Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 11./12. Mai 2004

a) Welche Dimension hat der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens n ?

Lösung: Offensichtlich bilden die Polynome $1, X, X^2, \ldots, X^n$ eine Basis; die Dimension ist also $n+1$.

b) Welche Dimension hat der Untervektorraum $W = \left\{ a\sin^2 t + b\cos^2 t + c \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Lösung: Wegen der Beziehung $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ ist offensichtlich eine der Erzeugenden überflüssig: Beispielsweise läßt sich $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ durch die beiden anderen Erzeugenden ausdrücken, so daß diese bereits zur Erzeugung von W ausreichen:

$$a\sin^2 t + b\cos^2 t + c = (a-b)\sin^2 t + (c-b)\,.$$

Sie bilden eine Basis, denn wären sie linear abhängig, müßte $\sin^2 t$ konstant sein. Somit ist $\dim W = 2$.

c) Ergänzen Sie die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^2$!

Lösung: Da je zwei linear unabhängige Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ eine Basis bilden, genügt es, irgendeinen von $\binom{1}{1}$ linear unabhängigen Vektor dazuzunehmen, z.B. $\binom{1}{0}$ oder $\binom{1}{-1}$.

d) *Richtig oder falsch:* Sind U_1, U_2 Untervektorräume eines Vektorraums V, so gibt es Basen $\mathcal{B}_1$ von U_1 und $\mathcal{B}_2$ von U_2, so daß $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$ ist.

Lösung: *Richtig:* Man wähle eine Basis $\mathcal{B}_0$ von $U_1 \cap U_2$ und ergänze diese zu einer Basis $\mathcal{B}_1$ von U_1 und zu einer Basis $\mathcal{B}_2$ von U_2. Der Durchschnitt $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ kann nicht größer sein als $\mathcal{B}_0$, denn er liegt in $U_1 \cap U_2$, wo jeder Vektor linear abhängig ist von den Vektoren aus $\mathcal{B}_0$.

e) *Richtig oder falsch:* $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Lösung: Da $\mathcal{B}$ aus drei Vektoren besteht, ist $\mathcal{B}$ genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^3$, wenn diese Vektoren linear unabhängig sind. Ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda + 5\mu \\ 7\mu + 11\nu \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

der Nullvektor, so zeigt der dritte Eintrag, daß $\lambda = 0$ sein muß. Dann aber muß wegen der ersten Zeile auch μ verschwinden, und dann wiederum zeigt die zweite Zeile, daß auch $\nu = 0$ ist. Also sind die Vektoren linear unabhängig und bilden somit eine Basis.
(Alternativ hätte man auch zeigen können, daß $[\mathcal{B}] = \mathbb{R}^3$ ist, was fast genauso geht.)

f) Richtig oder falsch: Die Polynome x^2, x^2+x und x^2+x+1 bilden eine Basis des Vektorraums aller reeller Polynome vom Grad höchstens zwei.

Lösung: Der Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens zwei ist nach *a)* dreidimensional; daher reicht es wieder, entweder zu zeigen, daß die drei Polynome linear unabhängig sind, oder aber zu zeigen, daß sie ein Erzeugendensystem des Vektorraums bilden. Da ich bei der vorigen Frage über die lineare Unabhängigkeit argumentiert habe, zeige ich hier – auch wenn es geringfügig aufwendiger ist – letzteres.
Sei also ax^2+bx+c ein Polynom vom Grad höchstens zwei. Gesucht sind reelle Zahlen λ, μ, ν, so daß

$$\lambda x^2 + \mu(x^2+x) + \nu(x^2+x+1) = (\lambda+\mu+\nu)x^2 + (\mu+\nu)x + \nu = ax^2+bx+c$$

ist. Koeffizientenvergleich zeigt, daß dies gilt für

$$\nu = c, \quad \mu = b-c \quad \text{und} \quad \lambda = a-(b-c)-c = a-b\,.$$

Kürzer geht es, wenn man beachtet, daß die Elemente der „üblichen“ Basis $(1, x, x^2)$ als Linearkombinationen der drei hier angegebenen ausgedrückt werden können:

$$1 = (x^2+x+1)-(x^2+x), \quad x = (x^2+x)-x^2, \quad x^2 = x^2\,.$$

Damit enthält das Erzeugnis der drei Polynome das Erzeugnis von $\{1, x, x^2\}$, also den gesamten Vektorraum.

g) Welche Dimension haben Kern und Bild der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y-z \\ y+z-w \end{pmatrix} ?$$

Lösung: Die Abbildung ist offensichtlich surjektiv, denn

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ -w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}.$$

Also ist das Bild zweidimensional. Nach der Dimensionsformel ist

$$2 = \dim \operatorname{Bild} \varphi = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Kern} \varphi = 4 - \dim \operatorname{Kern} \varphi\,;$$

somit ist auch der Kern zweidimensional.

h) Berechnen Sie die folgenden Summen in $\mathbb{F}_2^3$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \vec{u}+\vec{v}+\vec{u}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1+1+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

denn in $\mathbb{F}_2$ ist $1+1+1=1$. Schließlich ist $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{u}=\vec{v}+(\vec{u}+\vec{u})=\vec{v}$, denn in $\mathbb{F}_2^n$ ist die Summe eines Vektors mit sich selbst stets der Nullvektor.

i) Finden Sie einen Vektor $\vec{x}\in\mathbb{F}_2^3$ mit $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$!

Lösung: Da in $\mathbb{F}_2^n$ die Summe eines Vektors mit sich selbst gleich dem Nullvektor ist, können wir $\vec{x}$ einfach als

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

berechnen. Natürlich führen auch andere einfache Argumente auf denselben Vektor $\vec{x}$.

j) Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung φ: $\left\{\begin{array}{c}\mathbb{F}_2^4\to\mathbb{F}_2^2\\ \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}\end{array}\right.$!

Lösung: Die Abbildung ist offensichtlich surjektiv, denn setzt man $b=d=0$, so erhält man den Vektor $\binom{a}{c}$, d.h. man kann für einen beliebigen Vektor aus $\mathbb{F}_2^2$ (mindestens) ein Urbild finden.
Für einen Vektor aus dem Kern muß $a+b=0$ und $c+d=0$ sein; für Elemente von $\mathbb{F}_2$ ist dies äquivalent dazu, daß $a=b$ und $c=d$ ist. Der Kern besteht also aus allen Vektoren aus $\mathbb{F}_2^4$, für die sowohl die ersten beiden als auch die letzten beiden Komponenten übereinstimmen.

k) *Richtig oder falsch:* Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ aus $\mathbb{F}_2^3$ sind linear unabhängig.

Lösung: *Falsch,* denn $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1\\1+1\\1+1\end{pmatrix}=\vec{0}$.
(Wären die drei Vektoren als Elemente von $\mathbb{R}^3$ definiert, wären sie linear unabhängig.)

l) Stellen Sie den ggT von 2010 und 123 als Linearkombination dieser Zahlen dar!

Lösung:

$$\begin{aligned}2010:123=16\text{ Rest }42&\Longrightarrow 42=1\cdot2010-16\cdot123\\ 123:42=2\text{ Rest }39&\Longrightarrow 39=1\cdot123-2\cdot42=1\cdot123-2(1\cdot2010-16\cdot123)=-2\cdot2010+33\cdot123\\ 42:39=1\text{ Rest }3&\Longrightarrow 3=42-39=(1\cdot2010-16\cdot123)-(-2\cdot2010+33\cdot123)\\ &\qquad\quad=3\cdot2010-49\cdot123\end{aligned}$$

Da 39 durch drei teilbar ist, ist drei der größte gemeinsame Teiler von 2010 und 123; wir sind also fertig.

m) Bestimmen Sie im Körper $\mathbb{F}_{1031}$ die multiplikativen Inversen von zwei, zehn und zwanzig!

Lösung: Auch hier geht es darum, den größten gemeinsamen Teiler als Linearkombination darzustellen, allerdings wissen wir, daß der ggT von 1031 und jeder der angegebenen Zahlen eins ist, so daß tatsächlich nur die Koeffizienten der Linearkombination interessieren.

$$1031:2=515\text{ Rest }1\Longrightarrow 1=1031-515\cdot2\Longrightarrow -515\cdot2\equiv1\bmod1031\,.$$

Somit ist $-515 \equiv 1031 - 515 = 516 \bmod 1031$ invers zu zwei.

$$1031 : 10 = 103 \text{ Rest } 1 \Longrightarrow 1 = 1031 - 103 \cdot 10\,,$$

hier ist das Inverse also $-103 \equiv 928 \bmod 1031$. Für zwanzig wird die Rechnung etwas umfangreicher:

$$\begin{aligned} 1031 : 20 = 51 \text{ Rest } 11 &\Longrightarrow 11 = 1 \cdot 1031 - 51 \cdot 20 \\ 20 : 11 = 1 \text{ Rest } 9 &\Longrightarrow 9 = -1 \cdot 1031 + 52 \cdot 20 \\ 11 : 9 = 1 \text{ Rest } 2 &\Longrightarrow 2 = 2 \cdot 1031 - 103 \cdot 20 \\ 9 : 2 = 4 \text{ Rest } 1 &\Longrightarrow 1 = -9 \cdot 1031 + 464 \cdot 20 \end{aligned}$$

Damit ist $464 \cdot 20 \equiv 1 \bmod 1031$, das multiplikative Inverse von 20 in $\mathbb{F}_{1031}$ ist 464.

n) Berechnen Sie den Bruch $\frac{3}{4}$ aus $\mathbb{F}_{17}$!

Lösung: Auch ohne EUKLIDischen Algorithmus sieht man, daß $17-4\cdot 4 = 1$ die Darstellung der Eins als Linearkombination von 17 und 4 ist, also ist in $\mathbb{F}_{17}$

$$\frac{1}{4} = -4 = 17 - 4 = 13 \quad \text{und} \quad \frac{3}{4} = 3 \odot 13 = 39 \bmod 17 = 5\,.$$

o) Finden Sie sämtliche ganzzahligen Lösungen der Gleichung $120x + 81y = 24$!

Lösung: Wir bestimmen zunächst den ggT von 120 und 81:

$$\begin{array}{ll} 120 : 81 = \ \ 1 \text{ Rest } 39 & 39 = 120 - 81 \\ \ 81 : 39 = \ \ 2 \text{ Rest } 3 & 3 = 81 - 2 \cdot 39 = 81 - 2(120 - 81) = 3 \cdot 81 - 2 \cdot 120 \\ \ 39 : \ \ 3 = 13 \text{ Rest } 0 & \end{array}$$

Also ist $3 = 3 \cdot 81 - 2 \cdot 120$ der ggT. Multiplikation dieser Gleichung mit acht ergibt

$$120 \cdot (-16) + 81 \cdot 24 = 24\,,$$

also ist $(-16,\, 24)$ eine Lösung. Für zwei Lösungen (x, y) und (u, v) ist

$$120(x - u) + 81(y - v) = 24 - 24 = 0\,;$$

Kürzen durch den ggT drei macht daraus $40(x - u) + 27(y - v) = 0$.
Da 40 und 27 teilerfremd sind, hat die Gleichung $40z + 27w = 0$ als ganzzahlige Lösungen genau die Paare $(27k,\, -40k)$ mit $k \in \mathbb{Z}$; die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung ist also

$$x = -16 + 27k \quad \text{und} \quad y = 24 - 40k \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

p) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß die lineare Gleichung $ax + by = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ganzzahlige Lösungen (x, y) hat!

Lösung: Da jeder gemeinsame Teiler von a und b im Falle der Lösbarkeit auch $ax+by = c$ teilt, muß notwendigerweise $\operatorname{ggT}(a, b)$ ein Teiler von c sein. Diese Bedingung ist auch hinreichend, denn dann läßt sich $\operatorname{ggT}(a, b)$ linear kombinieren, und Multiplikation dieser Darstellung mit $c/\operatorname{ggT}(a, b)$ liefert eine Lösung der Gleichung.