Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

28. September 2004

Nachklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Bilden die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^2$, so auch die Vektoren $\vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ und $\vec{w}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

2) Richtig oder falsch: Die Menge aller stetig differenzierbarer Funktionen $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f(1)^2 = f'(0)$ bilden einen Vektorraum.

3) Richtig oder falsch: $\varphi, \psi\colon V \to W$ seien zwei lineare Abbildung zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen V und W. Dann ist $U = \left\{\vec{v} \in V \;\middle|\; \varphi(\vec{v}) + \psi(\vec{v}) = \vec{0}\right\}$ ein Untervektorraum von V.

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{F}_2^3 \to \mathbb{F}_2^3$ mit $\varphi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$ ist linear.

5) Die Niveaulinien $N_a(f)$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien die Geraden $x + 2y + 3a = 0$. Was ist $f(x, y)$?

6) Richtig oder falsch: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\left.\frac{1}{x}\right|_{-1}^{1} = -2$

7) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$. Was ist $\displaystyle\iint_Q xy\,dx\,dy$?

Aufgabe 1: (*11 Punkte*)
V sei der Vektorraum aller reeller Polynome $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ vom Grad höchstens vier, und M sei die Teilmenge aller Polynome aus V mit $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0$. Zeigen Sie:

a) M ist ein Untervektorraum von V !

b) Die Polynome $1, x^2 - 2x, 2x^3 - 3x^2, 3x^4 - 4x^3$ bilden eine Basis $\mathcal{B}$ von M !

c) Ergänzen Sie $\mathcal{B}$ zu einer Basis $\mathcal{C}$ von V !

d) Die Abbildung $\varphi\colon M \to V;\ f \mapsto f(1) + f'(1)x + f''(1)x^2 + f'''(1)x^3 + f^{(4)}(1)x^4$ ist linear!

e) Welche Dimensionen haben Kern und Bild von φ ?

f) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} w &+& x &+& y &+& az &=& -1 & (1) \\ w &+& x &+& ay &+& z &=& 1 & (2) \\ w &+& ax &+& y &+& z &=& -1 & (3) \\ aw &+& x &+& y &+& z &=& 1 & (4) \end{array}$$

Hinweis **nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler:* Für viele Werte von a ist $z = \dfrac{1}{1-a}$.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*
Zwischen zwei Größen x und t wird ein Zusammenhang der Form

$$x(t) = a\cos t + b\sin t + c$$

erwartet. Zur Bestimmung der Parameter a, b, c werden hundert Messungen durchgeführt, die zu Wertepaaren (t_n, x_n) führen. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, dem die nach der Methode der kleinsten Quadrate bestmöglichen Schätzwerte für a, b, c genügen!

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Eine Matrix heißt *symmetrisch*, falls ${}^tA = A$ ist, HERMITEsch, wenn ${}^tA = \overline{A}$ ist, *orthogonal,* wenn ${}^tAA = E$ ist und *unitär*, wenn ${}^tA\overline{A} = E$ ist. Welche dieser vier Eigenschaften hat die Matrix $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$?

b) Was ist A^{-1}?

c) Was ist $\det(A)$?

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$!
Hinweis: Ein Eigenwert ist $\lambda = 3$.

b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^3$ eine Basis aus Eigenvektoren von A hat!

c) Wie sieht die Matrix A bezüglich dieser Basis aus?

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*
Berechnen Sie für die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin xy + x\sin y + y\sin x + xy \end{cases}$ Gradient und HESSE-Matrix!

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Dienstag, dem 28. September 2004, um 13^{00} Uhr