

28. September 2004

## Nachklausur Höhere Mathematik I

• • •                      Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!                      • • •

**Fragen:** je zwei Punkte

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Bilden die Vektoren  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  eine Basis des Vektorraums  $\mathbb{R}^2$ , so auch die Vektoren  $\vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  und  $\vec{w}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ .

**Lösung:** *Richtig*, denn wegen  $\vec{v}_1 = \frac{1}{2}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2)$  und  $\vec{v}_2 = \frac{1}{2}(\vec{w}_1 - \vec{w}_2)$  erzeugen  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  und  $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$  denselben Vektorraum.

- 2) *Richtig oder falsch:* Die Menge aller stetig differenzierbarer Funktionen  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit  $f(1)^2 = f'(0)$  bilden einen Vektorraum.

**Lösung:** *Falsch*, denn zwar liegt beispielsweise  $f(x) = x$  in dieser Menge, nicht aber  $g = 2f$ , da  $g(1)^2 = 4$ , aber  $g'(0) = 2$  ist.

- 3) *Richtig oder falsch:*  $\varphi, \psi: V \rightarrow W$  seien zwei lineare Abbildung zwischen den  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$ . Dann ist  $U = \{\vec{v} \in V \mid \varphi(\vec{v}) + \psi(\vec{v}) = \vec{0}\}$  ein Untervektorraum von  $V$ .

**Lösung:** *Richtig*, denn wegen  $\varphi(\vec{0}) + \psi(\vec{0}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$  liegt der Nullvektor in  $U$ , und für  $\vec{u}, \vec{v} \in U$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ist nach Voraussetzung  $\varphi(\vec{u}) + \psi(\vec{u}) = \vec{0}$  und  $\varphi(\vec{v}) + \psi(\vec{v}) = \vec{0}$ , also auch

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) + \psi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= \lambda\varphi(\vec{u}) + \mu\varphi(\vec{v}) + \lambda\psi(\vec{u}) + \mu\psi(\vec{v}) \\ &= \lambda(\varphi(\vec{u}) + \psi(\vec{u})) + \mu(\varphi(\vec{v}) + \psi(\vec{v})) = \lambda\vec{0} + \mu\vec{0} = \vec{0}, \end{aligned}$$

d.h.  $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in U$ .

- 4) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung  $\varphi: \mathbb{F}_2^3 \rightarrow \mathbb{F}_2^3$  mit  $\varphi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$  ist linear.

**Lösung:** *Richtig*, denn für  $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_2$  und  $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^3$  ist

$$\varphi(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda a + \mu d \\ \lambda b + \mu e \\ \lambda c + \mu f \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda b + \mu e \\ \lambda c + \mu f \\ \lambda a + \mu d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e \\ f \\ d \end{pmatrix} = \lambda\varphi(\vec{v}) + \mu\varphi(\vec{w}).$$

- 5) Die Niveaulinien  $N_a(f)$  der Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seien die Geraden  $x + 2y + 3a = 0$ . Was ist  $f(x, y)$ ?

**Lösung:**  $f(x, y) = a \iff x + 2y + 3a = 0$  führt sofort auf  $f(x, y) = a = -\frac{1}{3}(x + 2y)$ .

6) *Richtig oder falsch:*  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$

**Lösung:** *Falsch;* das Integral über einen nichtnegativen Integranden kann unmöglich gleich  $-1$  sein. (Tatsächlich existiert das Integral nicht, da der Integrand an der Stelle  $x = 0$  nicht definiert ist.)

7)  $Q$  sei das Quadrat mit Ecken  $(\pm 1, \pm 1)$ . Was ist  $\iint_Q xy \, dx \, dy$  ?

**Lösung:** *Null,* denn der Integrand ist ungerade in  $x$  und der Integrationsbereich symmetrisch zur  $y$ -Achse. Alternativ kann man auch direkt nachrechnen:

$$\iint_Q xy \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 xy \, dx \right) dy = \int_{-1}^1 \frac{x^2 y}{2} \Big|_{-1}^1 dy = \int_{-1}^1 0 \, dy = 0.$$

### Aufgabe 1: (11 Punkte)

$V$  sei der Vektorraum aller reeller Polynome  $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$  vom Grad höchstens vier, und  $M$  sei die Teilmenge aller Polynome aus  $V$  mit  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0$ . Zeigen Sie:

a)  $M$  ist ein Untervektorraum von  $V$  !

**Lösung:** Das Nullpolynom liegt offensichtlich in  $M$ . Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  und zwei Polynome  $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$  und  $g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$  aus  $M$  ist

$$\lambda f + \mu g = (\lambda a_0 + \mu b_0) + (\lambda a_1 + \mu b_1)x + (\lambda a_2 + \mu b_2)x^2 + (\lambda a_3 + \mu b_3)x^3 + (\lambda a_4 + \mu b_4)x^4$$

und

$$\begin{aligned} & (\lambda a_1 + \mu b_1) + 2(\lambda a_2 + \mu b_2) + 3(\lambda a_3 + \mu b_3) + 4(\lambda a_4 + \mu b_4) \\ &= \lambda(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4) + \mu(b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4) = 0, \end{aligned}$$

so daß auch  $\lambda f + \mu g$  in  $M$  liegt.

b) Die Polynome  $1, x^2 - 2x, 2x^3 - 3x^2, 3x^4 - 4x^3$  bilden eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $M$  !

**Lösung:** Offensichtlich liegen alle vier Polynome in  $M$ . Sie sind auch linear unabhängig, denn ist

$$\lambda \cdot 1 + \mu(x^2 - 2x) + \nu(2x^3 - 3x^2) + \omega(3x^4 - 4x^3) = \lambda - 2\mu x + (\mu - 3\nu)x^2 + (2\nu - 4\omega)x^3 + 3\omega x^4$$

das Nullpolynom, so müssen alle Koeffizienten verschwinden, also auch  $\lambda, \mu, \nu$  und  $\omega$ . Somit erzeugen diese Polynome einen vierdimensionalen Vektorraum, der in  $M$  enthalten ist.

$M$  ist ein Untervektorraum des fünfdimensionalen Vektorraums  $V$ , aber nicht ganz  $V$ , da z.B. das Polynom  $x$  nicht in  $M$  liegt. Also ist  $M$  höchstens vierdimensional und daher gleich dem Erzeugnis der vier Polynome. Somit bilden diese eine Basis.

c) Ergänzen Sie  $\mathcal{B}$  zu einer Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$  !

**Lösung:** Es reicht, irgendein Polynom aus  $V \setminus M$  dazuzunehmen, z.B.  $x$ .

d) Die Abbildung  $\varphi: M \rightarrow V; f \mapsto f(1) + f'(1)x + f''(1)x^2 + f'''(1)x^3 + f^{(4)}(1)x^4$  ist linear!

**Lösung:** Für  $f, g \in M$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ist  $(\lambda f + \mu g)^{(n)}(1) = \lambda f^{(n)}(1) + \mu g^{(n)}(1)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ; damit folgt  $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$ .

e) Welche Dimensionen haben Kern und Bild von  $\varphi$ ?

**Lösung:**  $\varphi$  ist offensichtlich injektiv: Für jedes Polynom  $f$  aus dem Kern verschwinden  $f(1)$  sowie auch sämtliche Ableitungen an der Stelle Eins. (Die Ableitungen ab der fünften verschwinden für ein Polynom vom Grad höchstens vier ohnehin identisch.) Also muß  $f$  das Nullpolynom sein, wie beispielsweise seine TAYLOR-Entwicklung um  $x = 1$  zeigt. Also ist der Kern nulldimensional, und nach der Dimensionsformel ist

$$\dim \text{Bild } \varphi = \dim M - \dim \text{Kern } \varphi = \dim M = 4.$$

f) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  bezüglich der Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$ !

**Lösung:** Wir müssen zunächst die Bilder der Polynome aus  $\mathcal{B}$  berechnen und bezüglich der Basis  $\mathcal{C}$  darstellen:

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= 1 \\ \varphi(x^2 - 2x) &= -1 + 2x^2 = -1 \cdot 1 + 2(x^2 - 2x) + 4 \cdot x \\ \varphi(2x^3 - 3x^2) &= -1 + 6x^2 + 12x^3 = -1 \cdot 1 + 24(x^2 - 2x) + 6(2x^3 - 3x^2) + 48x \\ \varphi(3x^4 - 4x^3) &= -1 + 12x^2 + 48x^3 + 72x^4 \\ &= -1 \cdot 1 + 228(x^2 - 2x) + 72(2x^3 - 3x^2) + 24(3x^4 - 4x^3) + 456x\end{aligned}$$

Die Abbildungsmatrix ist damit 
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 24 & 228 \\ 0 & 0 & 6 & 72 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 4 & 48 & 456 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 2: (8 Punkte)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $a \in \mathbb{R}$  die Lösungsmenge  $\mathcal{L}_a$  des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}w + x + y + az &= -1 & (1) \\ w + x + ay + z &= 1 & (2) \\ w + ax + y + z &= -1 & (3) \\ aw + x + y + z &= 1 & (4)\end{aligned}$$

*Hinweis nur zur Kontrolle auf Rechenfehler:* Für viele Werte von  $a$  ist  $z = \frac{1}{1-a}$ .

**Lösung:** Zur Elimination von  $w$  aus den letzten drei Gleichungen subtrahieren wir die erste Gleichung von der zweiten und der dritten sowie  $a$ -mal von der vierten:

$$\begin{aligned}(a-1)y + (1-a)z &= 2 & (5) \\ (a-1)x + (1-a)z &= 0 & (6) \\ (1-a)x + (1-a)y + (1-a^2)z &= 1+a & (7)\end{aligned}$$

Letztere Gleichung dividieren wir natürlich gleich durch fünf:

$$x - 2y + (a^2 - a + 4)z = (a-4) \quad (7')$$

Als nächstes soll  $x$  aus den Gleichungen (6) und (7') eliminiert werden; dazu subtrahieren wir Gleichung (5) zweimal von (6) und einmal von (7'):

$$-5y + 20z = 5 \quad (8)$$

$$-y + (a^2 - a + 4)z = a + 1 \quad (9)$$

Auch (8) dividieren wir natürlich durch fünf:

$$-y + 4z = 1 \quad (8')$$

(9) minus (8') ergibt

$$(a^2 - a)z = a \quad \text{oder} \quad a(a - 1)z = a.$$

Für  $a \neq 0$  können wir durch  $a$  dividieren und erhalten  $(a - 1)z = 1$ , was für  $a = 1$  unlösbar ist, und sonst auf

$$z = \frac{1}{a - 1} \quad \text{für } a \neq 0, 1$$

führt. Für  $a = 0$  erfüllt jedes  $z$  die dann resultierende Gleichung  $0z = 0$ , wir können also für  $z$  jede reelle Zahl  $\lambda$  einsetzen.

$$\text{Nach (8')} \text{ folgt } y = 4z - 1 = \begin{cases} \frac{4}{a - 1} - 1 = \frac{5 - a}{a - 1} & \text{für } a \neq 0, 1 \\ 4\lambda - 1 & \text{für } a = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Sodann zeigt Gleichung (5), daß } x = y - 5 = \begin{cases} \frac{10 - 6a}{a - 1} & \text{für } a \neq 0, 1 \\ 4\lambda - 6 & \text{für } a = 0 \end{cases}.$$

Entsprechend folgt aus Gleichung (1), daß

$$w = 10 + 2x - 3y + 5z = \begin{cases} \frac{10a - 10 + 20 - 12a + 3a - 15 + 5}{a - 1} = \frac{a}{a - 1} & \text{für } a \neq 0, 1 \\ 10 + 8\lambda - 12 - 12\lambda + 3 + 5\lambda = \lambda + 1 & \text{für } a = 0 \end{cases}$$

ist. Insgesamt ist also

$$\mathcal{L}_a = \left\{ \left( \frac{a}{a - 1}, \frac{10 - 6a}{a - 1}, \frac{5 - a}{a - 1}, \frac{1}{a - 1} \right) \right\} \quad \text{für } a \neq 0, 1,$$

$$\mathcal{L}_0 = \{ (\lambda + 1, 4\lambda - 6, 4\lambda - 1, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_1 = \emptyset.$$

**Aufgabe 3:** (5 Punkte)

Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ !

**Lösung:** Wir bestimmen nach GRAM-SCHMIDT eine Orthogonal- und simultan auch eine Orthonormalbasis des von den Spaltenvektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$  aufgespannten Vektorraums. Als ersten Vektor können wir  $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$  wählen; da  $|\vec{a}_1| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$  ist, ist der zugehörige Vektor der Orthonormalbasis  $\vec{q}_1 = \frac{1}{3}\vec{a}_1$  und die Darstellung von  $\vec{a}_1$  in der Orthonormalbasis ist dementsprechend einfach  $\vec{a}_1 = 3\vec{q}_1$ .

Für den zweiten Vektor der Orthogonalbasis machen wir den Ansatz  $\vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_1$ , wobei  $\lambda$  so gewählt werden muß, daß

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 + \lambda\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = 0$$

ist. Da

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 2 \cdot 2 + (-2) + 2 \cdot (-1) = 0$$

verschwindet, ist  $\vec{b}_2 = \vec{a}_2$ . Auch dieser Vektor hat die Länge drei, der zugehörige Vektor der Orthonormalbasis ist also  $\vec{q}_2 = \frac{1}{3}\vec{a}_2$ , und  $\vec{a}_2$  hat die Basisdarstellung  $\vec{a}_2 = 3\vec{q}_2$ .

Für den noch fehlenden dritten Vektor der Orthogonalbasis ist der Ansatz entsprechend:

$$\begin{aligned}\vec{b}_3 &= \vec{a}_3 + \lambda \vec{b}_1 + \mu \vec{b}_2 \quad \text{mit} \quad \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 = \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 = 0. \\ \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 &= \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 + \lambda \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = (3 + 12) + 9\lambda \implies \lambda = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3} \\ \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 &= \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_2 + \mu \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 = (-6 - 6) + 9\mu \implies \mu = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \\ \vec{b}_3 &= \vec{a}_3 - \frac{5}{3}\vec{a}_1 + \frac{4}{3}\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dieser Vektor hat die Länge

$$|\vec{b}_3| = \frac{2}{3} \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2,$$

der zugehörige normierte Vektor ist also  $\vec{q}_3 = \frac{1}{2}\vec{b}_3$  und

$$\vec{a}_3 = \vec{b}_3 + \frac{5}{3}\vec{b}_1 - \frac{4}{3}\vec{b}_2 = 5\vec{q}_1 - 4\vec{q}_2 + 2\vec{q}_3.$$

Da  $\vec{q}_1, \vec{q}_2$  und  $\vec{q}_3$  bereits eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  bilden, geht es beim vierten Vektor nur noch um seine Darstellung

$$\vec{a}_4 = \lambda_1 \vec{q}_1 + \lambda_2 \vec{q}_2 + \lambda_3 \vec{q}_3$$

als Linearkombination der Basisvektoren. Multiplikation dieser Gleichung mit  $\vec{q}_i$  zeigt, daß  $\lambda_i = \vec{a}_4 \cdot \vec{q}_i$  ist, also

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}(18 + 6 + 6) = 10, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}(18 - 12 - 3) = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = \frac{1}{3}(-9 - 12 + 6) = -5.$$

$$\text{Somit ist } Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

#### Aufgabe 4: (6 Punkte)

Zwischen zwei Größen  $x$  und  $t$  wird ein Zusammenhang der Form

$$x(t) = a \cos t + b \sin t + c$$

erwartet. Zur Bestimmung der Parameter  $a, b, c$  werden hundert Messungen durchgeführt, die zu Wertepaaren  $(t_n, x_n)$  führen. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, dem die nach der Methode der kleinsten Quadrate bestmöglichen Schätzwerte für  $a, b, c$  genügen!

**Lösung:** Falls der Zusammenhang perfekt wäre, würden die gesuchten Parameter  $a, b, c$  den hundert linearen Gleichungen

$$\cos(t_i) \cdot a + \sin(t_i) \cdot b + c = x_i$$

genügen; in Matrixform ist dies das LGS

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} \cos t_1 & \sin t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos t_{100} & \sin t_{100} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{100} \end{pmatrix}.$$

Dieses LGS für  $a, b, c$  wird praktisch immer unlösbar sein; die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate beste Schätzung erhält man, indem man mit der adjungierten, d.h.

hier im Reellen einfach der transponierten Matrix von  $A$  multipliziert:  $({}^tAA) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = {}^tA\vec{x}$ .

Ausgeschrieben wird das zu

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{100} \cos^2 t_i & \sum_{i=1}^{100} \cos t_i \cdot \cos 2t_i & \sum_{i=1}^{100} \cos t_i \cdot \cos 3t_i \\ \sum_{i=1}^{100} \cos t_i \cdot \cos 2t_i & \sum_{i=1}^{100} \cos^2 2t_i & \sum_{i=1}^{100} \cos 2t_i \cdot \cos 3t_i \\ \sum_{i=1}^{100} \cos t_i \cdot \cos 3t_i & \sum_{i=1}^{100} \cos 2t_i \cdot \cos 3t_i & \sum_{i=1}^{100} \cos^2 3t_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{100} \cos(t_i)x_i \\ \sum_{i=1}^{100} \cos(2t_i)x_i \\ \sum_{i=1}^{100} \cos(3t_i)x_i \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 5: (6 Punkte)

- a) Eine Matrix heißt *symmetrisch*, falls  ${}^tA = A$  ist, *HERMITESCH*, wenn  ${}^tA = \bar{A}$  ist, *orthogonal*, wenn  ${}^tAA = E$  ist und *unitär*, wenn  ${}^tA\bar{A} = E$  ist. Welche dieser vier Eigenschaften

hat die Matrix  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$  ?

**Lösung:** Offensichtlich ist  ${}^tA = A$ , die Matrix ist also symmetrisch, aber nicht HERMITESCH, denn die beiden rein imaginären Einträge in der Diagonalen ändern beim Transponieren natürlich nicht ihr Vorzeichen.

$${}^tAA = A^2 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 24i \\ 0 & 25 & 0 \\ 24i & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich nicht die Einheitsmatrix, so daß  $A$  nicht orthogonal ist, aber unitär, denn

$${}^tA\bar{A} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3i & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3i & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -3i \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = E.$$

- b) Was ist  $A^{-1}$ ?

**Lösung:** Für eine unitäre Matrix ist  $A^{-1} = \bar{{}^tA}$ , hier also wegen der Symmetrie von  $A$  einfach

$$A^{-1} = \bar{A} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3i & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -3i \end{pmatrix}.$$

- c) Was ist  $\det(A)$ ?

**Lösung:** Da  $A$  unitär ist, muß  $|\det A| = 1$  sein; mehr können wir leider nicht sagen ohne zu rechnen. Der Vorfaktor  $\frac{1}{5}$  muß in *jeder* der drei Spalten berücksichtigt werden, führt also bei der Determinante zu einem Faktor  $\frac{1}{125}$ . Da die Matrix nur in der Diagonale und der Gegendiagonale Einträge hat, führt SARRUS am schnellsten zum Ergebnis:

$$\det A = \frac{1}{125} \begin{vmatrix} 3i & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3i \end{vmatrix} = \frac{1}{125} (5 \cdot (3i)^2 - 5 \cdot 4^2) = \frac{5}{125} (-9 - 16) = \frac{1}{25} (-25) = -1.$$

### Aufgabe 6: (6 Punkte)

- a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ !  
*Hinweis:* Ein Eigenwert ist  $\lambda = 3$ .

**Lösung:** Die Eigenwerte sind die Nullstellen von

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 4 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1 + \lambda)\lambda^2 - 8 + 4 - 4\lambda + 4(1 + \lambda) + 2\lambda \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 + \lambda - 2) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Somit hat  $A$  die Eigenwerte  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$  und  $\lambda_3 = -2$ .

Die Eigenvektoren zu  $\lambda_1 = 0$  erfüllen das lineare Gleichungssystem  $A\vec{v} = \vec{0}$  oder

$$-x + 2y - z = x - z = 4x - 4y = 0;$$

aus den letzten beiden Gleichungen folgt, daß  $x = y$  und  $x = z$  sein muß, d.h.  $x = y = z$ , und dann ist auch die erste Gleichung erfüllt. Die Eigenvektoren zu  $\lambda_1 = 0$  sind also gerade

die vom Nullvektor verschiedenen Vielfachen von  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Die Eigenvektoren zu  $\lambda_1 = 1$  erfüllen das lineare Gleichungssystem  $(A - E)\vec{v} = \vec{0}$  oder

$$-2x + 2y - z = x - y - z = 4x - 4y - z = 0.$$

Addiert man die mittlere Gleichung zweimal zur vorderen und subtrahiert sie viermal von der hinteren, fallen in beiden Gleichungen außer den  $x$ -Termen auch noch die  $y$ -Terme mit, so daß sie äquivalent werden zu  $z = 0$ . Setzt man dies in eine beliebige der drei Gleichungen ein, folgt, daß  $x = y$  sein muß, die Eigenvektoren zu  $\lambda_2 = 1$  sind also gerade

die vom Nullvektor verschiedenen Vielfachen von  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Für  $\lambda_3 = -2$  schließlich müssen wir das Gleichungssystem  $(A + 2E)\vec{v} = \vec{0}$  lösen; explizit ist dies

$$x + 2y - z = x + 2y - z = 4x - 4y + 2z = 0.$$

Die erste Gleichung ist also identisch mit der zweiten; addiert man sie zweimal zur dritten, ergibt sich  $6x = 0$ , d.h.  $x$  muß verschwinden. Dann wird das Gleichungssystem äquivalent zu  $z = 2y$ , die Eigenvektoren zu  $\lambda_3 = -2$  sind also gerade die vom Nullvektor verschiedenen

Vielfachen von  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- b) Zeigen Sie, daß  $\mathbb{R}^3$  eine Basis aus Eigenvektoren von  $A$  hat!

**Lösung:** Da wir den allgemeinen Satz noch nicht kennen, müssen wir zeigen, daß die drei gefundenen Eigenvektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  und  $\vec{v}_3$  linear unabhängig sind. Ist

$$\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 + \nu\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda + \mu + \nu \\ \lambda + 2\nu \end{pmatrix} = \vec{0},$$

so muß  $\nu$  als Differenz zwischen mittlerem und oberem Eintrag verschwinden, damit wegen des unteren Eintrags  $\lambda + 2\nu$  auch  $\lambda$ , also wegen des oberen Eintrags auch  $\mu$ . Somit sind die drei Vektoren linear unabhängig, bilden also eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ .

c) Wie sieht die Matrix  $A$  bezüglich dieser Basis aus?

**Lösung:** Da jeder der Vektoren  $\vec{v}_i$  einfach mit dem zugehörigen Eigenwert  $\lambda_i$  multipliziert wird, ist dies die Diagonalmatrix mit den  $\lambda_i$  als Einträgen, also

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$



**Aufgabe 7: (4 Punkte)**

Berechnen Sie für die Funktion  $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sin xy + x \sin y + y \sin x + xy \end{cases}$  Gradient und HESSE-Matrix!

**Lösung:** Die Funktion ist offensichtlich mindestens zweimal stetig differenzierbar (sie ist sogar analytisch); es reicht also, die partiellen Ableitungen zu berechnen. Für den Gradienten bekommen wir

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= ye^{xy} + 2x \cos y + y^2 \cos x + 2xy^2 \\ f_y(x, y) &= xe^{xy} - x^2 \sin y + 2y \sin x + 2x^2y \\ \nabla f(x, y) &= \begin{pmatrix} ye^{xy} + 2x \cos y + y^2 \cos x + 2xy^2 \\ xe^{xy} - x^2 \sin y + 2y \sin x + 2x^2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die HESSE-Matrix können wir aus dem SCHWARZschen Lemma folgern, daß  $f_{xy} = f_{yx}$  ist, wir müssen also nur eine der beiden gemischten Ableitungen berechnen.

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= y^2 e^{xy} + 2 \cos y - y^2 \sin x + 2y^2 \\ f_{xy}(x, y) &= (1 + xy)e^{xy} - 2x \sin y + 2y \cos x + 4xy \\ f_{yy}(x, y) &= x^2 e^{xy} - x^2 \cos y + 2 \sin x + 2x^2 \end{aligned}$$

Damit ist  $H_f(x, y)$  die Matrix

$$\begin{pmatrix} y^2 e^{xy} + 2 \cos y - y^2 \sin x + 2y^2 & (1 + xy)e^{xy} - 2x \sin y + 2y \cos x + 4xy \\ (1 + xy)e^{xy} - 2x \sin y + 2y \cos x + 4xy & x^2 e^{xy} - x^2 \cos y + 2 \sin x + 2x^2 \end{pmatrix}.$$