einem Punkt abtragen, um einen weiteren Punkt zu bekommen, und genauso kann man auch eine Lösung des homogenen Gleichungssystems zu einer Lösung des inhomogenen addieren, um eine weitere Lösung des inhomogenen zu erhalten.

Die Mathematik sucht hinter analogen Sachverhalten gemeinsame Strukturen; in diesem Fall bezeichnet sie diese als *affine Räume:*

Definition: Ein affiner Raum über dem Körper k ist gegeben durch ein Paar (A, V) bestehend aus einer nichtleeren Menge A, deren Elemente wir als Punkte bezeichnen, und einem Vektorraum V, so daß gilt:

1.) Es gibt eine Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} A \times A \to V \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{xy}} \end{cases}$, mit der Eigenschaft, daß
$$\overrightarrow{\boldsymbol{xy}} + \overrightarrow{\boldsymbol{yz}} = \overrightarrow{\boldsymbol{xz}} \quad \text{für alle } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in A\,.$$

2.) Für jeden Punkt $O \in A$ ist die Abbildung
$$\varphi_O\colon A \to V; \quad \boldsymbol{x} \mapsto \varphi(O, \boldsymbol{x}) = \overrightarrow{O\boldsymbol{x}}$$
bijektiv; ihre Umkehrabbildung sei mit ψ_O bezeichnet.

Die Dimension des Vektorraums V bezeichnen wir auch als Dimension des affinen Raums.

Anschaulich gesehen ordnet die Abbildung φ zwei Punkten $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ den Verbindungsvektor $\overrightarrow{\boldsymbol{xy}}$ zu, und ψ_O beschreibt das *Abtragen* eines Vektors: In §1 hatten wir Vektoren eingeführt als Äquivalenzklassen von Pfeilen gleicher Länge und gleicher Richtung; nimmt man zum Vektor $\vec{v}$ den Pfeil, der im Punkt O beginnt, so hat dieser den Endpunkt $\psi_O(\vec{v})$.

Standardbeispiel eines affinen Raums ist der $\mathbb{R}^n$; hier ist A gleich der *Menge* $\mathbb{R}^n$, deren Elemente wir als Punkte $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ schreiben, und V ist gleich dem *Vektorraum* $\mathbb{R}^n$, dessen Elemente wir als Spaltenvektoren schreiben. φ ist die Abbildung, die den Punkten
$$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

deren Verbindungsvektor
$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overrightarrow{\boldsymbol{xy}} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}$$
zuordnet, und für $O = (a_1, \dots, a_n)$ ist
$$\psi_O\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = (a_1 + x_1, \dots, a_n + x_n)\,.$$

Ganz entsprechend läßt sich für jeden beliebigen Körper k die Menge k^n zu einem affinen Raum machen; der zugehörige Vektorraum ist natürlich der *Vektorraum* k^n.

Weitere interessante Beispiele sind vor allem die Geraden, Ebenen *usw.* in diesem Raum; diese fassen wir zusammen unter der

Definition: Ein affiner Unterraum des affinen Raums (A, V) ist ein affiner Raum (B, U) mit $B \subseteq A$ und $U \le V$, wobei auch die Abbildungen φ und ψ_O Einschränkungen der entsprechenden Abbildungen von (A, V) sind.

Betrachten wir etwa die Gerade
$$\bigl\{(1 + \lambda, \lambda) \bigm| \lambda \in \mathbb{R}\bigr\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
durch den Punkt $(1, 0)$ mit Steigung 1. Hier ist B natürlich gleich der Menge aller Punkte auf der Geraden, also die gerade angegebene Menge selbst, und als Vektorraum nehmen wir den vom Richtungsvektor $\binom{1}{1}$ der Geraden aufgespannten Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$.

Dieselbe Gerade können wir auch durch die Gleichung
$$y = x + 1 \quad \text{oder} \quad -x + y = 1$$
beschreiben. Allgemein können wir, wie wir uns als nächstes überlegen wollen, jeden affinen Unterraum eines k^n als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in n Unbekannten interpretieren, und umgekehrt ist auch jede solche Lösungsmenge, falls sie nicht leer ist, affiner

Unterraum von k^n. (Mit k^n ist hier natürlich das Paar (k^n, k^n) gemeint, das wir kurz, wenn auch schlampig, als affinen Raum k^n bezeichnen.)

Beginnen wir mit der Lösungsmenge L eines linearen Gleichungssystems

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad A \in k^{m\times n}, \quad \vec{b} \in k^m$$

für einen Vektor $\vec{x} \in k^n$; mit anderen Worten mit der Lösungsmenge von m linearen Gleichungen in n Unbekannten. (Hier schreiben wir, aus alter Gewohnheit, die Punkte eines affinen Raums ausnahmsweise als Vektoren.) *Falls* es Lösungen gibt, ist die Differenz $\vec{y} = \vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)}$ zweier (nicht notwendigerweise verschiedener) Lösungen $\vec{x}^{(1)}$ und $\vec{x}^{(2)}$ eine Lösung des homogenen Gleichungssystems $A\vec{y} = \vec{0}$.

Die Lösungsmenge eines *homogenen* linearen Gleichungssystems in n Variablen ist aber Kern einer linearen Abbildung und daher (und auch aus vielen anderen Gründen) ein Untervektorraum U des k^n. Zusammen mit diesem Untervektorraum wird L zu einem affinen Raum, wobei die Abbildung $\varphi: L \times L \to U$ zwei Lösungen $\vec{x}^{(1)}$ und $\vec{x}^{(2)}$ deren Differenz $\vec{y} = \vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)}$ als „Verbindungsvektor" zuordnet; entsprechend macht für jede Lösung $\vec{x}$ des inhomogenen Gleichungssystems die Abbildung $\psi_{\vec{x}}: U \to L$ eine Lösung $\vec{y}$ des homogenen Gleichungssystems durch Addition von $\vec{x}$ zu einer Lösung des inhomogenen Gleichungssystems.

Ist umgekehrt (B, U) ein affiner Unterraum von (k^n, k^n), so können wir eine Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$ von U wählen und diese zu einer Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ des k^n ergänzen. Bezüglich dieser neuen Basis des k^n ist dann U die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 0, \quad \dots, \quad x_n = 0\,.$$

Sind nun $(c_1, \dots, c_n)$ und $(d_1, \dots, d_n)$ zwei Punkte aus B, so liegt ihre Differenz (d.h. ihr „Verbindungsvektor") in U, und somit muß für alle $i > r$ notwendigerweise $c_i = d_i$ sein. Damit ist B bezüglich der Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$x_{r+1} = d_{r+1}, \quad x_{r+2} = d_{r+2}, \quad \dots, \quad x_n = d_n\,.$$

Durch Rücktransformation auf die Standardbasis des k^n kann man dieses lineare Gleichungssystem in ein lineares Gleichungssystem bezüglich der ursprünglichen Basis umformen.

Um den Kontakt an die Schulgeometrie zu verdeutlichen, sei für Interessenten noch kurz dargestellt, was man mit affinen Unterräumen *geometrisch* anstellen kann.

Spätestens die Interpretation als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems sollte jedem klargemacht haben, daß der Durchschnitt zweier affiner Unterräume entweder leer ist oder wieder ein affiner Unterraum; in beiden Fällen kann er durch Lösen eines linearen Gleichungssystems ermittelt werden. Seine Dimension hängt offensichtlich von einer ganzen Reihe von Faktoren ab: Schon in der Ebene kann der Durchschnitt zweier Geraden entweder leer sein (parallele Geraden) oder nulldimensional (ein Schnittpunkt) oder eindimensional (zusammenfallende Geraden).

Definition: Für zwei affine Unterräume (A, U) und (B, V) eines affinen Raums (C, W) ist der von A und B aufgespannte affine Unterraum von (C, W) der kleinste affine Unterraum (S, T) von (C, W), der beide enthält.

Bei dieser Definition stellt sich als erstes die Frage, ob sie überhaupt sinnvoll ist, ob es einen solchen kleinsten Raum also auch wirklich gibt. Dazu bilden wir den Durschnitt aller affiner Unterräume, die (A, U) und (B, V) als Unterräume enthalten. Der Durchschnitt einer beliebigen Menge affiner Unteräume ist entweder leer oder wieder ein affiner Unterraum. Leer kann er hier nicht sein, da wir nur Unterräume bertrachten, die die beiden gegebenen Räume enthalten, also ist er ein affiner Unterraum und offensichtlich der kleinste unter denen, die (A, U) und (B, V) als Unterräume enthalten.

Seine Dimension kann allerdings größer werden als die Summe der Dimensionen der beiden Ausgangsräume; ein wahrscheinlich aus der Schule bekanntes Beispiel dafür sind *windschiefe Geraden* im $\mathbb{R}^3$, d.h zwei Geraden, die zwar nicht parallel zueinander sind, die aber in zwei voneinander verschiedenen parallelen Ebenen liegen.

Ein Beispiel hierfür sind etwa die x-Achse eines kartesischen Koordiantensystems im $\mathbb{R}^3$ und die um eins in z-Richtung verschobene y-Achse. Diese beiden Geraden schneiden sich nicht, denn alle Punkte der ersten haben z-Koordinate Null, während auf der zweiten $z = 1$ ist, und sie sind auch offensichtlich nicht parallel.

Wir wollen uns überlegen, daß es keine Ebene gibt, die beide Geraden enthält. Dazu gehen wir aus von der allgemeinsten Gleichung

$$ax + by + cz = d$$

für eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. Wenn diese Ebene die x-Achse enthalten soll, also die Menge aller Punkte der Form $(x, 0, 0)$, muß $a = d = 0$ sein. Die um eins in z-Richtung verschobene y-Achse besteht aus allen Punkten der Form $(0, y, 1)$; sie liegt in der Ebenen, wenn $b = 0$ und $c = d$ ist. Für eine Ebene, die beide Geraden enthält, müßte also $a = b = c = d = 0$ sein, und dann haben wir keine Ebene mehr. Da es zwischen einer Ebenen und dem gesamten $\mathbb{R}^3$ keine weiteren affinen Unterräume mehr gibt, ist der kleinste affine Unterraum, der die beiden Geraden enthält, der gesamte $\mathbb{R}^3$.

Damit drängt sich die Frage auf, ob es möglicherweise auch im $\mathbb{R}^4$ oder in Räumen noch höherer Dimension zwei Geraden geben kann, die den gesamten Raum aufspannen. Da die Anschauung hier leider nicht weiterhilft, müssen wir abstrakt mathematisch argumentieren. Das wird am einfachsten, wenn wir rechnen können, und dazu führen wir Koordinatensysteme ein:

Definition: Ein Koordinatensystem des affinen Raums (A, V) besteht aus einem Punkt $O \in A$, genannt der Ursprung oder auch Nullpunkt des Koordinatensystems, und einer Basis von V. Die Geraden durch O mit einem Basisvektor als Richtungsvektor heißen *Koordinatenachsen.*

Bezüglich eines solchen Koordinatensystems hat dann in der Tat jeder Punkt $\boldsymbol{x}$ eines n-dimensionalen affinen Raums A ein n-tupel von Koordinaten, nämlich die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{O\boldsymbol{x}}$. Bevor wir aber zeigen können, daß der affine Raum dadurch isomorph wird zu k^n, müssen wir zunächst definieren, was strukturerhaltende Abbildungen zwischen affinen Räumen überhaupt sein sollen:

Definition: Eine affine Abbildung zwischen den affinen Räumen (A, V) und (B, W) besteht aus einer Abbildung $\varphi\colon A \to B$ und einer linearen

Abbildung $\psi\colon V \to W$ derart, daß für alle Punkte $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ gilt:

$$\overrightarrow{\varphi(\boldsymbol{x})\,\varphi(\boldsymbol{y})} = \psi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}\right) .$$

Die Abbildung heißt *Isomorphismus* oder *Affinität,* falls φ bijektiv ist.

Offensichtlich ist φ genau dann bijektiv, wenn ψ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist, so daß wir dies nicht zusätzlich fordern müssen. Es ist auch klar, daß nach Wahl eines Koordinatensystems eines n-dimensionalen affinen Raums die Koordinaten einen Isomorphismus mit dem affinen Raum k^n definieren.

Da wir wissen, wie lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen bezüglich zweier Basen aussehen, können wir auch sofort hinschreiben, wie die Abbildung $\varphi\colon A \to B$ bezüglich zweier Koordinatensysteme aussieht:

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \Bigl(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + b_1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j + b_m\Bigr) ,$$

im Gegensatz zu den homogenen linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen sind hier also auch inhomogene lineare Abbildungen möglich. In Matrixschreibweise betrachtet man am besten die Spaltenvektoren: Ist

$$\varphi\bigl((x_1, \ldots, x_n)\bigr) = (y_1, \ldots, y_m) ,$$

so ist

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \vec{b} \quad \text{mit} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} .$$

Geometrisch betrachtet beschreibt der konstante Vektor $\vec{b}$ also eine Verschiebung.

Vor allem in der Computergraphik faßt man die Matrix A und den Vektor $\vec{b}$ oft auch zusammen zu einer Matrix A^* mit $m + 1$ Zeilen und $n + 1$ Spalten, indem man zunächst den Vektor $\vec{b}$ als $(n + 1)$-te Spalte an die Matrix anhängt und dann als $(m + 1)$-te Zeile lauter Nullen einsetzt mit Ausnahme einer Eins an der letzten Stelle:

$$A^* = \begin{pmatrix} A & \vec{b} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} ,$$

wobei die fette Null für n gewöhnliche Nullen steht. Mit dieser Bezeichnung ist dann

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ 1 \end{pmatrix} = A^* \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

eine Formel, die zwar rechnerisch aufwendiger ist als die obige, dafür aber etwas kompakter. Sie hat auch den Vorteil, daß sich die Hintereinanderausführung affiner Abbildungen so durch ein Matrixprodukt beschreiben läßt.

Als Anwendung von Koordinatensystemem wollen wir, wie bereits erwähnt, die Dimension des Erzeugnisses zweier affiner Unterräume berechnen.

Betrachten wir zunächst die Dimension des Erzeugnisses zweier Untervektorräume:

Definition: Die Summe $U + V$ zweier Untervektorräume eines festen Vektorraums ist der kleinste Untervektorraum, der beide enthält.

Mit der Notation aus §1*f)* können wir dies auch als $U + V = [U \cup V]$ schreiben, denn für jede Teilmenge M eines Vektorraums hatten wir $[M]$ als kleinsten Untervektorraum definiert, der M enthält.

Lemma: Sind U und V endlichdimensional, so ist

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) .$$

Beweis: Wir starten mit einer Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$ des Durchschnitts $U \cap V$ und ergänzen diese zu einer Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ von U und zu einer Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r, \vec{c}_{r+1}, \dots, \vec{c}_m\}$ von V. Dann ist $U + V$ der von den Vektoren $\vec{b}_i$ und $\vec{c}_j$ erzeugte Untervektorraum, denn einen kleineren Untervektorraum, der U und V enthält, kann es nicht geben. Außerdem sind diese Vektoren linear unabhängig: Ist nämlich

$$\lambda_1\vec{b}_1 + \dots + \lambda_n\vec{b}_n + \mu_{r+1}\vec{c}_{r+1} + \dots + \mu_m\vec{c}_m = \vec{0} ,$$

so können wir dies auch schreiben als

$$\vec{v} \underset{\text{def}}{=} \lambda_1\vec{b}_1 + \dots + \lambda_n\vec{b}_n = -\left(\mu_{r+1}\vec{c}_{r+1} + \dots + \mu_m\vec{c}_m\right) .$$

Der Vektor $\vec{v}$ läßt sich damit sowohl als Linearkombination von Vektoren aus U darstellen wie auch als Linearkombination von Vektoren aus V; er liegt also in $U \cap V$. Da dieser Durchschnitt die Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ als Basis hat, müssen daher λ_{r+1} bis λ_n verschwinden. Damit ist also

$$\lambda_1\vec{b}_1 + \dots + \lambda_{\mathbf{r}}\vec{b}_{\mathbf{r}} + \mu_{r+1}\vec{c}_{r+1} + \dots + \mu_m\vec{c}_m = \vec{0} ,$$

und hier haben wir eine Darstellung des Nullvektors als Linearkombination von Basisvektoren des Vektorraums V. Also müssen auch alle restlichen λ_i sowie die sämtlichen μ_j verschwinden.

Somit ist $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n, \vec{c}_{r+1}, \dots, \vec{c}_m\}$ eine Basis von $U + V$, d.h.

$$\dim(U + V) = n + (m - r) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) .$$

■

Bei Untervektorräumen ist damit alles klar; kehren wir zurück zur den affinen Unterräumen; wir betrachten also zwei affinen Unterräume (A, U) und (B, V) eines affinen Raums (C, W) sowie den davon erzeugten affinen Unterraum (S, T).

Falls A und B nichtleeren Durchschnitt haben, können wir Koordinatensysteme mit einem gemeinsamen Nullpunkt finden und W ist der Vektorraum $U + V$, d.h. in diesem Fall ist

$$\begin{aligned} \dim S = \dim T = \dim(U + V) &= \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) \\ &= \dim A + \dim B - \dim(A \cap B) , \end{aligned}$$

denn $A \cap B$ hat ein Koordinatensystem mit demselben Nullpunkt und daher ist der zugehörige Untervektorraum $U \cap V$.

Falls A und B aber disjunkt sind, müssen wir verschiedene Punkte O_A und O_B als Nullpunkte der entsprechenden Koordinatensysteme wählen; jetzt ist der Vektorraum T des von A und B aufgespannten affinen Raums (S, T) ganz sicher nicht mehr $U + V$, denn er muß nun auch den Verbindungsvektor von O_A und O_B enthalten. Wäre dieser als Summe $\vec{u} + \vec{v}$ von Vektoren $\vec{u} \in U$ und $\vec{v} \in V$ darstellbar, könnten wir den Vektor $\vec{u}$ an O_A abtragen und $-\vec{v}$ an O_B; beide Vektoren hätten denselben Endpunkt, der somit im (leeren) Durchschnitt von A und B liegen müßte. Also ist T mindestens gleich $U+V$ plus dem vom Verbindungsvektor aufgespannten eindimensionalen Untervektorraum. Das reicht aber auch schon, denn nimmt man etwa O_A als Ursprung des Koordinatensystems, kommt man nun durch Abtragen der Vektoren aus diesem Untervektorraum zu jedem Punkt von A oder B. Also ist in diesem Fall

$$\begin{aligned}\dim S = \dim T &= 1 + \dim(U+V)\\ &= \dim U + \dim V - \dim(U\cap V) + 1\,.\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir damit gezeigt

Lemma: (A, U) und (B, V) seien affine Unterräume eines affinen Raum (C, W), und (S, T) sei der von beiden erzeugte affine Unterraum. Dann ist

$$\dim S = \begin{cases}\dim A + \dim B - \dim(A\cap B) & \text{falls } A\cap B \neq \emptyset\\ \dim A + \dim B - \dim(U\cap V) + 1 & \text{falls } A\cap B = \emptyset\,.\end{cases}$$ ■

Betrachten wir als Beispiel die beiden Unterräume

$$A = \left\{(1,0,1,0,1) + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}5\\4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\;\middle|\; \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$$

und

$$B = \left\{(0,1,0,1,0) + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\4\\9\\16\end{pmatrix}\;\middle|\; \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$$

von $\mathbb{R}^5$.

Der Untervektorraum zu A ist

$$U = \left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\6\\6\\6\\6\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$
$$= \left[\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right],$$

der zu B ist

$$V = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\4\\9\\16\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\\6\\12\end{pmatrix}\right].$$

Der Durchschnitt der beiden Untervektorräume ist also eindimensional und wird vom gemeinsamen Basisvektor aufgespannt.

Zur Berechnung des Durchschnitts von A und B müssen wir untersuchen, ob es reelle Zahlen $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ gibt, so daß

$$(1,0,1,0,1)+\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+\mu_1\begin{pmatrix}5\\4\\3\\2\\1\end{pmatrix} = (0,1,0,1,0)+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}0\\1\\4\\9\\16\end{pmatrix}$$

ist. Mit den gerade berechneten neuen Basen von U und V können wir stattdessen auch das etwas einfachere Gleichungssystem

$$(1,0,1,0,1)+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu_3\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = (0,1,0,1,0)+\lambda_4\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+\mu_4\begin{pmatrix}0\\0\\2\\6\\12\end{pmatrix}$$

betrachten mit neuen Variablen λ_3, μ_3, λ_4 und μ_4, denn der Durchschnitt zweier affiner Unterräume hängt natürlich nicht vom Koordinatensystem ab. Hier können wir alle Basisvektoren auf die linke Seite bringen und die beiden Basispunkte in Gestalt ihres Verbindungsvektors auf die rechte; mit den neuen Variablen $\lambda = \lambda_3$, $\mu = \mu_3 - \lambda_4$ und $\nu = -\mu_4$ wird das Gleichungssystem dann zu

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Bei diesem System kann das für die erste Komponente nur dann gutgehen, wenn $\lambda = -1$ ist; setzen wir diesen Wert ein und betrachten dann die zweite Komponente, folgt, daß $\mu = 2$ sein muß. Für ν bleibt noch das Gleichungssystem

$$\nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} ,$$

das offensichtlich unlösbar ist. Damit war auch das ursprüngliche Gleichungssystem unlösbar, wir sind hier also im Fall $A \cap B = \emptyset$.

Nach obiger Formel hat das Erzeugnis von A und B daher die Dimension

$$\dim A + \dim B - \dim(U \cap V) + 1 = 2 + 2 - 1 + 1 = 4 ;$$

wie wir oben gesehen haben, enthält der zugehörige Untervektorraum außer $U + V$ auch noch den Verbindungsvektor

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

der Nullpunkte $(0, 1, 0, 1, 0)$ von A und $(1, 0, 1, 0, 1)$ von B.

Da wir $U + V$ und auch den Verbindungsvektor kennen, läßt sich das Erzeugnis von A und B nun leicht explizit angeben: Es ist der affine

Unterraum

$$\left\{ (1,0,1,0,1) + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \lambda, \mu, \nu, \\ \rho \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} .$$

h) Ausblick: Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme

Mancher Leser mag sich in die Mittelstufe zurückversetzt gefühlt haben, als bei den Beispielen dieses Paragraphen plötzlich Brüche auftauchten anstelle der Dezimalzahlen, mit denen der „echte Praktiker“ seinen Taschenrechner füttert.

Tatsächlich sollte der GAUSS-Algorithmus, so wie er hier vorgestellt wurde, nur für Körper benutzt werden, in denen man *exakt* rechnen kann; beim Rechnen mit reellen Zahlen, vor allem wenn es per Computer oder Taschenrechner geschieht, muß man sich meist mit Näherungslösungen begnügen, und leider können in ungünstigen Fällen selbst kleine Rundungsfehler große Auswirkungen auf das Ergebnis haben.

Der Umgang mit Gleitkommazahlen ist Gegenstand der Numerik (und teilweise auch der Praktischen Informatik); hier sei nur anhand weniger Beispiele gezeigt, daß Probleme auftreten *können:*

Beginnen wir mit dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 1{,}35x & - & 2{,}768y & = & -10 \\ 4{,}241x & - & 8{,}69y & = & -31{,}4 + \varepsilon . \end{array}$$

Seine Lösung liegt für $\varepsilon = 0$ bei

$$x \approx 41{,}527 \quad \text{und} \quad y \approx 23{,}866 .$$

Stört man aber die rechte Seite nur im 0,01 in der zweiten Gleichung, ersetzt man dort also die 31,4 durch 31,41, wird die Lösung zu

$$x \approx 74{,}558 \quad \text{und} \quad y \approx 39{,}976 ,$$

und ersetzt man sie gar durch 31,5, erhält man

$$x \approx 371{,}838 \quad \text{und} \quad y \approx 184{,}964 .$$

Schon kleine Störungen der Konstanten, wie sie durch allfällige Rundungsfehler immer wieder auftreten, können also das Ergebnis stark verfälschen. Im vorliegenden Fall läßt sich dieser Effekt leicht quantifizieren: Für allgemeines ε hat das obige Gleichungssystem die Lösung

$$x \approx 41{,}527 + 3303{,}10\varepsilon \quad \text{und} \quad y \approx 23{,}866 + 1610{,}98\varepsilon\,,$$

jede Störung der rechten Seite der zweite Gleichung führt also zu einer mehr als 3000-fachen Störung des Werts von x.

In diesem einfachen Beispiel kann man relativ schnell sehen, was passiert; außerdem deuten die im Vergleich zur rechten Seite etwas kleinen Koeffizienten auf der linken Seite darauf hin, daß es Probleme geben könnte. Leider ist die Situation nicht immer so klar: Beim linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{4}+\frac{x_4}{5}+\frac{x_5}{6}+\frac{x_6}{7}&=1\\
\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{4}+\frac{x_3}{5}+\frac{x_4}{6}+\frac{x_5}{7}+\frac{x_6}{8}&=1\\
\frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{5}+\frac{x_3}{6}+\frac{x_4}{7}+\frac{x_5}{8}+\frac{x_6}{9}&=1\\
\frac{x_1}{5}+\frac{x_2}{6}+\frac{x_3}{7}+\frac{x_4}{8}+\frac{x_5}{9}+\frac{x_6}{10}&=1\\
\frac{x_1}{6}+\frac{x_2}{7}+\frac{x_3}{8}+\frac{x_4}{9}+\frac{x_5}{10}+\frac{x_6}{11}&=1\\
\frac{x_1}{7}+\frac{x_2}{8}+\frac{x_3}{9}+\frac{x_4}{10}+\frac{x_5}{11}+\frac{x_6}{12}&=1
\end{aligned}$$

sind die Koeffizienten im Vergleich zur rechten Seite durchaus in vernünftigen Größenordnungen, und die Lösung

$$\begin{array}{lll}
x_1 = -42, & x_2 = 840, & x_3 = -5040,\\
x_4 = 12600, & x_5 = -13860, & x_6 = 5544
\end{array}$$

ist auch nicht sonderlich exotisch.

Berechnen wir die Lösung allerdings numerisch mit nur drei geltenden Ziffern, so erhalten wir die numerische Lösung

$$\begin{array}{lll}
x_1 = -19{,}0, & x_2 = 171 & x_3 = -359,\\
x_4 = 216 & x_5 = -83{,}8, & x_6 = 98{,}2,
\end{array}$$

die mit der korrekten Lösung offensichtlich nicht viel zu tun hat.

Bei diesem wie bei allen folgenden Beispielen von Gleitkommarechnungen wird ein Leser, der die Ergebnisse überprüfen möchte, mit hoher Wahrscheinlichkeit andere als die angegebenen Zahlenwerte erhalten. Der Grund liegt darin, daß das Ergebnis einer Rechnung mit Gleitkommazahlen nicht nur von der Anzahl der mitgeführten Dezimalstellen abhängt, sondern auch von der Reihenfolge der Rechenschritte. Das Assoziativgesetz gilt bei Gleitkommazahlen weder für die Addition noch für die Multiplikation: Beispielsweise ist bei drei geltenden Ziffern

$$(4{,}21 + 6{,}82) - 2{,}13 = 11{,}0 - 2{,}13 = 8{,}87\,,$$

aber

$$4{,}21 + (6{,}82 - 2{,}13) = 4{,}21 + 4{,}69 = 8{,}90\,,$$

wobei hier so gerechnet wurde, daß jedes Ergebnis *einer* Rechenoperation zunächst exakt bestimmt wurde und dann auf drei geltende Ziffern gerundet wurde. Die meisten heutigen Computer runden bei Gleitkommarechnungen auf diese Weise, auch wenn sie natürlich im allgemeinen nicht wirklich das exakte Zwischenergebnis berechnen. Es gibt aber Algorithmen, mit denen sich zu einer vorgegebenen Rechengenauigkeit eine Zahl berechnen läßt, die dasselbe Rundungsergebnis hat wie das exakte Zwischenergebnis. Taschenrechnern treiben nur selten einen so hohen Aufwand; hier können noch zusätzliche Fehler entstehen.

Die Nichtassoziativität von Gleitkommaoperationen hat noch eine weitere unerwartete Konsequenz: Zumindest bei Lösungsmethoden, die bei der Wahl des nächsten Eliminationsschritts auch Zufallsentscheidungen einfließen lassen (wie dies beispielsweise bei Maple der Fall ist), kann auch die mehrfache Lösung desselben Gleichungssystems mit demselben Algorithmus auf demselben Computer zu verschiedenen Ergebnissen führen, das Ergebnis ist also nicht nur nicht richtig, sondern sogar nicht einmal konsistent falsch.

Hier sind beispielsweise für das gerade betrachtete Beispiel die Ergebnisse aus zehn Lösungsversuchen mit Maple, gerechnet mit jeweils vier geltenden Ziffern:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
−33,900	136,700	−120,800	510,500	−1455,000	1001,000
−20,400	235,900	−956,200	2039,000	−2304,000	1035,000
−33,900	136,700	−120,800	510,500	−1455,000	1001,000
−34,000	136,700	−120,000	509,700	−1456,000	1002,000
−37,200	172,500	−226,300	613,100	−1461,000	977,300
−34,000	136,700	−120,000	509,700	−1456,000	1002,000
17,600	−208,200	689,700	−636,100	−306,300	472,300
19,500	−249,300	874,000	−936,800	−120,000	442,500
8,000	−143,900	587,400	−692,700	−80,040	349,400
−20,400	235,900	−956,200	2039,000	−2304,000	1035,000

Egal wie stark die Zahlenwerte, die ein Leser beim Rechnen mit drei oder vier geltenden Ziffern bekommt, von den obigen abweichen, werden sie also mit ziemlicher Sicherheit eines gemeinsam haben: Sie haben nicht einmal entfernt mit den korrekten Zahlen zu tun und sind somit völlig unbrauchbar.

Eine Erhöhung der Ziffernzahl führt nur langsam zu besseren Ergebnissen: Bei einer Genauigkeit von vier bis fünfzehn Ziffern erhalten wir nacheinander die folgenden „Lösungen“:

Ziffern	x_1	x_2	x_3
4	-21,100	236,600	-940,200
5	8,550	-29,800	-458,970
6	19,806	-159,680	2,252
7	1,683	137,057	-1502,936
8	-33,359	699,124	-4325,108
9	-41,766	835,783	-5017,165
10	-42,004	840,010	-5039,853
11	-41,998	839,974	-5039,864
12	-41,999	839,988	-5039,936
13	-42,000	839,998	-5039,992
14	-42,000	840,000	-5039,999
15	-42,000	840,000	-5040,000
korrekt	-42	840	-5040

und

Ziffern	x_4	x_5	x_6
4	613,100	-1461,000	977,300
5	-312,910	-702,410	663,730
6	1427,120	-2813,060	1530,740
7	4960,798	-6457,628	2897,409
8	11062,780	-12367,780	5009,726
9	12418,887	-13683,876	5480,857
10	12599,672	-13859,628	5543,852
11	12600,048	-13860,032	5544,007
12	12599,855	-13859,858	5543,949
13	12599,981	-13859,982	5543,994
14	12599,998	-13859,998	5543,999
15	12600,000	-13860,000	5544,000
korrekt	12600	-13860	5544

Wie man sieht, werden die Ergebnisse erst ab zehnstelliger Genauigkeit halbwegs korrekt, h.h. trotz der kleinen Koeffizienten müßte man im vorliegenden Fall mit doppeltgenauen reellen Zahlen rechnen. (Bei einer Gleitkommaarithmetik nach IEEE Standard 754, wie sie in den meisten heutigen Prozessoren realisiert ist, sind Gleitkommazahlen einfacher Genauigkeit mit einem relativen Fehlerrn von bis zu etwa $5{,}96 \cdot 10^{-8}$ behaftet, was zwischen sieben und acht geltenden Ziffern entspricht; bei doppelter Genauigkeit liegt die Schranke bei etwa $1{,}11 \cdot 10^{-16}$; das entspricht nicht ganz sechzehn geltenden Ziffern.)

Daß selbst doppelte Genauigkeit nicht immer ausreicht, zeigt die Vergrößerung des obigen Gleichungssystems auf 15 Variable:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{x_1}{2}+\tfrac{x_2}{3}+\tfrac{x_3}{4}+\tfrac{x_4}{5}+\tfrac{x_5}{6}+\tfrac{x_6}{7}+\tfrac{x_7}{8}+\tfrac{x_8}{9}+\tfrac{x_9}{10}+\tfrac{x_{10}}{11}+\tfrac{x_{11}}{12}+\tfrac{x_{12}}{13}+\tfrac{x_{13}}{14}+\tfrac{x_{14}}{15}+\tfrac{x_{15}}{16} &= 1\\
\tfrac{x_1}{3}+\tfrac{x_2}{4}+\tfrac{x_3}{5}+\tfrac{x_4}{6}+\tfrac{x_5}{7}+\tfrac{x_6}{8}+\tfrac{x_7}{9}+\tfrac{x_8}{10}+\tfrac{x_9}{11}+\tfrac{x_{10}}{12}+\tfrac{x_{11}}{13}+\tfrac{x_{12}}{14}+\tfrac{x_{13}}{15}+\tfrac{x_{14}}{16}+\tfrac{x_{15}}{17} &= 1\\
\tfrac{x_1}{4}+\tfrac{x_2}{5}+\tfrac{x_3}{6}+\tfrac{x_4}{7}+\tfrac{x_5}{8}+\tfrac{x_6}{9}+\tfrac{x_7}{10}+\tfrac{x_8}{11}+\tfrac{x_9}{12}+\tfrac{x_{10}}{13}+\tfrac{x_{11}}{14}+\tfrac{x_{12}}{15}+\tfrac{x_{13}}{16}+\tfrac{x_{14}}{17}+\tfrac{x_{15}}{18} &= 1\\
\tfrac{x_1}{5}+\tfrac{x_2}{6}+\tfrac{x_3}{7}+\tfrac{x_4}{8}+\tfrac{x_5}{9}+\tfrac{x_6}{10}+\tfrac{x_7}{11}+\tfrac{x_8}{12}+\tfrac{x_9}{13}+\tfrac{x_{10}}{14}+\tfrac{x_{11}}{15}+\tfrac{x_{12}}{16}+\tfrac{x_{13}}{17}+\tfrac{x_{14}}{18}+\tfrac{x_{15}}{19} &= 1\\
\tfrac{x_1}{6}+\tfrac{x_2}{7}+\tfrac{x_3}{8}+\tfrac{x_4}{9}+\tfrac{x_5}{10}+\tfrac{x_6}{11}+\tfrac{x_7}{12}+\tfrac{x_8}{13}+\tfrac{x_9}{14}+\tfrac{x_{10}}{15}+\tfrac{x_{11}}{16}+\tfrac{x_{12}}{17}+\tfrac{x_{13}}{18}+\tfrac{x_{14}}{19}+\tfrac{x_{15}}{20} &= 1\\
\tfrac{x_1}{7}+\tfrac{x_2}{8}+\tfrac{x_3}{9}+\tfrac{x_4}{10}+\tfrac{x_5}{11}+\tfrac{x_6}{12}+\tfrac{x_7}{13}+\tfrac{x_8}{14}+\tfrac{x_9}{15}+\tfrac{x_{10}}{16}+\tfrac{x_{11}}{17}+\tfrac{x_{12}}{18}+\tfrac{x_{13}}{19}+\tfrac{x_{14}}{20}+\tfrac{x_{15}}{21} &= 1\\
\tfrac{x_1}{8}+\tfrac{x_2}{9}+\tfrac{x_3}{10}+\tfrac{x_4}{11}+\tfrac{x_5}{12}+\tfrac{x_6}{13}+\tfrac{x_7}{14}+\tfrac{x_8}{15}+\tfrac{x_9}{16}+\tfrac{x_{10}}{17}+\tfrac{x_{11}}{18}+\tfrac{x_{12}}{19}+\tfrac{x_{13}}{20}+\tfrac{x_{14}}{21}+\tfrac{x_{15}}{22} &= 1
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{x_1}{9}+\tfrac{x_2}{10}+\tfrac{x_3}{11}+\tfrac{x_4}{12}+\tfrac{x_5}{13}+\tfrac{x_6}{14}+\tfrac{x_7}{15}+\tfrac{x_8}{16}+\tfrac{x_9}{17}+\tfrac{x_{10}}{18}+\tfrac{x_{11}}{19}+\tfrac{x_{12}}{20}+\tfrac{x_{13}}{21}+\tfrac{x_{14}}{22}+\tfrac{x_{15}}{23} &= 1\\
\tfrac{x_1}{10}+\tfrac{x_2}{11}+\tfrac{x_3}{12}+\tfrac{x_4}{13}+\tfrac{x_5}{14}+\tfrac{x_6}{15}+\tfrac{x_7}{16}+\tfrac{x_8}{17}+\tfrac{x_9}{18}+\tfrac{x_{10}}{19}+\tfrac{x_{11}}{20}+\tfrac{x_{12}}{21}+\tfrac{x_{13}}{22}+\tfrac{x_{14}}{23}+\tfrac{x_{15}}{24} &= 1\\
\tfrac{x_1}{11}+\tfrac{x_2}{12}+\tfrac{x_3}{13}+\tfrac{x_4}{14}+\tfrac{x_5}{15}+\tfrac{x_6}{16}+\tfrac{x_7}{17}+\tfrac{x_8}{18}+\tfrac{x_9}{19}+\tfrac{x_{10}}{20}+\tfrac{x_{11}}{21}+\tfrac{x_{12}}{22}+\tfrac{x_{13}}{23}+\tfrac{x_{14}}{24}+\tfrac{x_{15}}{25} &= 1\\
\tfrac{x_1}{12}+\tfrac{x_2}{13}+\tfrac{x_3}{14}+\tfrac{x_4}{15}+\tfrac{x_5}{16}+\tfrac{x_6}{17}+\tfrac{x_7}{18}+\tfrac{x_8}{19}+\tfrac{x_9}{20}+\tfrac{x_{10}}{21}+\tfrac{x_{11}}{22}+\tfrac{x_{12}}{23}+\tfrac{x_{13}}{24}+\tfrac{x_{14}}{25}+\tfrac{x_{15}}{26} &= 1\\
\tfrac{x_1}{13}+\tfrac{x_2}{14}+\tfrac{x_3}{15}+\tfrac{x_4}{16}+\tfrac{x_5}{17}+\tfrac{x_6}{18}+\tfrac{x_7}{19}+\tfrac{x_8}{20}+\tfrac{x_9}{21}+\tfrac{x_{10}}{22}+\tfrac{x_{11}}{23}+\tfrac{x_{12}}{24}+\tfrac{x_{13}}{25}+\tfrac{x_{14}}{26}+\tfrac{x_{15}}{27} &= 1\\
\tfrac{x_1}{14}+\tfrac{x_2}{15}+\tfrac{x_3}{16}+\tfrac{x_4}{17}+\tfrac{x_5}{18}+\tfrac{x_6}{19}+\tfrac{x_7}{20}+\tfrac{x_8}{21}+\tfrac{x_9}{22}+\tfrac{x_{10}}{23}+\tfrac{x_{11}}{24}+\tfrac{x_{12}}{25}+\tfrac{x_{13}}{26}+\tfrac{x_{14}}{27}+\tfrac{x_{15}}{28} &= 1\\
\tfrac{x_1}{15}+\tfrac{x_2}{16}+\tfrac{x_3}{17}+\tfrac{x_4}{18}+\tfrac{x_5}{19}+\tfrac{x_6}{20}+\tfrac{x_7}{21}+\tfrac{x_8}{22}+\tfrac{x_9}{23}+\tfrac{x_{10}}{24}+\tfrac{x_{11}}{25}+\tfrac{x_{12}}{26}+\tfrac{x_{13}}{27}+\tfrac{x_{14}}{28}+\tfrac{x_{15}}{29} &= 1\\
\tfrac{x_1}{16}+\tfrac{x_2}{17}+\tfrac{x_3}{18}+\tfrac{x_4}{19}+\tfrac{x_5}{20}+\tfrac{x_6}{21}+\tfrac{x_7}{22}+\tfrac{x_8}{23}+\tfrac{x_9}{24}+\tfrac{x_{10}}{25}+\tfrac{x_{11}}{26}+\tfrac{x_{12}}{27}+\tfrac{x_{13}}{28}+\tfrac{x_{14}}{29}+\tfrac{x_{15}}{30} &= 1
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der linken und der rechten Seiten unterscheiden sich hier höchstens um den (moderaten) Faktor dreißig, und auch die Anzahl der Gleichungen ist im Vergleich zu den Systemen mit mehreren Tausend Variablen, die in vielen Anwendungen auftreten, eher gering. Daß es trotzdem numerische Probleme gibt, sieht man an der folgenden Tabelle; sie zeigt die korrekten und die mit fünfzehnstelliger Genauigkeit berechneten Werte der Variablen x_i:

x_1	240	-3173,68185135567
x_2	-28560	228151,786322960
x_3	1113840	-5303344,76558434
x_4	-21162960	58391350,3363271
x_5	232792560	-353947335,741599
x_6	-1629547920	1247733630,21701
x_7	7682154480	-2469397672,05011
x_8	-25241364720	1965727944,18240
x_9	58896517680	2105462770,85717
x_{10}	-98160862800	-6442117291,59057
x_{11}	116008292400	4902607321,68726
x_{12}	-94915875600	1334651674,35581
x_{13}	51108548400	-4588357739,33491
x_{14}	-16287339600	2863533974,79321
x_{15}	2326762800	-619210289,163625

Offensichtlich hat das berechnete Ergebnis nichts mit dem tatsächlichen zu tun, und auch hier werden verschiedene Computer oder sogar (im Falle etwa von Maple) derselbe Computer bei verschiedenen Versuchen völlig verschiedene Ergebnisse liefern.

Beim Lösen von linearen Gleichungssystemen muß man also unbedingt

darauf achten, daß Rundungsfehler auf das absolut notwendige Minimum beschränkt werden, und selbst dann muß man noch sehr vorsichtig sein. In der Numerik werden daher oft Iterationsverfahren bevorzugt, da diese ihre Rundungsfehler (zumindest tendenziell) selbst korrigieren.

Hier seien nur zwei Faustregeln für den GAUSS-Algorithmus erwähnt:

1.) Die verschiedenen Gleichungen des Systems sollten Koeffizienten in ähnlichen Größenordnungen enthalten. Da sich nichts an der Lösungsmenge ändert, wenn man eine der Gleichungen mit einer von Null verschiedenen Konstanten multipliziert, kann man dies etwa dadurch erreichen, daß man alle Zeilenvektoren der Matrix des Gleichungssystems auf dieselbe Länge (z.B. Eins) normiert.

2.) Falls man ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addiert, sollte der Koeffizient, mit dem die erste Gleichung multipliziert wird, möglichst klein sein, damit die zweite Gleichung nicht zu stark gestört wird. Dies läßt sich etwa dadurch erreichen, daß man bei der Elimination einer Variablen genau die Gleichung unverändert läßt, in der diese Variable mit dem betragsgrößten Koeffizienten vorkommt.

Für alles weitere sei auf die *Numerik* verwiesen; wer nicht so lange warten möchte, findet sehr viel mehr zu diesem Thema, als in jede Numerikvorlesung paßt, in der einschlägigen Spezialliteratur, z.B. im klassischen Buch

J.H. WILKINSON: Rounding errors in algebraic processes, *Prentice Hall,* 1963 oder *Dover,* 1994

oder in neueren Büchern wie

MICHAEL L. OVERTON: Numerical Computing with IEEE Floating Point Arithmetic – *Including One Theorem, One Rule of Thumb and One Hundred and One Exercises,* SIAM, 2001,

wo die Probleme des numerischen Rechnens in sehr elementarer und praxisnaher Darstellung behandelt werdet; mehr theoretischen Hintergrund findet man bei

FRANÇOISE CHAITIN-CHATELIN, VALÉRIE FRAYSSÉ: Lectures on finite precision computations, SIAM, 1996 und in dem sehr ausführlichen Buch

NICHOLAS J. HIGHAM: Accuracy and stability of numerical algorithms, SIAM, 1996.

i) Matrixgleichungen und die Berechnung der Inversen

Wir haben inzwischen recht gut verstanden, wann eine Matrix invertierbar ist und können dies auch leicht rechnerisch überprüfen; wir kennen aber noch keine Methode, mit dem wir die inverse Matrix wirklich berechnen könnten. Wie wir gleich sehen werden, stellt und der GAUSS-Algorithmus eine entsprechendes Verfahren zur Verfügung, das uns nicht nur die Bestimmung der Inversen erlaubt, sondern allgemeiner die Berechnung der Lösungsmenge einer beliebigen (linearen) Matrixgleichung.

Wir gehen aus von einer $n \times m$-Matrix $A = (a_{ij}) \in k^{n\times m}$ und einer $p \times q$-Matrix $B = (b_{i\ell}) \in k^{n\times p}$; gesucht ist eine Matrix $X = (x_{j\ell}) \in k^{m\times p}$; gesucht ist eine Lösung der Matrixgleichung $AX = B$. Besonders interessant ist hier der Fall $n = m = p$ und $B = E$ die Einheitsmatrix; in diesem Fall ist die Lösung offensichtlich gerade die Matrix $X = A^{-1}$.

Sind

$$\vec{x}^{\,(\ell)} = \begin{pmatrix} x_{1\ell} \\ \vdots \\ x_{m\ell} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}^{\,(\ell)} = \begin{pmatrix} b_{1\ell} \\ \vdots \\ b_{n\ell} \end{pmatrix}$$

die Spaltenvektoren von X und B, so ist die Matrixgleichung $AX = B$ äquivalent zu den p linearen Gleichungssystemen

$$A\vec{x}^{\,(\ell)} = \vec{b}^{\,(\ell)} \quad \text{für} \quad \ell = 1, \dots, p\,,$$

die allesamt dieselbe Matrix A haben. Falls diese Gleichungen alle lösbar sind, gibt es also eine Matrix X mit $AX = B$.

Bei der Lösung dieser Gleichungssysteme wird es im allgemeinen vorteilhaft sein, auch bei der Rücksubstitution alle rechten Seiten simultan zu behandeln, d.h. anstelle des Einsetzens werden links durch Zeilenoperationen so lange Koeffizienten eliminiert, bis in jeder Zeile möglichst nur noch ein einziger von Null verschiedener Eintrag steht. (Dies ist

natürlich nur dann erreichbar, wenn das Gleichungssystem höchstens eine Lösung hat.) Durch Division läßt sich der verbliebene Eintrag noch auf Eins normieren, so daß sich dann rechts leicht die Lösung ablesen läßt.

Speziell im Falle quadratisher Matrizen kann man bei eindeutig lösbaren Gleichungen durch Zeilenvertauschungen sogar erreichen, daß links die Einheitsmatrix steht; da alle angewandten Operationen die Matrixgleichung „links $\times$ X = rechts" erhalten, steht dann rechts die Lösungsmatrix X.

Betrachten wir als Beispiel die Inversion der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ lösen für die drei rechten Seiten

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dazu wenden wir den GAUSS-Algorithmus simultan auf alle drei Gleichungssysteme an, indem wir die drei rechten Seiten nebeneinander schreiben, d.h. wir gehen aus von einer um alle drei rechten Seiten erweiterten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und wenden darauf die üblichen Eliminationsschritte an:

Als erstes müssen wir in der ersten Spalte alle Koeffizienten bis auf einen zu Null machen; dazu subtrahieren wir das vier- *bzw.* achtfache der ersten Zeile von der zweiten *bzw.* dritten und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -12 & -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als nächstes sollte der zweite Eintrag der letzten Zeile eliminiert werden; dazu können wir $7/3$ der mittleren Zeile von der letzten subtrahieren oder aber, um Nenner zu vermeiden, sieben mal die zweite Gleichung von dreimal der dritten subtrahieren; dies führt auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

In dieser Gestalt lassen sich die drei Gleichungssysteme nun leicht durch Rücksubstitution lösen; wir wollen aber stattdessen lieber weiter mit Zeilenoperationen arbeiten. (Kurzes Nachdenken zeigt, daß dies tatsächlich nur eine andere Betrachtungsweise für genau dieselben Rechenoperationen ist.)

Subtrahieren wir fünfmal die dritte Zeile von der zweiten und addieren sie dreimal zur ersten, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 13 & -21 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & -24 & 36 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix wird deutlich übersichtlicher, wenn wir die zweite Zeile durch -3 dividieren und die dritte durch -1 und schließlich noch zweimal die neue zweite Zeile von der ersten subtrahieren; sie bekommt dann die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir linke eine Einheitsmatrix und können die Lösungsvektoren sofort ablesen: Es sind gerade die rechten Seiten, d.h. die rechte Matrix

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 8 & -12 & 5 \\ -4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

ist die Lösung von $AX = E$, wovon man sich zur Vorsicht vielleicht noch einmal durch Nachrechnen überzeugen sollte.

Daß so etwas auch beim Rechnen mit Computern kein Schaden sein kann, zeigt das folgende Beispiel einer Matrixinversion in MATLAB (*Mat*rix *Lab*oratory), einen häufig verwendeten System für numerische Berechnungen mit Matrizen:


```
seiler@hilbert:~ $ matlab

                          < M A T L A B >
              Copyright 1984-2000 The MathWorks, Inc.
                   Version 6.0.0.88 Release 12
                          Sep 21 2000

To get started, type one of these: helpwin, helpdesk, or
demo.
For Product information, visit www.mathworks.com.

>> A = [1,2,3;4,5,6;7,8,9]

A =
        1     2     3
        4     5     6
        7     8     9

>> B = inv(A)

Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
         Results may be inaccurate. RCOND = 1.541976e-18.
B =
     1.0e+16 *
      -0.4504    0.9007   -0.4504
       0.9007   -1.8014    0.9007
      -0.4504    0.9007   -0.4504
>> A*B
ans =
        2     0     0
        8     0    -4
       16     0     8
>> B*A
ans =
        0    -4     0
        0     8     0
        4     0     0
```