WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

4. Oktober 2004

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Menge M aller Vektoren aus $\mathbb{F}_2^4$ mit einer geraden Anzahl von Einsen ist ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum.

2) Richtig oder falsch: Die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ sei injektiv. Dann ist die Gleichung $\varphi(\vec{x}) = \vec{v}$ für jeden Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^5$ lösbar.

3) In der 10×10-Matrix A sei $a_{ij} = \max(i+1-j, 0)$. Was ist $\det A$?

4) Richtig oder falsch: Betrachtet man $\mathbb{F}_{256}$ als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum, so ist die lineare Abbildung $\mathbb{F}_{256} \to \mathbb{F}_{256}$; $x \mapsto x^2$ linear.

5) Finden Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$ aufgespannten Unterraums von $\mathbb{C}^3$!

6) Richtig oder falsch: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{2004}} = -4006$

7) Was ist $\operatorname{div}\operatorname{rot}\begin{pmatrix} \sin xyz \\ \cos xyz \\ xyz \end{pmatrix}$?

8) Was ist $\displaystyle\iint_K x^2\,dx\,dy$ für $K = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| |x| \le 1, |y| \le 1\bigr\}$?

Aufgabe 1: (*9 Punkte)*
M sei die Menge aller Funktionen der Form $P(x)\cos x$ oder $Q(x)\sin x$ mit reellen Polynomen P, Q vom Grad höchstens zwei, und V sei der von M erzeugte $\mathbb{R}$-Vektorraum.

a) Ist $V = M$, d.h. ist M bereits ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

b) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V !

c) Zeigen Sie: $\varphi\colon \begin{cases} V \to V \\ f(x) \mapsto f'(x) + f(0)\sin x \end{cases}$ ist eine lineare Abbildung.

d) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$!

e) Welche Dimension haben $\operatorname{Kern}\varphi$ und $\operatorname{Bild}\varphi$?

f) Welche Abbildungsmatrix hat φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$?

g) Ist diese Abbildungsmatrix invertierbar?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 2y - 2az &= 3 & (1)\\ 3x + 7y - 7az &= 8 & (2)\\ x + y + a^2 z &= a + 5 & (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*
Gegeben seien hundert Paare von Meßgrößen (t_i, x_i), zwischen denen ein Zusammenhang der Form $x_i = ae^{t_i} + be^{-t_i} + c$ vermutet wird. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf zur Berechnung jener Koeffizienten a, b, c, mit denen diese Beziehung im Sinne der kleinsten Quadrate am besten gilt!

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto e^{xy} - x^2 e^y + y^2 e^x - xy \end{cases} !$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} xy \sin xy \\ \cos^2 xy \end{pmatrix} \end{cases} !$$

$\mathcal{H}\ \mathcal{I}\ \mathcal{L}\ \mathcal{F}\ \mathcal{S}\ \mathcal{M}\ \mathcal{I}\ \mathcal{T}\ \mathcal{T}\ \mathcal{E}\ \mathcal{L}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.
Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

Die Lösungen werden im Laufe des Tages im Netz erscheinen.

Abgabe bis zum Montag, dem 4. Oktober 2004, um 10^{15} Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •