}}{=} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) \right\}$$

zu zeichnen; entsprechend können wir natürlich auch für eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ den Graphen

$$\Gamma_f \underset{\text{def}}{=} \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \;\middle|\; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})\right\}$$

definieren; da dieser in $\mathbb{R}^{n+m}$ liegt, ist er allerdings nur für $n + m \leq 3$ wirklich anschaulich, und auch da kann es bei komplizierten Funktionen stark von der gewählten Perspektive abhängen, was man sieht. Für einfache reellwertige Funktionen zweier Veränderlicher jedoch ist der Graph sicherlich die einfachste Methode der Veranschaulichung. Beim Graphen der Funktionen

$$f: \begin{cases} [-1,1] \times [-1,1] & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

in Abbildung 25 etwa sieht man recht gut, daß Γ_f Teil einer Kugeloberfläche ist.

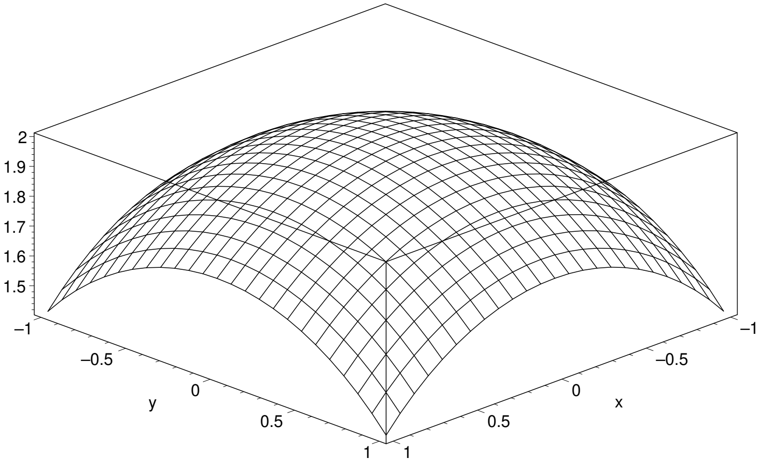


Abb. 25: Graph der Funktion $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Eine andere Möglichkeit zur Veranschaulichung von Funktionen zweier Veränderlicher ist von topographischen Karten her bekannt: Dort wird die Höhe über dem Meeresspiegel, eine Funktion der beiden Ebenenkoordinaten, dargestellt durch *Höhenlinien.* Entsprechend können wir für

eine beliebige Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und jeden Wert $c \in \mathbb{R}$ die *Niveaulinie*

$$N_c(f) \underset{\text{def}}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x,y) = c\right\}$$

definieren; sie muß natürlich keine „Linie“ sein, sondern kann auch nur aus einigen Punkten bestehen, leer sein oder – im Falle einer konstanten Funktion – für einen Wert c aus dem gesamten Definitionsbereich D der Funktion bestehen.

Im Falle des obigen Beispiels etwa ist $N_c(f)$ für $c > 2$ und für $c < \sqrt{2}$ die leere Menge; für $c = 2$ besteht sie nur aus dem Nullpunkt, und für $c = \sqrt{2}$ aus den vier Punkten $(0, \pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$. Für $\sqrt{2} < c < 2$ erhalten wir die in Abbildung 26 für $c = 1{,}5$ bis $c = 2$ in Schritten von 0,05 dargestellten Kreislinien

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2} = c \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = 4 - c^2 ,$$

eingeschränkt natürlich auf das Einheitsquadrat als dem Definitionsbereich von f.

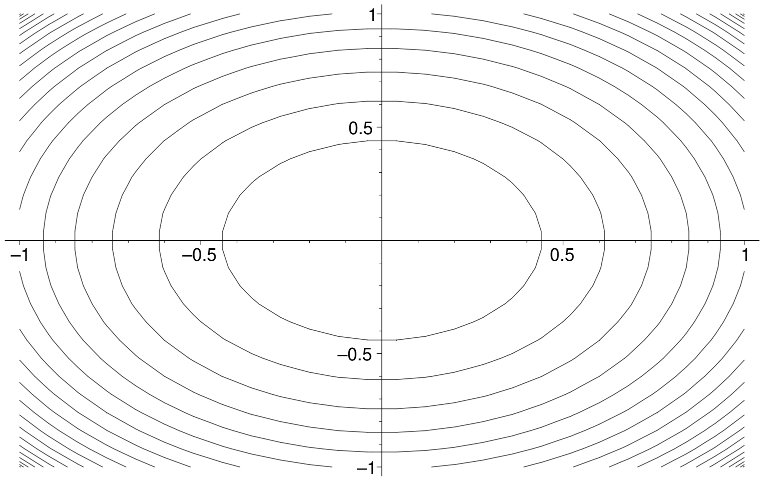


Abb. 26: Niveaulinien der Funktion $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Für Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen ist die Visualisierung naturgemäß schwieriger; wir können Graphen und Niveaulinien, -flächen *usw.* zwar problemlos definieren, aber nicht mehr zeichnen – es sei denn, es handelt sich um sehr einfache Niveauflächen im $\mathbb{R}^3$. Bei Funktionen in einem mehrdimensionalen Raum kommt hinzu, daß die Niveauflächen dann nicht mehr nur von einem, sondern von mehreren Parametern abhängen.

Ansonsten gibt es für Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen beispielsweise die Möglichkeit, einen Teil der Variablen auf interessanten Werten festzuhalten und die so eingeschränkte Funktion darzustellen. Dies gibt natürlich kein vollständiges Bild der Funktion, aber mehrere geschickt ausgewählte solche Bilder können doch einen recht guten Eindruck von der Funktion vermitteln.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, auf einem zwei- oder dreidimensionalen Graphen durch Farbe, Textur *usw.* weitere Dimensionen darzustellen; allgemein bekannt ist die Kodierung der Höhe durch von Grün nach Braun laufende Farben in Atlanten oder auch die Darstellung der Temperatur durch Farbverläufe von Blau über Rot nach Weiß. Grundsätzlich kann man mit Farben auch mehr als eine Dimension darstellen, da wir ja in Kapitel I, §4*d)* gesehen haben, daß Farben durch Punkte eines dreidimensionalen Raums beschrieben werden können. Zwar wird eine RGB-Darstellung von drei Dimensionen die meisten Betrachter überfordern, aber die Farbdarstellung zweier Dimensionen etwa durch eine Luminanz- und eine Chrominanzkoordinate ist durchaus anschaulich.

Ein eigenes Forschungsgebiet der Mathematik und Informatik, die Visualisierung, beschäftigt sich mit den Problem, die für eine bestimmte Fragestellung interessanten Aspekte einer (analytisch oder empirisch gegebenen) Funktion mehrerer Veränderlichen graphisch herauszuarbeiten.

b) Normierte Vektorräume

Mit Hilfe von klassischen wie auch HERMITEschen Skalarprodukten konnten wir die Länge $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$ eines Vektors definieren und damit

beispielsweise auch Abstände zwischen Punkten eines affinen Raums –sofern der zugehörige Vektorraum EUKLIDisch oder HERMITEsch ist. Manchmal konnt es nur auf diese Längen an, nicht auf die Produkte; daher wollen wir diese hier für sich betrachten:

Sie haben folgende Eigenschaften:
a) $|\lambda\vec{v}| = |\lambda|\,|\vec{v}|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{v} \in V$
b) $|\vec{v}| \geq 0$ für alle $\vec{v} \in V$, und $|\vec{v}| = 0$ genau dann, wenn $\vec{v} = \vec{0}$
c) $|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$.

Abgesehen von *c),* der *Dreiecksungleichung,* sind diese Eigenschaften klar; wegen

$$|\vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2\vec{v}\vec{w} \qquad \text{und}$$
$$(|\vec{v}| + |\vec{w}|)^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2\,|\vec{v}|\,|\vec{w}|$$

folgt letztere im Falle $\vec{v}\cdot\vec{w} \geq 0$ sofort aus der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung und für $\vec{v}\cdot\vec{w} < 0$ aus der Nichtnegativität der Norm.

Definition: Ein normierter Vektorraum ist ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum V zusammen mit einer Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften *a)* bis *c).*

Damit ist also jeder EUKLIDische oder HERMITEsche Vektorraum insbesondere auch ein normierter Vektorraum, es gibt aber auch normierte Vektorräume, deren Norm nichts mit einem Skalarprodukt zu tun hat:

Beispielsweise erfüllt die *Maximumsnorm*

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \max_{i=1}^{n} |v_i|$$

offensichtlich die Bedingungen *a)* bis *c).* Sie kommt aber nicht von einem Skalarprodukt, denn gäbe es ein Skalarprodukt $\star$ mit $\|\vec{v}\|_\infty = \sqrt{\vec{v}\star\vec{v}}$; so wäre etwa im $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_\infty^2 = 1 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|_\infty^2 = 1\,,$$

also

$$1 = \left\| \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\|_\infty^2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right) \star \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right) = 1+1+2 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \star \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

und somit $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \star \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$ und $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \star \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -1$. Mithin wäre

$$4 = \left\| \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right\|_\infty^2 = \left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right) \star \left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right) = 4 + 1 - 2 = 3\,,$$

ein offensichtlicher Widerspruch.

Maximumsnormen lassen sich nicht nur für $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ definieren, sondern auch für Funktionenräume: Eine stetige Funktion $f\colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$ auf einem *abgeschlossenen* Intervall $[a,\, b]$ nimmt ihr Maximum wirklich an, d.h die Abbildung

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}^0\big([a,\, b],\ \mathbb{R}\big) \to \mathbb{R}; \qquad f \mapsto \max_{x\in[a,\,b]} |f(x)|$$

ist wohldefiniert (für eine stetige Funktion f ist auch $|f|$ eine stetige Funktion) und sie hat die Eigenschaften *a)* bis *c): a)* und *b)* sind, wie in den meisten Fällen, trivial, und sind $f, g \in \mathcal{C}^0\big([a,\, b],\ \mathbb{R}\big)$ zwei Funktionen, von denen f ihr Maximum in x_1 annimmt, g in x_2 und $f+g$ in x^*, so ist

$$\begin{aligned} \|f+g\|_\infty &= \big|(f+g)(x^*)\big| = \big|f(x^*) + g(x^*)\big| \le \big|f(x^*)\big| + \big|g(x^*)\big| \\ &\le \max_{x\in[a,\,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,\,b]} |g(x)| = f(x_1) + g(x_2) \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\ . \end{aligned}$$

Maximumsnormen spielen unter anderem in der Numerik eine wichtige Rolle; sie gestatten es beispielsweise, Fehlerschranken für numerische Rechnungen herzuleiten:

Führen wir beispielsweise auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times m}$ aller $n \times m$-Matrizen die Maximumsnorm ein, so ist natürlich

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \max_{j=1}^{m} \big|a_{ij}\big|\ .$$

Betrachten wir auch $\mathbb{R}^m$ mit der Maximumsnorm, so folgt für ein Produkt $A\vec{v} = \vec{b}$ sofort aus der Multiplikationsregel

$$b_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j$$

und der gewöhnlichen Dreiecksungleichung aus $\mathbb{R}$

$$|b_i| \le \sum_{j=1}^{m} \big|a_{ij}\big| \cdot \big|v_j\big|\ ,$$

daß $\big\|\vec{b}\big\|_\infty \le \|A\|_\infty \cdot \|\vec{v}\|_\infty$ ist.

Wird also der Vektor $\vec{v}$ durch einen Fehlervektor $\vec{\epsilon}$ gestört, so ist

$$A(\vec{v} + \vec{\epsilon}) = A\vec{v} + A\vec{\epsilon} = \vec{b} + A\vec{\epsilon}$$

mit einem Fehler behaftet, dessen Komponenten *mit Sicherheit* kleiner sind als

$$\|A\|_\infty \cdot \|\vec{\epsilon}\|_\infty\ .$$

(Tatsächlich wird diese Schranke in den meisten Fällen viel zu groß sein, aber realistische Schranken sind in der Numerik oft – wenn überhaupt – nur mit sehr großem Aufwand zu finden.)

Ebenfalls eine sehr wichtige Rolle spielen Normen bei Funktionenräumen; dafür werden wir im nächsten Semester zahlreiche Beispiele sehen. Der wesentliche Punkt ist, daß man bezüglich einer Norm in offensichtlicher Verallgemeinerung der klassischen Definitionen Begriffe wie Konvergenz und Stetigkeit definieren kann:

Definition: *a)* $\big(V, \|\cdot\|\big)$ sei ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Folge $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots$ von Vektoren aus V konvergiert gegen den Vektor $\vec{v} \in V$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\|\vec{v} - \vec{v}_n\| < \varepsilon$ für alle $n > N$.
b) Eine Abbildung $f\colon D \to W$ von der Teilmenge $D \subseteq V$ eines normierten Vektorraums $\big(V, \|\cdot\|_1\big)$ in einen normierten Vektorraum $\big(W, \|\cdot\|_2\big)$ heißt stetig in $\vec{v}_0 \in D$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $\vec{v} \in D$ gilt: Ist $\|\vec{v} - \vec{v}_0\| < \delta$, so ist $\|f(\vec{v}) - f(\vec{v}_0)\| < \varepsilon$.
c) f heißt stetig, wenn f in jedem Punkt $\vec{v}_0 \in D$ stetig ist.

Anschaulich betrachtet bedeutet Konvergenz, daß ich die Punkte immer näher an einen Grenzwert annähern, und Stetigkeit bedeutet, daß die Funktion keine Sprünge macht. Warum brauchen wir für so einfache und anschauliche Dingen so komplizierte Definitionen wie die obigen?

Ursprünglich, bei NEWTON und bei LEIBNIZ geht tatsächlich noch alles ohne δ und ϵ mit Definitionen, die der anschaulichen Vorstellung entsprechen, und beide hatten damit großen Erfolg: Insbesondere wurde die Physik auf eine völlig neue Grundlage gestellt und die naturwissenschaftliche Erklärung der Welt machte rasante Fortschritte.

SIR ISAAC NEWTON (1643–1727) war ab 1661 Student, ab 1669 Professor an der Universität Cambridge. Dort entwickelte er die Infinitesimalrechnung, die er 1671 in seinem Buch *De Methodis Serierum et Fluxionum* beschrieb, arbeitete über Optik, wo er unter anderem dünne Schichten und Beugungsphänomene untersuchte (NEWTONsche Ringe), entdeckte seine Bewegungsgesetze und das Gravitationsgesetz, veröffentlicht 1687 in seinem Buch *Philosophiae naturalis principia mathematica,* das von vielen als bedeutendstes wissenschaftliches Buch aller Zeiten angesehen wird. Nach zwei Nervenzusammenbrüchen ging er 1693 nach London, wo er die königliche Münze leitete.

Die neue Weltsicht einiger Naturwissenschaftler führte zu Spannungen mit der Theologie; mehrere Theologen veröffentlichten ihrerseits mehr oder weniger fundierte Kritiken an den Naturwissenschaften. Heute noch bekannt sind beispielsweise *Gulliver's travels* von JONATHAN SWIFT (1667–1745), wo im dritten Buch vor allem die Mathematiker und Naturwissenschaftler aufs Korn genommen werden.

Am berechtigtsten war die Kritik in BERKELEYs Buch „The Analyst: or a discourse addressed to an infidel mathematician" (gemeint war wahrscheinlich EDMOND HALLEY (1656?–1743), heute vor allem bekannt durch den nach ihm benannten Kometen), in dem er zeigte, wie unsicher die Grundlagen der Infinitesimalrechnung sind und wie leicht man im Umgang damit zu unsinnigen Ergebnissen kommen kann – ganz im Gegensatz, so seine Meinung, zur wissenschaftlich erheblich fundierteren und logischer aufgebauten Theologie. Kleiner Auszug: *And what are these fluxions? The velocities of evanescent increments. And what are these same evanescent increments? They are neither finite quantities, nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them ghosts of departed quantities?*

Es dauerte geraume Zeit, bis die Mathematik dieser Kritik etwas Substantielles entgegensetzen konnte: Erst um 1800 gelang es CAUCHY die Analysis logisch zweifelsfrei zu verankern in der Theorie der algebraischen Ungleichungen; seit dieser Zeit arbeiten wir mit ε und δ. Mittlerweile gibt es mit der sogenannten *nonstandard analysis* auch eine Alternative, die in der Prädikatenlogik erster Stufe verankert ist; da die Prädikatenlogik

erster Stufe aber zum Beispiel keine vollständige Induktion gestattet, ist diese Alternative jedoch keineswegs einfacher, sondern hängt an recht diffizilen logischen Sätzen.

GEORGE BERKELEY (1685–1753) studierte und lehrte Theologie am Trinity College in Dublin. In der Philosophie gilt er als einer der Begründer des Empirizismus, den er als Gegenposition zum mechanistischen Materialismus der Naturwissenschaften seiner Zeit aufbaute. Als sehr streitbarer Gelehrter war er bald mit fast allen Kollegen am Trinity College verkracht; daher wurde er 1734 zum Bischof von Cloyne, weit weg von Dublin, ernannt, wo er sowohl praktisch als auch durch eine dreibändige Streitschrift für die Rechte der Landbevölkerung kämpfte. Anläßlich einer Ruhr-Epedemie 1741 begann er auch mit pharmazeutischen Studien.

Mit den obigen Definitionen haben wir somit ein zwar solides, aber doch gelegentlich unhandliches Werkzeug, mit dem wir in jedem normierten Vektorraum Analysis betreiben können. Wir müssen aber damit rechnen, daß die Ergebnisse im allgemeinen stark von der Norm abhängen werden, und in der Tat werden wir dies im nächsten Semester eindrucksvoll sehen können. In diesem Semester allerdings interessieren wir uns vor allem für die Vektorräume $\mathbb{R}^n$, und dort ist die Situation deutlich harmloser.

Offensichtlich definieren zwei Normen denselben Konvergenzbegriff und denselben Stetigkeitsbegriff, wenn sie äquivalent sind im Sinne der folgenden Definition:

Definition: Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einen Vektorraum V heißen äquivalent, wenn es reelle Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, so daß

$$c_1 \|\vec{v}\|_1 \le \|\vec{v}\|_2 \le c_2 \|\vec{v}\|_1 \ .$$

Offensichtlich ist dann auch

$$\frac{1}{c_2} \|\vec{v}\|_2 \le \|\vec{v}\|_1 \le \frac{1}{c_1} \|\vec{v}\|_2 \ ,$$

die Äquivalenz ist also, wie es sein muß, symmetrisch.

Beispielsweise sind auf jedem $\mathbb{R}^n$ die EUKLIDische Norm $\|\cdot\|_2$ und die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent, denn

$$\|\vec{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} \le \sqrt{n\,\|\vec{v}\|_\infty^2} = \sqrt{n}\;\|\vec{v}\|_\infty$$

und

$$\|\vec{v}\|_\infty = \sqrt{\|\vec{v}\|_\infty^2} \le \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} = \|\vec{v}\|_2 \;,$$

d.h.

$$\|\vec{v}\|_\infty \le \|\vec{v}\|_2 \le \sqrt{n}\;\|\vec{v}\|_\infty \;.$$

Anschaulich bedeutet dies, daß jeder Würfel in eine Kugel eingebettet werden kann und umgekehrt, denn

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_n \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\|_\infty \le a\right\}$$

ist ein Würfel mit Kantenlänge $2a$ und

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_n \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\|_2 \le r\right\}$$

eine Kugel mit Radius r.

Tatsächlich kann man zeigen, daß in $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind, so daß es dort nur einen Konvergenz- und Stetigkeitsbegriff gibt.

Wir werden in $\mathbb{R}^n$ praktisch immer mit der EUKLIDischen Norm oder der Maximumsnorm arbeiten, wobei die erstere anschaulicher ist, die letztere aber meist einfacher für konkretes Nachrechnen.

Als Beispiel sei noch einmal angegeben, wie die obige Stetigkeitsdefinition aussieht für eine Funktion von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$, ausgedrückt in der Maximumsnorm:

Definition: Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt stetig im Punkt $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für jeden Punkt $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in D$ gilt: Falls $|y_i - x_i| < \delta$ ist für alle i, dann ist $|f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})| < \varepsilon$.

Im Eindimensionalen kann man der graphischen Darstellung einer Funktion leicht ansehen, ob sie stetig ist oder nicht; wir wollen schauen, wie dies im Mehrdimensionalen ist.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf ein Funktion zweier Veränderlicher, z.B. die Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases} .$$

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist die Funktion offensichtlich stetig, denn dort ist sie nur durch Grundrechenarten definiert, wobei Division durch Null ausgeschlossen ist, da $x^2 + y^4$ nur im Nullpunkt verschwindet. Bleibt also der Punkt $(0,0)$ zu untersuchen.

Der Graph von f in einer kleinen Umgebung von $(0,0)$ ist in Abbildung 27 zu sehen. Er zeigt zwar einen relativ steilen Sprung entlang der Geraden $x = 0$, aber nur für die etwas weiter vom Nullpunkt entfernten x-Werte; bei $y = 0$ sieht alles harmlos und ziemlich eben aus.

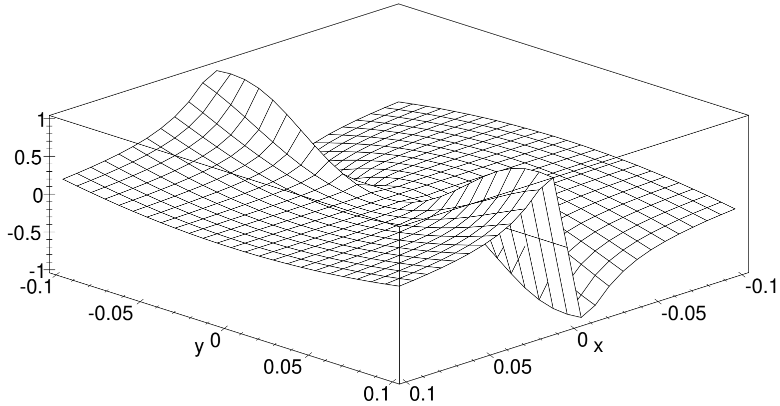


Abb. 27: Ist diese Funktion stetig?

Nun ist der abgebildete Graph natürlich von einem Computer anhand von nur endlich vielen Stützpunkten konstruiert; um wirklich zu entscheiden, ob f im Nullpunkt stetig ist, können wir uns nicht auf diese Approximation verlassen, sondern müssen die Funktion etwas genauer untersuchen.

Da wir uns im Eindimensionalen recht gut auskennen, können wir beispielsweise die Einschränkungen von f auf die verschiedenen Geraden durch den Nullpunkt betrachten. Abgesehen von der y-Achse haben diese alle die Form $y = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$, und

$$f(x, ax) = \frac{2x \cdot (ax)^2}{x^2 + (ax)^4} = \frac{2ax^3}{x^2(1 + ax^2)} = \frac{2ax}{1 + ax^2}$$

für $x \neq 0$. Für $x \to 0$ geht beim rechtsstehenden Ausdruck der Zähler gegen Null und der Nenner gegen eins; der Grenzwert existiert also und ist gleich $f(0, 0) = 0$, d.h. die Einschränkung von f ist stetig auf der Geraden $y = ax$.

Auf der y-Achse verschwindet f für jeden Wert von x, ist also ebenfalls stetig, d.h. die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Nullpunkt ist stetig.

Betrachten wir zur Vorsicht auch noch die Einschränkung von f auf die Parabel $x = ay^2$! Dort ist

$$f(ay^2, y) = \frac{2ay^2 \cdot y^2}{a^2y^4 + y^4} = \frac{2ay^4}{(1 + a^2)y^4} = \frac{2a}{1 + a^2}$$

für alle $y \neq 0$, wohingegen $f(0, 0) = 0$ ist. Für $a \neq 0$ ist die Einschränkung von f auf diese Parabel also nicht stetig, und damit kann auch f nicht stetig sein, denn für eine stetige Funktion muß schließlich

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$$

unabhängig davon sein, auf welchem Weg der Punkt (x, y) gegen $(0, 0)$ wandert.

Zusammen mit den Koordinatenachsen überdecken die Parabeln $x = ay^2$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ den gesamten $\mathbb{R}^2$, die Niveaulinie $N_0(f)$ von f besteht also aus den beiden Koordinatenachsen, während die anderen Niveaulinien aus Parabeln $x = ay^2$ jeweils ohne den Nullpunkt bestehen; siehe Abbildung 28. Da die Gleichung

$$\frac{2a}{1 + a^2} = c$$

für $c \neq 0$ die beiden Lösungen

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - c^2}}{c}$$

hat, besteht jede Niveaulinie für $0 < |c| < 1$ aus zwei dieser Parabeln, für $|c| = 1$ aus einer, und für $|c| > 1$ ist $N_c(f) = \emptyset$.

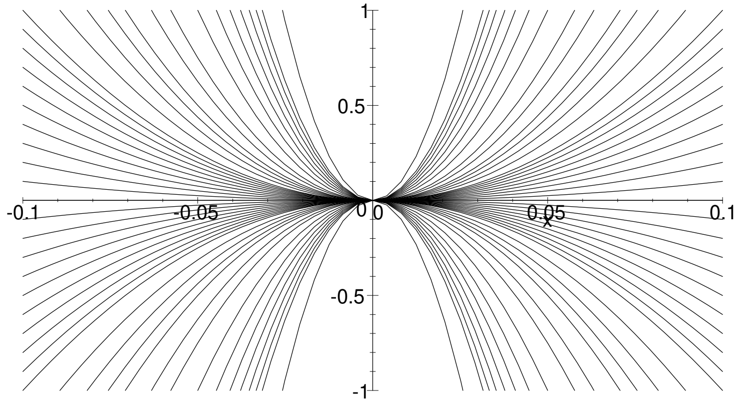


Abb. 28: Die Niveaulinien illustrieren die Unstetigkeit im Nullpunkt

Abbildung 28 zeigt, daß f im Nullpunkt unstetig ist, denn alle Niveaulinien kommen dem Nullpunkt beliebig nahe, obwohl dieser nur auf $N_0(f)$ liegt. Daran sehen wir übrigens auch, daß der Graph in Abbildung 27 falsch ist: In jeder Umgebung von $(0, 0)$ wird jeder Wert c zwischen -1 und 1 angenommen, der Abschluß des Graphen enthält also die Strecke $[-1, 1]$ auf der z-Achse. In Abbildung 27 ist dies nicht zu sehen, da Maple, wie die meisten Computergraphikprogramme, zum Zeichnen nur die Linien $x =$ konstant und $y =$ konstant berücksichtigt.

Bei Funktionen, in deren Definition Fallunterscheidungen eingehen, ist also größere Vorsicht geboten als im Eindimensionalen; bei in der Praxis auftretenden Funktionen wird es allerdings wohl meist so sein, daß die Unstetigkeitsstellen genau dort auftreten, wo man Sprünge definiert hat. Schwierig wird es nur, wenn man wie im obigen Beispiel in einem Punkt eine Situation der Art „0/0“ hat und entscheiden muß, ob man stetig ergänzen kann: Hier hilft im Mehrdimensionalen keine DE L'HOSPITALsche Regel, es hilft auch nicht, die Annäherung der Funktion an den problematischen Punkt aus allen Richtungen zu untersuchen, sondern man muß wirklich auf die Definition der Stetigkeit zurückgehen.

c) Die Ableitung einer Funktion

Als nächstes möchte ich auf die *Differenzierbarkeit* von Funktionen eingehen, als erstes im wohlbekannten Fall einer Funktion auf einem Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Rein formal betrachtet ist $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in einem Punkt $x \in (a, b)$, wenn der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert; sein Wert wird dann als Ableitung von f im Punkt x bezeichnet.

Hier und im folgenden wird oft die LANDAUsche o-Notation nützlich sein: Wir schreiben $o(h)$, sobald wir *irgendeine* uns nicht weiter interessierende Funktion von h haben, die für $h \to 0$ schneller gegen null geht als h selbst, d.h.

$$\varphi(h) = o(h) \iff \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0\,.$$

$o(h)$ ist hier also keine Funktion, sondern steht für eine ganze Klasse von Funktionen; beispielsweise ist

$$h^2 = o(h), \quad h^5 = o(h) \quad \text{und} \quad h \cdot \sin h = o(h)\,,$$

aber $\sin h$ können wir nicht als $o(h)$ schreiben, denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1\,.$$

Entsprechend schreiben wir auch

$$\varphi(h) = o\big(\psi(h)\big), \quad \text{wenn} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{\psi(h)} = 0$$

ist.

EDMUND GEORG HERMANN LANDAU (1877–1938) wurde in Berlin geboren und studierte an der dortigen Universität, wo er auch von 1899 bis 1909 lehrte. Dann bekam er einen Ruf an die damals führende deutsche Mathematikfakultät in Göttingen. 1933 verlor er seinen dortigen Lehrstuhl, denn die Studenten boykottierten seine Vorlesungen, da sie meinten, sie könnten Mathematik nur von einem Professor ihrer eigenen Rasse lernen. LANDAUS zahlreiche Publikationen beschäftigen sich vor allem mit der Zahlentheorie, über die er auch ein bedeutendes Lehrbuch schrieb; sehr bekannt sind seine Arbeiten über die Verteilung von Primzahlen.

Mit LANDAUS o-Notation können wir kurz sagen, die Funktion f sei genau dann differenzierbar in x mit Ableitung $f'(x)$, wenn

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$$

ist, denn das bedeutet gerade, daß

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - \big(f(x) + hf'(x)\big)}{h} = 0\,.$$

Anschaulich können wir das auch so interpretieren, daß für kleine h

$$f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)\,,$$

ist, d.h. die Funktion f sieht in einer hinreichend kleinen Umgebung von x aus wie eine lineare Funktion. Die Abbildungen 29 bis 32 zeigen dies für $f(x) = \sin x$ in der Umgebung von $x = 1$, wobei diese Umgebung von einer Abbildung zur nächsten jeweils um den Faktor fünf vergrößert wird.

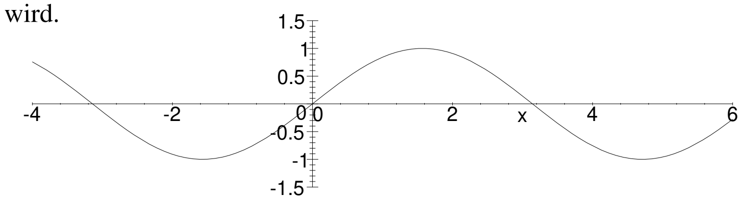


Abb. 29: Graph der Funktion $y = \sin x$

Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ können wir ganz entsprechend vorgehen: Wenn wir etwa die Funktion $f(x, y) = \sin x \cos y$ auf $\mathbb{R}^2$ in der Umgebung des Punktes $(1, 1)$ betrachten und diese wieder sukzessive um

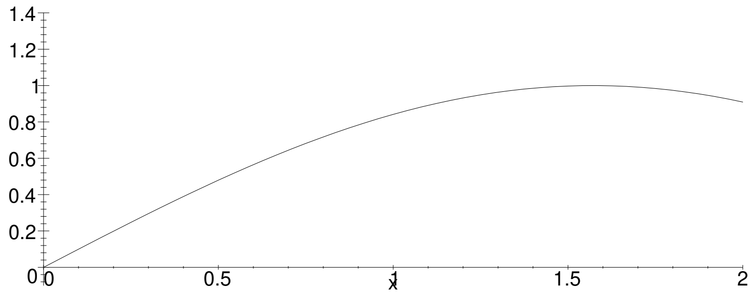


Abb. 30: Vergrößerung um den Faktor fünf um $\big(1, \sin(1)\big)$

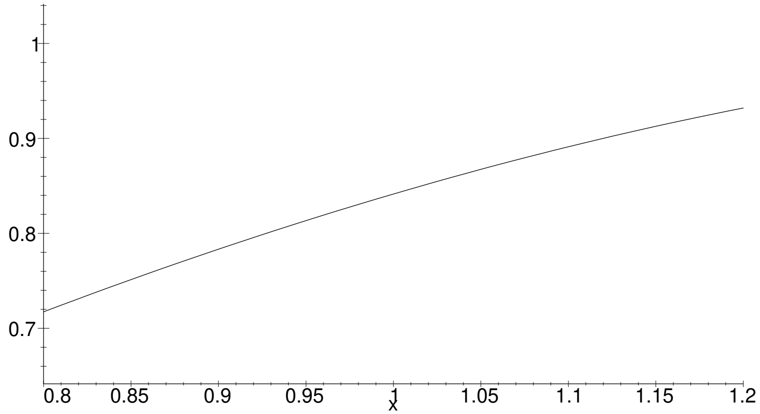


Abb. 31: Nochmalige Vergrößerung um den Faktor fünf um $\big(1, \sin(1)\big)$

den Faktor fünf vergrößern, erhalten wir die Abbildungen 33 bis 36, die zeigen, daß sich der Graph der Funktion in einer hinreichend kleinen Umgebung des betrachteten Punktes nur wenig von einer Ebenen unterscheidet, d.h. die Funktion ist dort annähernd linear.

Eine lineare Funktion zweier Veränderlicher hat die Form

$$L(x, y) = a + bx + cy;$$

also ist

$$L(x + h, y + k) = a + b(x + h) + c(y + k) = (a + bx + cy) + ah + bk$$

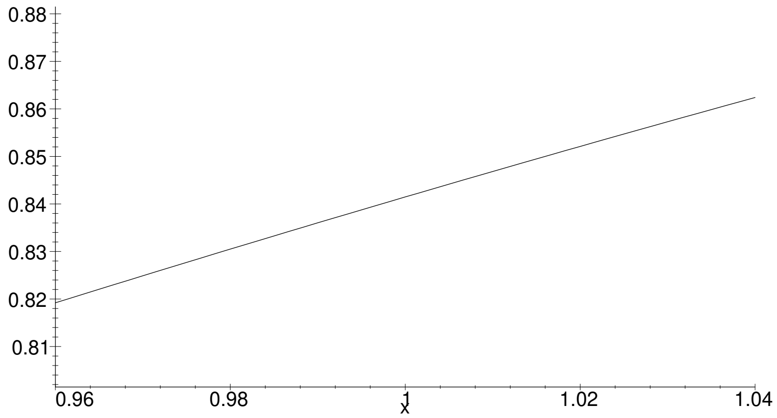


Abb. 32: Nach noch einer Vergrößerung sieht die Funktion praktisch linear aus

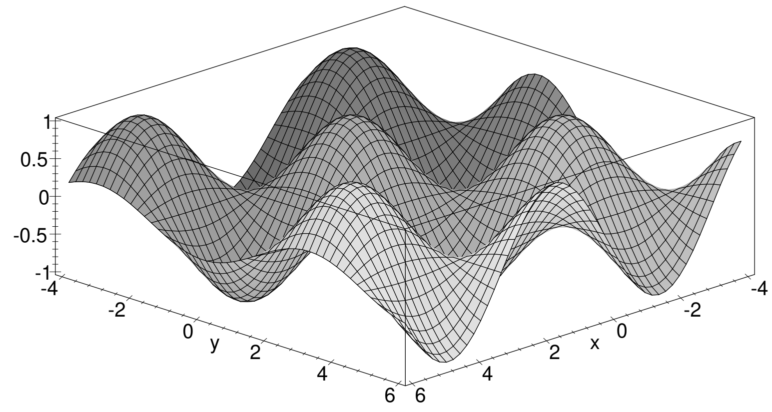


Abb. 33: Graph der Funktion $z = \sin x \cos y$

eine Approximation für f in der Umgebung des betrachteten Punkts (x, y), hier gleich $(1, 1)$. Im Punkt (x, y) sollte

$$L(x, y) = a + bx + cy$$

natürlich mit $f(x, y)$ übereinstimmen, und für $(h, k) \neq (0, 0)$ sollte der Unterschied zwischen f und L schneller gegen Null gehen als der Abstand zwischen $(x + h, y + k)$ und (x, y), d.h. schneller als $\sqrt{h^2 + k^2}$. Wir

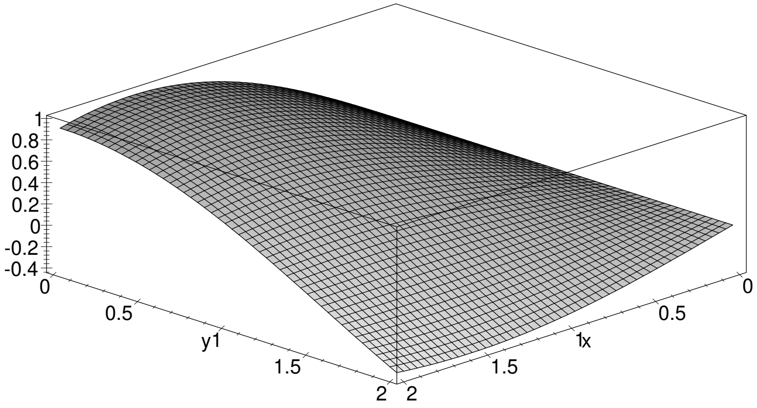


Abb. 34: Vergrößerung um den Faktor fünf um $\big(1, 1, \sin(1)\cos(1)\big)$

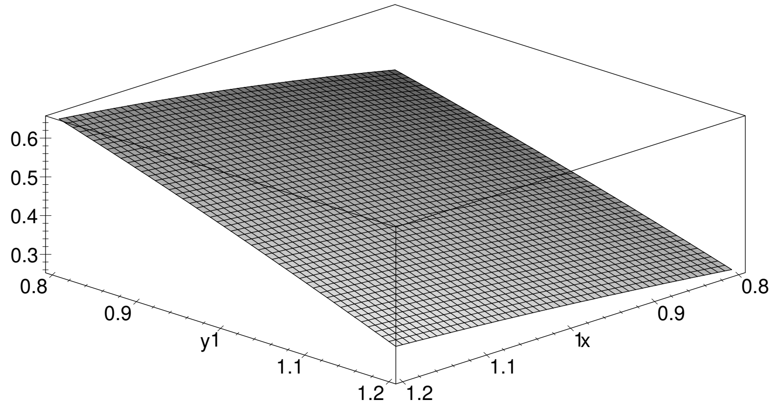


Abb. 35: Nochmalige Vergrößerung um den Faktor fünf um $\big(1, 1, \sin(1)\cos(1)\big)$

erwarten also, daß

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + ah + bk + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

ist, und genau so läßt sich Differenzierbarkeit allgemein definieren:

Definition: *a)* Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *differenzierbar* im Punkt $\boldsymbol{x} \in D$, wenn es eine lineare Funktion $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

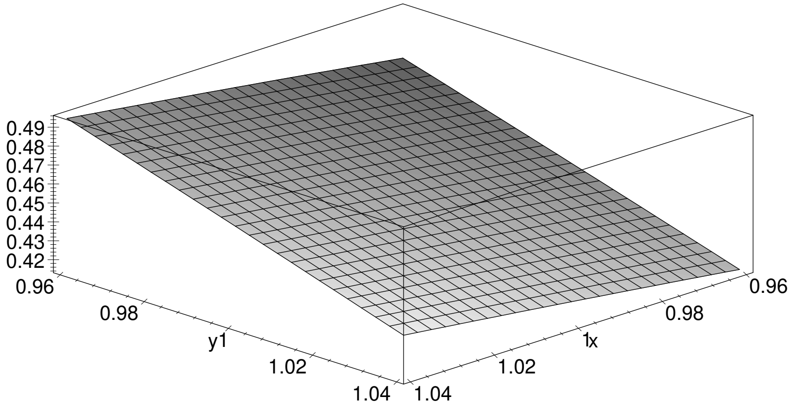


Abb. 36: Nach noch einer Vergrößerung sieht die Funktion praktisch linear aus

gibt, so daß für $\vec{h} \to 0$ gilt

$$f(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = f(\boldsymbol{x}) + L\big(\vec{h}\big) + o\big(\|\vec{h}\|\big)\,.$$

b) Die Abbildungsmatrix $J_f(\boldsymbol{x})$ von L bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ heißt dann JACOBI-Matrix von f im Punkt $\boldsymbol{x}$.

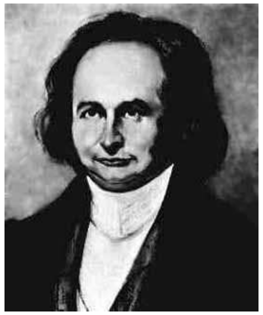
c) Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kann die dann einzeilige JACOBI-Matrix mit einem Vektor aus $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden; dieser Vektor

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \underset{\text{def}}{=} \nabla f(\boldsymbol{x}) \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

heißt *Gradient* von f im Punkt $\boldsymbol{x} \in D$.

Das Symbol ∇ sieht zwar aus wie ein griechischer Buchstabe, ist aber keiner; es ist ein auf den Kopf gestelltes großes Delta (Δ). ∇f wird „Nabla f“ ausgesprochen nach dem griechischen Wort $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$ = Leier; die Bezeichnung wurde eingeführt von dem irischen Mathematiker WILLIAM ROWEN HAMILTON, den die Form von ∇ an eine Leier erinnerte.

William Rowen Hamilton (1805–1865) wurde in Dublin geboren; bereits mit fünf Jahren sprach er Latein, Griechisch und Hebräisch. Mit dreizehn begann er, mathematische Literatur zu lesen, mit 21 wurde er, noch als Student, Professor der Astronomie am Trinity College in Dublin. Er verlor allerdings schon bald sein Interesse für Astronomie und arbeitete weiterhin auf dem Gebiet der Mathematik und Physik. Am bekanntesten ist seine Entdeckung der Quaternionen 1843, vorher publizierte er aber auch bedeutende Arbeiten über Optik, Dynamik und Algebra.



Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–51) wurde in Potsdam als Sohn eines jüdischen Bankiers geboren und erhielt den Vornamen Jacques Simon. Im Alter von zwölf Jahren bestand er sein Abitur, mußte aber noch vier Jahre in Abschlußklasse des Gymnasiums bleiben, da die Berliner Universität nur Studenten mit mindestens 16 Jahren aufnahm. 1824 beendete er seine Studien mit dem Staatsexamen für Mathematik, Griechisch und Latein und wurde Lehrer. Außerdem promovierte er 1825 und begann mit seiner Habilitation. Etwa gleichzeitig konvertierte er zum Christentum, so daß er ab 1825 an der Universität Berlin und ab 1826 in Königsberg lehren konnte. 1832 wurde er dort Professor. Zehn Jahre später mußte er aus gesundheitlichen Gründen das rauhe Klima Königsbergs verlassen und war zunächst in Italien, danach für den Rest seines Lebens in Berlin. Er ist vor allem berühmt durch seine Arbeiten zur Zahlentheorie und über elliptische Integrale.

Mit obiger Definition haben wir etwas ähnliches wie die Definition

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

für Funktionen einer Veränderlicher: Auf diese Weise ist die Ableitung zwar *definiert,* aber sie wird – außerhalb von Anfängervorlesungen – praktisch nie so ausgerechnet. Entsprechend sollten wir auch für Funktionen mehrerer Veränderlicher eine effizientere Methode der Differentiation finden.

Am einfachsten wäre es, wenn wir den wohlbekannten Kalkül der Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlicher benutzen könnten, also versuchen wir, aus einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Funktionen einer Veränderlichen zu machen.

Dabei können wir uns sofort auf den Fall $m = 1$ beschränken, denn jede Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist zusammengesetzt aus m Komponentenfunktionen $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; wir beschränken uns daher zunächst auf Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Schwieriger ist die Reduktion von n auf eins; hier bietet sich trotz der schlechten Erfahrungen beim obigen Beispiel einer unstetigen Funktion an, die Funktion auf eine Gerade einzuschränken.

Eine Gerade durch einen gegebenen Punkt $\boldsymbol{x}$ ist eindeutig festgelegt durch einen Richtungsvektor $\vec{e}$, wobei umgekehrt der Vektor $\vec{e}$ durch die Gerade natürlich *nicht* eindeutig festgelegt ist: Jedes Vielfache von $\vec{e}$ (außer dem Nullvektor) definiert genau dieselbe Gerade.

Wenn wir die Einschränkung von f auf eine solche Gerade mit Richtungsvektor $\vec{e}$ betrachten, betrachten wir konkret die Funktion

$$g(t) = f(\boldsymbol{x} + t\vec{e}),$$

die überall dort definiert ist, wo $\boldsymbol{x} + t\vec{e}$ im Definitionsbereich D von f liegt, für eine offene Menge D also zumindest in einem gewissen offenen Intervall um den Nullpunkt der reellen Geraden.

Damit können wir nach der Differenzierbarkeit dieser Funktion für $t = 0$ fragen; falls sie differenzierbar ist, bezeichnen wir die Ableitung

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\vec{e}) - f(\boldsymbol{x})}{h}$$

als *Richtungsableitung* von f in Richtung $\vec{e}$. Eine einfache Anwendung der Kettenregel, die jeder Leser am Rand des Skriptums kurz durchführen sollte, zeigt, daß diese „Richtungsableitung“ nicht nur von der *Richtung* des Vektors $\vec{e}$ abhängt, sondern auch von dessen *Länge:* Beispielsweise ist für $h(t) = f(\boldsymbol{x} + 2t\vec{e})$

$$h'(0) = 2g'(0).$$

Speziell können wir diese Richtungsableitungen betrachten für den Fall, daß $\vec{e}$ ein *Einheitsvektor* ist (genau ist der Grund für die Bezeichnung $\vec{e}$), beispielsweise einer der Koordinateneinheitsvektoren

$$\vec{e}_i = {}^t(0, \dots, 1, \dots, 0),$$

bei dem in der i-ten Zeile eine Eins steht und sonst lauter Nullen.

Alsdann ist für $g_i(t) = f(\boldsymbol{x} + t\vec{e}_i)$

$$g_i'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\vec{e}_i) - f(\boldsymbol{x})}{h}$$
$$= \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

die Ableitung jener Funktion, die nur von x_i abhängt, während alle anderen Koordinaten x_j festgehalten werden. Diese Ableitung, so sie existiert, bezeichnen wir als *partielle Ableitung*

$$f_{x_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

von f nach x_i; das Symbol ∂ wird, wenn überhaupt, als „del" ausgesprochen, wobei *del* natürlich eine Abkürzung für *delta* ist. Partielle Ableitungen, so sie existieren, lassen sich nach den üblichen Regeln der Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen berechnen, sind also für „gutartige" Funktionen problemlos.

Falls die Funktion f in $\boldsymbol{x} \in D$ differenzierbar ist und D eine Umgebung von $\vec{x}$ enthält (was für offenes D immer der Fall ist), existiert auch jede Richtungsableitung, denn da dann für jeden Vektor $\vec{h}$ gilt

$$f\left(\boldsymbol{x} + \vec{h}\right) = f(\boldsymbol{x}) + L\left(\vec{h}\right) + o\left(\|\vec{h}\|\right),$$

ist insbesondere auch

$$f\left(\boldsymbol{x} + t\vec{e}\right) = f(\boldsymbol{x}) + L\left(t\vec{e}\right) + o\left(\|t\vec{e}\|\right) = f(\boldsymbol{x}) + tL\left(\vec{e}\right) + o(t);$$

denn $L\left(\vec{e}\right)$ und $\left|\vec{h}\right|$ sind schließlich Konstanten. Damit existiert

$$\frac{d}{dt} f\left(\boldsymbol{x} + t\vec{e}\right)_{|t=0} = L\left(\vec{e}\right)$$

für jeden Richtungsvektor $\vec{e}$; insbesondere existieren natürlich alle partiellen Ableitungen.

Die Umkehrung gilt leider nicht immer: Bei der (offensichtlich in $(0,0)$ unstetigen) Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } xy \neq 0 \\ 0 & \text{falls } xy = 0 \end{cases} \end{cases}$$

ist Null auf der x-Achse und der y-Achse, und eins überall sonst. Damit existieren im Punkt $(0,0)$ beide partielle Ableitungen und sind identisch Null. Trotzdem ist f natürlich nicht differenzierbar in $(0,0)$, denn da $f(h,k)$ für jeden Punkt, der nicht auf einer der beiden Koordinatenachsen liegt, gleich eins ist, kann es keine Linearform $L(h,k) = bh+ck$ geben, so daß

$$f(h,k) = f(0,0) + L(h,k) + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) = o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

ist, denn $L(0,0) = 0$ und $f(h,k) = 1$ für $hk \neq 0$.

Nun wird natürlich jeder vernünftige Mensch einwenden, daß dieses Beispiel sehr künstlich ist, und in der Tat verhalten sich „gutartige" Funktionen nicht so:

Lemma: Falls $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig ist und auch alle partiellen Ableitungen von f dort existieren und stetig sind, ist f in D differenzierbar und

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

Beweis: Sei $\boldsymbol{x} \in D$. Da D offen ist, gibt es eine Kugel um $\boldsymbol{x}$, die ganz in D liegt; wir betrachten im folgenden nur Vektoren $\vec{h}$, deren Länge höchstens gleich dem Radius dieser Kugel ist, so daß $\boldsymbol{x} + \vec{h}$ stets in D liegt.

Wir betrachten f zunächst nur als Funktion der ersten Variablen; da deren Ableitung f_{x_1} in ganz D existiert, ist

$$f(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n)$$
$$= f(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) + f_{x_1}(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n)h_1 + o(h_1).$$

Genauso ist, da die partielle Ableitung nach x_2 in ganz D existiert,

$$f(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) =$$
$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n + h_n) + f_{x_2}(x_1, x_2, x_3 + h_3 \dots, x_n + h_n)h_2 + o(h_2)$$

und so weiter. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = f(\boldsymbol{x}) &+ f_{x_1}(x_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3, \dots x_n + h_n)h_1 + o(h_1) \\ &+ f_{x_2}(x_1, x_2, x_3 + h_3, \dots, x_n + h_n)h_2 + o(h_2) \\ &\vdots \\ &+ f_{x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + h_n)h_{n-1} + o(h_{n-1}) \\ &+ f_{x_n}(x_1, \dots, x_n)h_n + o(h_n). \end{aligned}$$

Die LANDAU-Symbole $o(h_1), \dots, o(h_n)$ können wir zu $o\Big(\|\vec{h}\|\Big)$ zusammenfassen, denn da $\left|h_i\right| \le \left|\vec{h}\right|$ für jedes i, kann keines der h_i langsamer gegen Null gehen als $\left|\vec{h}\right|$.

Damit sind wir schon ziemlich nahe an dem, was wir für die Differenzierbarkeit brauchen; allerdings hängen die partiellen Ableitungen noch von den h_i ab, so daß die Differenz zwischen $f(\boldsymbol{x}+\vec{h})$ und $f(\boldsymbol{x})$ nicht durch eine lineare Funktion angenähert ist.

Hier kommt nun die Stetigkeit der partiellen Ableitungen ins Spiel: Diese impliziert, daß

$$\lim_{\vec{h}\to 0}\Big(f_{x_1}(x_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) - f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)\Big) = 0$$

ist. Damit ist

$$\Big(f_{x_1}(x_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) - f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)\Big)h_1 = o\Big(\|\vec{h}\|\Big),$$

denn wenn h_1 mit einem Ausdruck multipliziert wird, der gegen Null geht, strebt das Produkt für $\vec{h} \to 0$ schneller gegen Null als h_1 allein, und $o(h_1)$ kann durch $o\Big(\|\vec{h}\|\Big)$ abgeschätzt werden. Also ist

$$\begin{aligned} &f_{x_1}(x_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n)h_1 \\ =&f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)h_1 + o\Big(\|\vec{h}\|\Big) = f_{x_1}(\boldsymbol{x})h_1 + o\Big(\|\vec{h}\|\Big). \end{aligned}$$

Entsprechend können wir auch bei den übrigen partiellen Ableitungen argumentieren und erhalten insgesamt, daß

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}+\vec{h}) &= f(\boldsymbol{x}) + f_{x_1}(\boldsymbol{x})h_1 + \cdots + f_{x_n}(\boldsymbol{x})h_n + o\Big(\|\vec{h}\|\Big) \\ &= f(\boldsymbol{x}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \vec{h} + o\Big(\|\vec{h}\|\Big) \end{aligned}$$

ist. Damit ist das Lemma bewiesen. ∎

Für Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen ist der Gradient also gerade der Vektor der partiellen Ableitungen; er kann damit über die bekannten Ableitungsregeln für Funktionen einer Veränderlichen berechnet werden.

NB: Häufig wird der Gradient durch diese Formel *definiert;* in diesem Fall folgt natürlich aus der Existenz des Gradienten nicht die Differenzierbarkeit der Funktion; siehe obiges Beispiel einer unstetigen Funktion, für die alle partiellen Ableitungen in $(0,0)$ existieren.

Nächstes Ziel dieses Abschnitts sind höhere Ableitungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Wir lassen uns bei der Definition wieder vom eindimensionalen Fall leiten: Die zweite Ableitung ist die Ableitung der Ableitung.

Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist der Zeilenvektor zum Gradienten, also die Abbildung

$$D \to \mathbb{R}^n; \quad \boldsymbol{x} \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right);$$

die Ableitung oder JACOBI-Matrix davon ordnet jedem Punkt aus D eine $n \times n$-Matrix zu, die wir als HESSE-Matrix $H_f(\boldsymbol{x})$ von f im Punkt $\boldsymbol{x}$ bezeichnen.

LUDWIG OTTO HESSE (1811–1874) wurde in Königsberg geboren und unterrichtete zunächst Physik und Chemie am dortigen Gymnasium. 1840 bekam er eine Stelle als Mathematiker an der dortigen Universität, von 1856 bis 1868 war er Professor in Heidelberg, danach in München. Aus der Schule ist er wohl vor allem durch die HESSEsche Normalenform der Ebenengleichung bekannt; der Schwerpunkt seiner Forschungen lag allerdings auf dem Gebiet der Invariantentheorie und der algebraischen Funktionen. Auch die HESSE-Matrix führte er 1842 in einer Arbeit über Invarianten von kubischen und biquadratischen Kurven ein.

Genau wie der Gradient bei gutartigen Funktionen durch die partiellen Ableitungen berechnet werden kann, sollte auch die HESSE-Matrix durch Differentiationsverfahren aus der Analysis einer Veränderlichen berechenbar sein. Das Hilfsmittel dazu sind die zweiten partiellen Ableitungen:

Für eine in ganz D partiell differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist auch jede partielle Ableitung f_{x_i} wieder eine Funktion von D nach $\mathbb{R}$, und auch diese kann wieder partiell differenzierbar sein. Falls ja, bezeichnen wir die partielle Ableitung von f_{x_i} nach x_j als zweite partielle Ableitung

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

von f nach x_i und x_j. Im Fall $i = j$ schreiben wir kurz

$$f_{x_i x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Analog lassen sich auch höhere partielle Ableitungen einführen durch die Definition

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} .$$

Wie wir oben gesehen haben, ist Gradient einer Funktion f gleich dem Vektor der partiellen Ableitungen, falls diese allesamt existieren und stetig sind; die JACOBI-Matrix ist der entsprechende Zeilenvektor. Falls auch die zweiten partiellen Ableitungen allesamt existieren und stetig sind, zeigt dasselbe Lemma, daß deren Ableitungen die Zeilenvektoren

$$\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n}$$

sind, d.h.

Lemma: Falls alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von $f\colon D \to \mathbb{R}$ existieren und stetig sind, ist die HESSE-Matrix von f gleich der $n \times n$-Matrix mit Einträgen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

■

Als erstes Beispiel können wir etwa die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = x^4 + 2x^3 y + 3x^2 y^2 + 4xy^3 + 5y^4$$

berechnen: Die partielle Ableitung nach x ist

$$f_x(x, y) = 4x^3 + 6x^2 y + 6xy^2 + 4y^3 ,$$

also ist

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 + 12xy + 6y^2 \quad \text{und}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 6x^2 + 12xy + 12y^2 .$$

Entsprechend ist

$$f_y(x, y) = 2x^3 + 6x^2 y + 12xy^2 + 20y^3 ,$$

also

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6x^2 + 12xy + 12y^2 \quad \text{und}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6x^2 + 24xy + 60y^2 .$$

Damit ist

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 12xy + 6y^2 & 6x^2 + 12xy + 12y^2 \\ 6x^2 + 12xy + 12y^2 & 6x^2 + 24xy + 60y^2 \end{pmatrix} .$$

Zumindest in diesem Fall ist dies eine symmetrische Matrix, d.h.

$$f_{xy} = f_{yx} .$$

Diese Formel gilt, wie wir gleich sehen werden, *fast* immer; in der Tat galt sie für die Mathematiker des 18. Jahrhunderts wie NICOLAUS I. BERNOULLI, der 1719 darüber schrieb, LEONARD EULER (1730), JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1772) und viele andere als selbstverständlich. Erst im 19. Jahrhundert, als sich ein präziser Funktionsbegriff durchzusetzen begann, wurde erkannt, daß Voraussetzungen notwendig sind. Diese waren zu Beginn des Jahrhunderts zunächst unnötig stark; 1873 untersuchte dann HERMANN AMANDUS SCHWARZ, den wir bereits von der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung kennen, das Problem genauer in seiner Arbeit *Über ein System voneinander unabhängiger Voraussetzungen zum Beweis des Satzes* $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$.

Als Gegenbeispiel betrachtet er die in Abbildung 37 dargestellte Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \arctan \frac{x}{y} - x^2 \arctan \frac{y}{x} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

Ihre ersten partiellen Ableitungen sind

$$f_x(x, y) = \begin{cases} y - 2x \arctan \frac{y}{x} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

und

$$f_y(x, y) = \begin{cases} -x + 2y \arctan \frac{x}{y} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

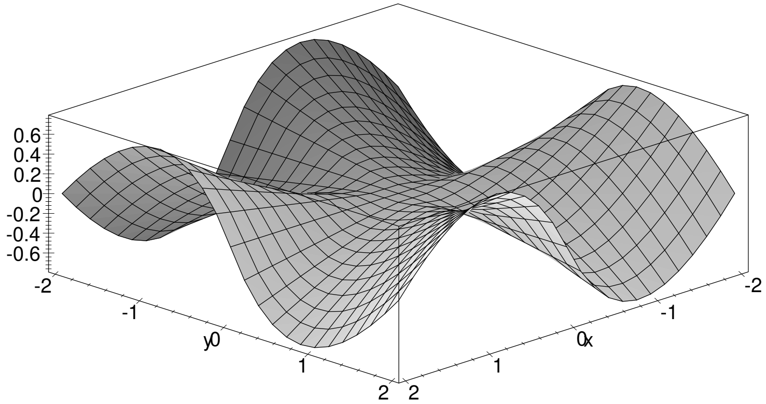


Abb. 37: Ein Gegenbeispiel zum Vertauschungssatz

Alle diese Funktionen sind stetig auch im Nullpunkt, denn da der Arkustangens nur Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt, sorgt der jeweilige Vorfaktor dafür, daß das Produkt bei jeder Annäherung an den Nullpunkt gegen null geht. Daher können wir trotz der Nenner im Argument des Arkustangens $x = 0$ und $y = 0$ einsetzen und erhalten, daß

$$f_x(0, y) = y \quad \text{und} \quad f_y(x, 0) = -x$$

ist, also

$$f_{xy}(0, y) = +1 \quad \text{und} \quad f_{yx}(x, 0) = -1\,.$$

Im Nullpunkt ist somit $f_{xy}(0, 0) = +1 \neq -1 = f_{yx}(0, 0)$.

Für Punkte $(x, y) \neq (0, 0)$ rechnet man leicht nach, daß

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$$

ist. Insbesondere ist

$$f_{xy}(x, 0) = -1, \quad f_{xy}(0, y) = +1 \quad \text{und} \quad f_{xy}(x, x) = 0\,;$$

f_{xy} nimmt also in jeder noch so kleinen Umgebung des Nullpunkts jeden der drei Werte $0, 1$ und -1 (und viele andere) an. Damit kann f_{xy} in $(0, 0)$ nicht stetig sein, genausowenig wie f_{yx}. Wie SCHWARZ erkannte, ist genau das die fehlende Voraussetzung für die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen:

Schwarzsches Lemma: $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei auf der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ erklärt und sowohl die ersten partiellen Ableitungen f_{x_i} als auch die gemischten partiiellen Ableitungen $f_{x_i x_j}$ seien stetig auf D. Dann ist

$$f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}) = f_{x_j x_i}(\boldsymbol{x})$$

für alle $\boldsymbol{x} \in D$ und alle i, j mit $1 \le i, j \le n$.

Beweis: Da bei der partiellen Differentiation alle Variablen außer einer als konstant betrachtet werden, können wir uns auf den Fall $n = 2$ beschränken: Wir interessieren uns nur für die beiden Variablen x_i und x_j, die wir als x und y bezeichnen (wenn sie verschieden sind – andernfalls gibt es aber ohnehin nichts zu beweisen), und betrachten alle sonstigen x_k als konstant.

Für den Punkt (x, y) aus D wählen wir dann $h, k \in \mathbb{R}$ so, daß das Quadrat mit den vier Ecken

$$(x, y),\ (x + h, y),\ (x, y + k) \quad \text{und} \quad (x + h, y + k)$$

vollständig in D liegt; dies ist möglich, da wir D als offene Menge vorausgesetzt haben. Nach Voraussetzung existieren die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xy} sowie f_{yx} und sind stetig.

Nach Definition ist

$$f_{xy}(x, y) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(x, y + k) - f_x(x, y)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y + k) - f(x, y + k)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}}{k}\,.$$

Falls alle Grenzübergänge miteinander vertauschbar sind (was, wie wir im obigen Gegenbeispiel gesehen haben, keineswegs selbstverständlich ist), ist das ein Limes über den Ausdruck

$$\frac{f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y)}{hk}$$

für $h, k \to 0$; es liegt also nahe, sich diesen Ausdruck genauer anzuschauen.

Für den Beweis wird es genügen, wenn wir uns auf den Fall $h = k$ beschränken; wir werden den Ausdruck

$$D(h) = \frac{f(x+h, y+h) - f(x, y+h) - f(x+h, y) + f(x, y)}{h^2}$$

auf zwei Arten ausrechnen:

Zunächst fassen wir, wie oben, die beiden ersten und die beiden letzten Summanden zusammen: Mit der Abkürzung

$$g(y) = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

ist dann

$$D(h) = \frac{g(y+h) - g(y)}{h}\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist dieser Differenzenquotient gleich dem Differentialquotient $g'(\eta)$ für eine (von h abhängige) Zahl η zwischen y und $y+h$. Somit ist

$$D(h) = g'(\eta) = \frac{f_y(x+h, \eta) - f_y(x, \eta)}{h} = f_{yx}(\xi, \eta)$$

für ein η zwischen x und $x+h$, denn natürlich können wir auch auf diesen Differenzenquotienten den Mittelwertsatz anwenden.

Für die zweite Berechnung fassen wir in $D(h)$ den ersten und den dritten sowie den zweiten und den vierten Term zusammen. Mit der Abkürzung

$$\widetilde{g}(x) = \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

ist dann dieses Mal

$$D(h) = \frac{\widetilde{g}(x+h) - \widetilde{g}(y)}{h}\,,$$

und nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es dazu ein $\widetilde{\xi}$ zwischen x und $x+h$, so daß dies gleich $\widetilde{g}'(\widetilde{\xi})$ ist. Also ist

$$D(h) = \widetilde{g}'(\widetilde{\xi}) = \frac{f_x(\widetilde{\xi}, y+h) - f_x(\widetilde{\xi}, y)}{h} = f_{xy}(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta})$$

für eine Zahl $\widetilde{\eta}$ zwischen y und $y+h$. Somit haben wir gezeigt, daß

$$D(h) = f_{yx}(\xi, \eta) = f_{xy}(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta})$$

ist.

Lassen wir nun h gegen Null gehen, konvergieren ξ und $\widetilde{\xi}$ gegen x und η wie auch $\widetilde{\eta}$ gegen y. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen konvergiert daher $f_{yx}(\xi, \eta)$ gegen $f_{yx}(x, y)$ und $f_{xy}(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta})$ gegen $f_{xy}(x, y)$, d.h. der Grenzwert existiert und

$$D(0) = f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y)\,.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Tatsächlich bewies SCHWARZ diesen Satz (für $n = 2$) unter einer etwas schwächeren Voraussetzung: Es reicht, wenn *eine* der partiellen Ableitungen f_{xy} oder f_{yx} existiert und stetig ist. Am Beweis ändert sich wenig; falls etwa über die Ableitung f_{yx} nichts vorausgesetzt ist, muß man die Existenz aller damit zusammenhängenden Grenzwerte explizit durch Abschätzungen nachweisen und daraus nachträglich die Existenz und Stetigkeit von f_{yx} folgern. Ein Leser, der seine *Analysis I* noch nicht ganz vergessen hat, sollte dies auf etwa einer Seite tun können. Für Anwendungen ist die SCHWARZsche Formulierung etwas nützlicher als die obige, denn wenn man beispielsweise f_{xy} berechnet und seine Stetigkeit nachgewiesen hat, folgt automatisch, daß auch f_{yx} existiert und gleich f_{xy} ist. Für uns wird das keine sehr große Rolle spielen, denn bei den meisten uns interessierenden Funktionen wird die *Existenz* und Stetigkeit der partiellen Ableitungen klar sein; lediglich ihre Berechnung wird im allgemeinen mit Arbeit verbunden sein.

Ein analoger Satz zum SCHWARZschen Lemma gilt auch für höhere partielle Ableitungen; für k-fache Ableitungen müssen wir entsprechend voraussetzen, daß die partiellen Ableitungen bis zur k-fachen existieren und stetig sind (wobei diese Voraussetzung wieder strenggenommen nicht für alle k-fachen wirklich notwendig ist).

Definition: Für eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichne $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$, deren sämtliche partielle Ableitungen bis zu den k-ten existieren und stetig sind. Für $k = 0$ sei $\mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$ einfach die Menge aller stetiger Funktionen $D \to \mathbb{R}$.

Man überlegt sich sofort, daß $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, und es ist auch nicht schwer einzusehen, daß die Funktionen aus $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$ alle die Eigenschaften haben, die man bei der Betrachtung von k-ten Ableitungen wünscht:

Erstens ist die Berechnung einer k-ten partiellen Ableitung von der Reihenfolge der partiellen Differentiationen unabhängig: Wie wir aus Kapitel I, §5*d)* wissen, kann jede Permutation als Produkt von Transpositionen geschrieben werden; es genügt also zu zeigen, daß man die Reihenfolge zweiter partieller Differentiationen vertauschen kann, und die können auch noch als benachbart angenommen werden, denn eine beliebige Transposition läßt sich immer als Produkt von Transpositionen benachbarter Elemente schreiben. Für eine solche Transposition ist

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}}}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}=\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}}}\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\,.$$

Für $f \in \mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ ist sichergestellt, daß

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+2}}}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\in\mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})\,;$$

nach obigem Lemma ist daher

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+2}}}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\right)=\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}}}\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+2}}}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\right)\,.$$

Differenziert man hier beide Seiten noch partiell nach x_1 bis x_{r-1}, ändert dies natürlich nichts an der Gleichheit.

Zweitens besagt das vorletzte Lemma, daß eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$ differenzierbar ist. Eine naheliegende Verallgemeinerung des dortigen Beweises, bei der man anstelle von linearen Approximationen solche höherer Ordnung betrachtet, zeigt, daß eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$ zweifach differenzierbar ist, und daß entsprechend eine Funktion f aus $\mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ bis auf einen Fehler der Größenordnung $o\big(\big|\vec h\big|^k\big)$ durch ein Polynom k-ten Grades approximiert werden kann. Wie das im einzelnen aussieht, wollen wir uns im nächsten Abschnitt genauer anschauen.

d) Taylor-Reihen

Für Funktionen einer reellen Veränderlichen mit Werten in $\mathbb{R}$ kennen wir TAYLOR-Reihen aus der Analysis I. Hier gilt

Satz: $f\colon [a,\,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und mindestens $(n+1)$-fach stetig differenzierbar auf dem Intervall $(a,\,b) \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt für jedes x aus $(a,\,b)$

und jedes $h \in \mathbb{R}$ mit $x+h \in (a,\,b)$ die Formel

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+R_{n+1}(x,h)\\ &=\sum_{i=0}^{n}\frac{h^i}{i!}f^{(i)}(x)+R_{n+1}(x,h)\end{aligned}$$

mit einem Restglied $R_{n+1} = O(h^{n+1})$. Dieses kann beispielsweise dargestellt werden als

$$R_{n+1}(x,h)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\eta)$$

mit einer reellen Zahl η zwischen 0 und h.

Definition: *a)* $T_{f,x,n}(h)=\sum_{i=0}^{n}\frac{h^i}{i!}f^{(i)}(x)$ heißt TAYLOR-Polynom n-ten Grades von f um den Punkt x.
b) $R_{n+1}(x,h)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\eta)$ ist die LAGRANGEsche Form des Restglieds.
c) Die Reihe $T_{f,x}(h)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x)h^i$ heißt TAYLOR-Reihe von f um x.
d) Die Funktion f heißt *analytisch* an der Stelle x, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß die TAYLOR-Reihe $T_{f,x}(h)$ existiert und für alle h mit $|h| < \delta$ gegen $f(x+h)$ konvergiert.

BROOK TAYLOR (1685–1731) war Sohn wohlhabender Eltern und wurde daher, bevor er 1703 an die Universität Cambridge ging, nur von privaten Hauslehrern ausgebildet. In Cambridge beschäftigte er sich hauptsächlich mit Mathematik, woran sich auch nach seinem Studienabschluß nichts änderte. Sein 1715 erschienenes Buch *Methodus incrementorum directa et inversa* enthält unter anderem TAYLOR-Polynome (die in Spezialfällen bereits LEIBNIZ, NEWTON und anderen bekannt waren), sowie die Methode der partiellen Integration. Weitere Bücher und Arbeiten beschäftigen sich unter anderem mit der Perspektive sowie mit Fragen aus der Physik.

Zur Verallgemeinerung der TAYLOR-Reihen auf Funktionen mehrerer Veränderlicher verwenden wir Richtungsableitungen. Da wir eine Funktion $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ problemlos komponentenweise behandeln können, genügt es, den Fall $m = 1$ zu betrachten.

Die Richtungsableitung einer Funktion $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in Richtung $\vec{v}$ ist nach Definition die Ableitung der Funktion einer Veränderlichen

$$g:\begin{cases} (-a,a) & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(\boldsymbol{x}+t\vec{v}) \end{cases}$$

mit geeignet gewähltem $a \in \mathbb{R}_+$ nach t für $t = 0$; wir können sie berechnen als Skalarprodukt des Gradienten mit dem Vektor $\vec{v}$.

Natürlich können wir g nicht nur einmal ableiten; für $f \in \mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ existiert das TAYLOR-Polynom k-ten Grades

$$g(h) = g(0) + h\cdot g'(0) + \frac{h^2}{2}g''(0) + \cdots + \frac{h^k}{k!}g^{(k)}(0) + o(h^k)\,.$$

Führen wir nun für die Richtungsableitung in Richtung $\vec{v}$ einen Operator $\partial_{\vec{v}}$ ein durch

$$\partial_{\vec{v}} f(x) = \operatorname{grad} f(x)\cdot\vec{v} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\cdot v_i\,,$$

so wird dies zu

$$f(\boldsymbol{x}+h\vec{v}) = f(\boldsymbol{x}) + h\partial_{\vec{v}}f(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{h^k}{k!}\partial_{\vec{v}}^k f(\boldsymbol{x}) + o(h^k)\,.$$

Speziell für $h = 1$ erhalten wir die kompakte Schreibweise der TAYLOR-Formel, nämlich

$$f(\boldsymbol{x}+\vec{v}) = f(\boldsymbol{x}) + \partial_{\vec{v}}f(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{1}{k!}\partial_{\vec{v}}^k f(\boldsymbol{x}) + o\big(|\vec{v}|^k\big)\,.$$

$\partial_{\vec{v}}^k$ steht hierbei natürlich für die k-fache Anwendung des Operators $\partial_{\vec{v}}$; was das explizit bedeutet, sollte man sich anhand obiger Summendarstellung von $\partial_{\vec{v}}$ klarmachen. Insbesondere beachte man, daß alle Potenzprodukte der v_i in den Potenzen des Operatiors $\partial_{\vec{v}}$ stecken und daß diese nach Ausmultiplizieren schnell ziemlich unübersichtlich werden. Einige Leser werden dieses Phänomen wohl aus der Physik kennen: Die *Multipolentwicklung* eines elektrischen Feldes um einen Punkt ist nichts anderes als die TAYLOR-Entwicklung; der konstante Term hängt

ab von der elektrischen Ladung, der lineare Term vom Dipolmoment, der quadratische vom Quadrupolmoment *usw.*

Wie das für beliebiges n im einzelnen aussieht, wollen wir uns lieber nicht so genau anschauen: Eine Form vom Grad k ist gegeben durch eine k-fache Summation von 1 bis n, hat also n^k Summanden, was sehr schnell sehr unübersichtlich wird.

Der quadratische Term der TAYLOR-Reihe ist allerdings noch einigermaßen gut handhabbar: Dafür brauchen wir nur die HESSE-Matrix

$$H_f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix},$$

und nach dem Lemma von SCHWARZ ist diese für $f \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, was den Rechenaufwand noch einmal fast um die Hälfte reduziert.

e) Der Satz über implizite Funktionen

Der Zusammenhang zwischen zwei Größen x und y ist nicht immer explizit in der Form $y = f(x)$ gegeben; gelegentlich hat man auch nur einen impliziten Zusammenhang $F(x,y) = 0$; entsprechend auch für mehr als zwei Variablen. In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wann eine Gleichung der Form $F(\boldsymbol{x}) = 0$ nach einer der Variablen x_i aufgelöst werden kann.

In einfachen Fällen ist dies trivial möglich, beispielsweise läßt sich

$$F(x,y,z) = ax + by + cz = 0$$

für $c \neq 0$ durch

$$z = \frac{-ax-by}{c}$$

nach z auflösen. In etwas komplizierteren Fällen, wie etwa bei

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\,,$$

kann man für die Punkte, die nicht auf der x-Achse $y = 0$ liegen, zumindest lokal eindeutig explizit auflösen durch

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}\,,$$

wobei das Vorzeichen gleich dem von y im betrachteten Intervall ist.

Im allgemeinen gibt es jedoch keine Möglichkeit für eine explizite Auflösung mit den „üblichen" mathematischen Funktionen, d.h. man kann höchstens dann auflösen, wenn man neue Funktionen einführt.

Wie das Beispiel der Kreislinie zeigt, ist auch das nicht immer möglich: Für die beiden Punkte auf der x-Achse gibt es offensichtlich keine *eindeutige* Auflösung, da sowohl die positive wie auch die negative Wurzel Teilauflösungen sind.

Diese Existenz mehrerer Teilauflösungen hängt mit dem Verschwinden der partiellen Ableitung nach y zusammen: Falls diese partielle Ableitung ungleich Null ist, gibt sie an, wie sich F verändert, wenn man y ändert, und sie gibt damit zumindest in erster Näherung auch an, wie man y verändern muß, um bei einer Änderung von x die Bedingung $F(x,y) = 0$ zu erhalten. Der Satz über implizite Funktionen besagt, das dieses Nichtverschwinden der partiellen Ableitung bereits ausreicht um die Existenz einer eindeutigen Auflösung zu zeigen.

Um den Beweis wenigstens einigermaßen überschaubar zu halten, möchte ich mich zunächst auf Funktionen zweier Veränderlicher beschränken:

Satz: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sei offen und $F \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$. Dann gibt es für jeden Punkt $(x_0,y_0) \in D$ mit $F(x_0,y_0) = 0$ und $F_y(x_0,y_0) \neq 0$ Intervallumgebungen I von x_0 und K von y_0 sowie eine eindeutig bestimmte Funktion $f\colon I \to K$, so daß für alle $x \in I$ gilt:

$$F\big(x, f(x)\big) = 0\,.$$

Die Funktion f ist stetig und differenzierbar; ihre Ableitung ist

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \quad \text{mit} \quad y = f(x)\,.$$

Beweis: Wir beginnen mit einer Reduktion zwecks Vereinfachung der Schreibarbeit: Offensichtlich genügt es, wenn wir den Fall $x_0 = y_0 = 0$ zu betrachten. Gilt nämlich der Satz für die Funktion

$$G(x,y) = F(x + x_0, y + y_0)$$

im Punkt $(0,0)$, so folgt er sofort auch für F im Punkt (x_0,y_0). Außerdem können wir o.B.d.A. annehmen, daß $F_y(0,0)$ positiv ist, denn nach Voraussetzung ist dieser Wert ungleich Null, und falls er negativ sein sollte, ersetzen wir einfach F durch $-F$.

Nach Voraussetzung sind die partiellen Ableitungen von F stetig; daher ist F_y nicht nur im Nullpunkt positiv, sondern auch noch in einer gewissen Umgebung davon. In dieser Umgebung wählen wir ein Rechteck

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\alpha \le x \le \alpha \quad \text{und} \quad -\beta \le y \le \beta\right\}.$$

Da F_y auf diesem Rechteck überall positiv ist, wächst die Funktion $y \mapsto F(x_0,y)$ für jedes $x_0 \in [-\alpha,\alpha]$ streng monoton; wegen $F(0,0) = 0$ ist insbesondere $F(0,-\beta) < 0$ und $F(0,\beta) > 0$. Aufgrund der Stetigkeit von F ist damit für x_1 aus einer gewissen Umgebung der Null auch $F(x_1,-\beta) < 0$ und $F(x_1,\beta) > 0$. Indem wir nötigenfalls α noch etwas verkleinern, können wir annehmen, daß dies für alle $x_1 \in [-\alpha,\alpha]$ gilt.

Damit gibt es nach dem Zwischenwertsatz für jedes $x_1 \in [-\alpha,\alpha]$ ein y_1, so daß $F(x_1,y_1)$ verschwindet; wegen der strengen Monotonie der Funktion $y \mapsto F(x_1,y)$ ist dieser Wert y_1 eindeutig bestimmt. Wir setzen daher $I = (-\alpha,\alpha)$, $K = (-\beta,\beta)$ und

$$f\colon \begin{cases} I & \to K \\ x_1 & \mapsto y_1 \end{cases}.$$

Damit ist f als Funktion festgelegt, und nach Konstruktion ist

$$F\big(x, f(x)\big) = 0 \quad \text{für alle } x \in I\,.$$

Wir müssen uns noch überlegen, daß die so konstruierte Funktion f stetig und differenzierbar ist.

Die Stetigkeit können wir etwa dadurch nachweisen, daß wir für jede gegen ein $x \in I$ konvergierende Folge (x_n) aus I zeigen, daß

$$f\bigl(\lim_{n\to\infty} x_n\bigr) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

ist.

Da x in I liegt, wissen wir, daß es dazu ein eindeutig bestimmtes $y \in K$ gibt, so daß $F(x,y) = 0$ ist, nämlich $y = f(x)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $\delta > 0$, so daß $\left|F(x',y')\right| < \varepsilon$ ist, falls der Abstand zwischen (x',y') und (x,y) kleiner ist als δ. Zu diesem δ wiederum gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|x - x_n| < \delta$ für alle $n > N$, so daß für alle solchen n gilt: $|F(x_n,y)| < \varepsilon$. Läßt man hier ε gegen Null gehen, folgt, daß

$$F(x,y) = F(\lim_{n\to\infty} x_n, y) = 0$$

ist, d.h. $F(x,y) = 0$ und damit $f(x) = y$, wie gewünscht.

Somit ist f stetig; als nächstes müssen wir noch die Differenzierbarkeit zeigen. Für ein $x \in I$ und ein hinreichend kleines $h \in \mathbb{R}$, für das auch noch $x+h$ in I liegt, ist nach Definition von f

$$F\bigl(x+h, f(x+h)\bigr) = 0\,.$$

Andererseits können wir diesen Funktionswert auch nach dem Mittelwertsatz berechnen: Mit $k = f(x+h) - f(x)$ ist

$$F\bigl(x+h, f(x+h)\bigr) = F\bigl(x+h, f(x)+k\bigr) = F\Bigl(\bigl(x, f(x)\bigr) + \tbinom{h}{k}\Bigr)\,,$$

und setzen wir

$$\varphi(t) \underset{\text{def}}{=} F\Bigl(\bigl(x, f(x)\bigr) + t\tbinom{h}{k}\Bigr)\,,$$

so ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \dot\varphi(\tau)$$

für ein τ zwischen null und eins. Mit $\xi = x + \tau h$ und $\eta = f(x) + \tau k$ ist daher

$$F\bigl(x+h, f(x)+k\bigr) = F\bigl(x, f(x)\bigr) + hF_x(\xi,\eta) + kF_y(\xi,\eta)\,.$$

Da $F\bigl(x+h, f(x)+k\bigr)$ und $F\bigl(x, f(x)\bigr)$ beide verschwinden, folgt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{F_x(\xi,\eta)}{F_y(\xi,\eta)}\,.$$

Für $h \to 0$ geht die rechte Seite wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen gegen $-F_x(x,y)/F_y(x,y)$, insbesondere existiert also der Grenzwert. (Man beachte, daß hier nochmals die Voraussetzung $F_y \neq 0$ benötigt wird). Damit existiert auch der Grenzwert des linksstehenden Differenzenquotienten für $h \to 0$, d.h. f ist differenzierbar und hat die behauptete Ableitung.

■

Nachdem wir wissen, daß die Ableitung von f existiert, ist ihre Berechnung, unabhängig vom gerade bewiesenen Satz, eine einfache Übungsaufgabe: Die Funktion $F\bigl(x, f(x)\bigr)$ ist gleich der Nullfunktion, und damit verschwindet natürlich auch ihre Ableitung. Andererseits ist diese Ableitung nach der Kettenregel gleich

$$F_x\bigl(x, f(x)\bigr) + F_y\bigl(x, f(x)\bigr)\cdot f'(x)\,,$$

also folgt

$$f'(x) = -\frac{F_x\bigl(x, f(x)\bigr)}{F_y\bigl(x, f(x)\bigr)}\,.$$

Genauso kann auch die zweite Ableitung von f berechnet werden –falls sie existiert. Wenn F und f zweimal stetig differenzierbar sind, können wir $F\bigl(x, f(x)\bigr)$ zweimal ableiten, was natürlich immer noch null ist. Nach der Kettenregel ist aber die zweite Ableitung von $F\bigl(x, f(x)\bigr)$ (der Übersichtlichkeit halber jeweils ohne das Argument $\bigl(x, f(x)\bigr)$ geschrieben) gleich

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\bigl(F_x + F_y\cdot f'(x)\bigr) + \frac{\partial}{\partial y}\bigl(F_x + F_y\cdot f'(x)\bigr)\cdot f'(x)\\
&= F_{xx} + F_{yx}\cdot f'(x) + F_y\cdot f''(x) + \bigl(F_{xy} + F_{yy}\cdot f'(x)\bigr)\cdot f'(x)\,,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -\frac{1}{F_y}\bigl(F_{xx} + 2F_{xy}\cdot f'(x) + F_{yy}\cdot f'(x)^2\bigr)\\
&= -\frac{1}{F_y^3}\bigl(F_{xx}^2F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2\bigr)\,.
\end{aligned}$$