Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 6./7. Juli 2004

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$!

b) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$!

c) Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf $\mathbb{C}$?

$$\|z\|_1 = |z|\,, \qquad \|z\|_2 = \mathfrak{Re}\, z + \mathfrak{Im}\, z, \qquad \|z\|_3 = \max(\mathfrak{Re}\, z, \mathfrak{Im}\, z),$$
$$\|z\|_4 = \max(|\mathfrak{Re}\, z|\,, |\mathfrak{Im}\, z|), \qquad \|z\|_5 = (\mathfrak{Re}\, z)(\mathfrak{Im}\, z), \qquad \|z\|_6 = (\mathfrak{Re}\, z)^2 + (\mathfrak{Im}\, z)^2$$

d) Zeigen Sie mit irgendeiner der Vorschriften, die Normen definieren, daß die Abbildung $z \mapsto z^2$ bezüglich dieser Norm in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ stetig ist!

e) M sei der Vektorraum aller reeller $n \times m$-Matrizen. Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf M?

$$\|A\|_1 = \max_{(i,j)} |a_{ij}|\,, \qquad \|A\|_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\,, \qquad \|A\|_3 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\,,$$
$$\|A\|_4 = \max_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}\,, \qquad \|A\|_5 = \sum_{j=1}^{m} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2}$$

f) Welche der folgenden Punktfolgen (x_n, y_n) aus $\mathbb{R}^2$ ist konvergent für $n \to \infty$, und wohin konvergiert sie?
1) $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{1+n^2}, \frac{1}{n^3}\right)$, *2)* $(x_n, y_n) = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$, *3)* $(x_n, y_n) = \left(e^{-n}, \cos(e^{-n^2})\right)$

g) Was können Sie über eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sagen, deren Niveaulinien konzentrische Kreise um den Nullpunkt sowie die nur aus dem Nullpunkt bestehende Menge sind?

h) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x,y) = 5 - \sqrt{x^2+y^2}$ geometrisch!

i) Wo ist die Funktion f aus der letzten Aufgabe stetig? Wo ist sie differenzierbar?

j) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen nach x, y und z, und bestimmen Sie den Gradienten überall dort, wo er existiert!

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2z + z^2x + xyz$$
$$g(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot \cos(xy)$$
$$h(x,y,z) = \frac{x+y}{x-z}$$
$$k(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\ell(x,y,z) = ax + by + cz + d$$

k) *Richtig oder falsch:* Für die Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ verschwinde die Jacobi-Matrix überall. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, so daß $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

l) Berechnen Sie die Hesse-Matrizen der folgenden Funktionen:

$$f_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\quad (x,y,z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$$
$$f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y) \mapsto \sin x \cos y$$
$$f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y) \mapsto e^{x^2+y^2}$$
$$f_4\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y) \mapsto \arctan x + y$$