Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

17. Juli 2004

Scheinklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Sind die Elemente $f_1, \dots, f_r$ des Vektorraums $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller stetig differenzierbarer Funktionen linear abhängig, so sind auch ihre Ableitungen $f'_1, \dots, f'_r$ als Elemente des Vektorraums $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller stetiger Funktionen linear abhängig.

2) *Richtig oder falsch:* Sind die Elemente $f_1, \dots, f_r$ des Vektorraums $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller stetig differenzierbarer Funktionen linear unabhängig, so sind auch ihre Ableitungen $f'_1, \dots, f'_r$ als Elemente des Vektorraums $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller stetiger Funktionen linear unabhängig.

3) *Richtig oder falsch:* $\varphi, \psi\colon V \to W$ seien zwei lineare Abbildung zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen V und W. Dann ist $U = \left\{\vec{v} \in V \;\middle|\; \varphi(\vec{v}) = \psi(\vec{v})\right\}$ ein Untervektorraum von V.

4) Der Untervektorraum $U \le \mathbb{F}_2^3$ werde erzeugt von den Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Geben Sie alle Elemente von U explizit an!

5) Finden Sie *eine* ganzzahlige Lösung der Gleichung $17x + 7y = 2004$!

6) Die Niveaulinien $N_a(f)$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien die Parabeln $y = 2x^2 + a$. Was ist $f(x, y)$?

7) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ habe in jedem Punkt den Gradienten $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, und im Nullpunkt sei $f(0, 0, 0) = 1$. Was ist $f(x, y, z)$?

Aufgabe 1: (*11 Punkte)*
V sei der Vektorraum aller reeller Polynome in x vom Grad höchstens vier, und M sei die Teilmenge aller Polynome aus V, die für $x = 1$ verschwinden.

a) Ist M ein Untervektorraum von V ?

b) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi\colon V \to \mathbb{R};\ f \mapsto f(1)$ ist linear!

c) Welche Dimensionen haben Kern und Bild von φ ?

d) Zeigen Sie: $\mathcal{B} = \left(x^4 - x^3, x^3 - x^2, x^2 - x, x - 1\right)$ ist eine Basis von $[M]$!

e) Ergänzen Sie $\mathcal{B}$ zu einer Basis $\mathcal{C}$ von V !

f) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\psi\colon V \to V;\ f \mapsto f'$ sowohl bezüglich der Basis $\mathcal{D} = \left(x^4, x^3, x^2, x, 1\right)$ als auch bezüglich $\mathcal{C}$!

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
w - 2x + 3y - 5z &= 10 && (1)\\
2w - 3x + 5y - 10z &= 15 && (2)\\
3w - 4x + 2y + 5z &= 25 && (3)\\
4w - 3x + 2y + 5(a^2 - a)z &= 5(a+4) && (4)
\end{aligned}$$

Hinweis **nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler:* Für viele Werte von a ist $z = \dfrac{1}{a-1}$.

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 4: (*6 Punkte*)
Zwischen zwei Größen x und t wird ein Zusammenhang der Form

$$x(t) = a\cos t + b\cos 2t + c\cos 3t$$

erwartet. Zur Bestimmung der Parameter a, b, c werden hundert Messungen durchgeführt, die zu Wertepaaren (t_n, x_n) führen. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, dem die nach der Methode der kleinsten Quadrate bestmöglichen Schätzwerte für a, b, c genügen!

Aufgabe 5: (*6 Punkte*)

a) Eine Matrix heißt *symmetrisch*, falls ${}^tA = A$ ist, HERMITEsch, wenn ${}^tA = \overline{A}$ ist, *orthogonal,* wenn ${}^tAA = E$ ist und *unitär*, wenn ${}^tA\overline{A} = E$ ist. Welche dieser vier Eigenschaften hat die Matrix $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3i & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3i \end{pmatrix}$?

b) Was ist A^{-1}?

c) Was ist $\det(A)$?

Aufgabe 6: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$!

b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^3$ eine Basis aus Eigenvektoren von A hat!

c) Wie sieht die Matrix A bezüglich dieser Basis aus?

Aufgabe 7: (*4 Punkte*)
Berechnen Sie für die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto e^{xy} + x^2\cos y + y^2 \sin x + x^2y^2 \end{cases}$ Gradient und HESSE-Matrix!

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Samstag, dem 17. Juli 2004, um 13^{00} Uhr