

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27./28. April 2004

a) Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = i(1-i), \quad z_2 = (3+i)(3-i), \quad z_3 = (i+1)(i-1), \quad z_4 = i^{2004}, \quad z_5 = \frac{5+2i}{2+3i}, \quad z_6 = \frac{4+i}{2-i}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} z_1 &= i(1-i) = i \cdot 1 - i \cdot i = i - (-1) = 1 + i \\ z_2 &= (3+i)(3-i) = 3^2 - i^2 = 9 - (-1) = 10 \\ z_3 &= (i+1)(i-1) = i^2 - 1^2 = -1 - 1 = -2 \\ z_4 &= i^{2004} = (i^2)^{1002} = (-1)^{1002} = 1^{501} = 1 \\ z_5 &= \frac{5+2i}{2+3i} = \frac{(5+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10 - 2 \cdot (-3) - 15i + 4i}{2^2 + 3^2} = \frac{16}{13} - \frac{11}{13}i \\ z_6 &= \frac{4+i}{2-i} = \frac{(4+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{8 - 1 + 4i + 2i}{2^2 + 1^2} = \frac{7}{5} + \frac{6}{5}i \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie für $z = \sqrt{3} + i$ die Potenzen $z^2, z^3, z^4, z^{16}, z^{256}$ und z^{2004} sowie den Betrag!

Lösung:

$$\begin{aligned} z^2 &= (\sqrt{3} + i)^2 = (\sqrt{3})^2 + i^2 + 2\sqrt{3}i = 2 + 2\sqrt{3}i \\ z^3 &= z^2 \cdot z = (2 + 2\sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2i + 2\sqrt{3}\sqrt{3}i = 8i \\ z^4 &= z^3 \cdot z = 8i \cdot (\sqrt{3} + i) = 8\sqrt{3}i - 8i^2 = -8 + 8\sqrt{3}i \\ z^{16} &= z^{15} \cdot z = (z^3)^5 \cdot z = (8i)^5 \cdot (\sqrt{3} + i) = 8^5 i^5 \cdot (\sqrt{3} + i) = -2^{15} + 2^{15}\sqrt{3}i \\ z^{256} &= z^{255} \cdot z = (z^3)^{85} \cdot z = (8i)^{85} \cdot (\sqrt{3} + i) = 2^{255} i \cdot (\sqrt{3} + i) = -2^{255} + 2^{255}\sqrt{3}i \\ z^{2004} &= (z^3)^{668} = (8i)^{668} = 2^{2004} \cdot i^{668} = 2^{2004} \end{aligned}$$

= 183700911243880723877253312188429117443570832334191232076422837892122601822779250217065
517810641003186951354342237994043751539033738088853028149016986664509662607982632499648
001102046637184071794286283184101577991650584741834221382315707241664746166353447994493
059838094311407368997298639257862755152532290150670254375133608963807175692662494241495
64240686404346730601328835213011578050066818028613307530558392634269003234847773446467
455765093202465423094243347072887932453743475262656131131546608932408608680933961624845
3580582710912872142644412542122002806968460813165484333087447260194957618384470016

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - i^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

c) Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = -1$!

Lösung: Aus der vorigen Aufgabe wissen wir, daß für $z_0 = (\sqrt{3} + i)$ gilt $z_0^3 = 8i$, also $(z_0^2)^3 = z_0^6 = -64 = -4^3$. Somit hat $\frac{1}{4}z_0^2 = \frac{2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ dritte Potenz -1 .

d) Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = 1$!

Lösung: Da $(-z)^3 = -z^3$ für jede komplexe Zahl z , können wir einfach $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ setzen.

e) Zeigen Sie: Für eine komplexe Zahl vom Betrag eins ist $\frac{1}{z} = \bar{z}$!

Lösung: $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1^2 = 1$

f) *Richtig oder falsch:* Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$.

Lösung: *Richtig*, denn für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ ist

$$\overline{z+w} = \overline{(x+u) + i(y+v)} = (x+u) - i(y+v) = (x-iy) + (u-iv) = \bar{z} + \bar{w}.$$

g) *Richtig oder falsch:* Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

Lösung: *Richtig*, denn für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ ist

$$\overline{zw} = \overline{(xu - yv) + i(xv + yu)} = (xu - yv) - i(xv + yu)$$

und auch

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = (x - iy)(u - iv) = (xu - yv) - i(xv + yu).$$

h) Bestimmen Sie für $f(z) = \sum_{k=0}^n z^k$ Realteil und Imaginärteil von $f(ix)$ für $x \in \mathbb{R}$!

Lösung: Für gerade $k = 2\ell$ ist $(ix)^k = i^k x^k = (-1)^\ell x^k$, für ungerade $k = 2\ell + 1$ ist $(ix)^k = i^k x^k = i \cdot (-1)^\ell x^k$. Somit ist

$$f(ix) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^\ell x^{2\ell} + i \sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^\ell x^{2\ell+1}.$$

i) Welche der folgenden Mengen sind, mit der üblichen Addition und Multiplikation komplexer Zahlen bzw. reeller Funktionen, Körper?

$$k_1 = \mathbb{N}_0, \quad k_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad k_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \quad k_4 = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für alle } x\},$$

$$k_5 = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad k_6 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad k_7 = \{a + b\sqrt[3]{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Lösung: k_1 ist kein Körper, da beispielsweise das Element zwei weder ein additives noch ein multiplikatives Inverses hat. k_2 ist schon deshalb keiner, weil die Null und die Eins beide rational sind; in k_3 gibt es keine additiven Inversen. Auch k_4 ist schon deshalb kein Körper, weil diese Menge kein Nullelement enthält.

k_5 ist ein Körper, denn $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$ und $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ liegen wieder in k_5 , genau wie für $(a, b) \neq (0, 0)$ auch

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}.$$

Aus demselben Grund ist auch k_6 ein Körper: $(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2}$ und $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$ liegen wieder in k_6 , genau wie für $(a, b) \neq (0, 0)$ auch

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2},$$

denn wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ kann der Nenner dann nicht verschwinden.

k_7 schließlich ist kein Körper, denn beispielsweise liegt $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}$ nicht in k_7 . (Das ist allerdings schon im wesentlichen die einzige Ausnahme:

$k_8 = \{a + b\sqrt[3]{3} + c(\sqrt[3]{3})^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ ist ein Körper!)

j) *Richtig oder falsch:* Ist k ein Körper, so wird auch $k \times k$ mit der Addition $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ und der Multiplikation $(x, y)(u, v) = (xu, yv)$ zum Körper.

Lösung: *Falsch*, denn beispielsweise haben $(1, 0)$ und $(0, 1)$ keine multiplikativen Inversen.

k) Bestimmen Sie den Wert des Polynoms $f(x) = x^{10} + x^5 + x^3 + 1$ für alle $x \in \mathbb{F}_2$!

Lösung: Für $x = 0$ erhalten wir $f(0) = 1$, für $x = 1$ ist $f(1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 0$.

l) Was ändert sich, wenn in der Definition von f eines der Pluszeichen durch ein Minuszeichen ersetzt wird?

Lösung: *Nichts*, denn jedes Element von \mathbb{F}_2 ist sein eigenes Negatives: $0 + 0 = 1 + 1 = 0$.

m) Welche der folgenden Mengen sind \mathbb{R} -Vektorräume?

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ x+2 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}, \quad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \right\},$$

$$V_5 = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 0\}, \quad V_6 = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 2\}$$

($C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist die Menge aller stetig differenzierbarer Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} .)

Lösung: V_1 ist eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R}^3 , und für zwei reelle Zahlen λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u \\ u+v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu u \\ \lambda(x+y) + \mu(u+v) \\ \lambda y + \mu v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu u \\ (\lambda x + \mu u) + (\lambda y + \mu v) \\ \lambda y + \mu v \end{pmatrix} \in V_1,$$

V_1 ist also Untervektorraum von \mathbb{R}^3 und damit insbesondere selbst ein \mathbb{R} -Vektorraum.

V_2 und V_3 sind keine Vektorräume; beispielsweise enthalten beide keinen Nullvektor. (Es gibt auch sonst noch viele Eigenschaften, die nicht erfüllt sind.)

Auch V_4 ist *kein* Vektorraum: Beispielsweise liegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beide in V_4 , nicht aber ihre Summe $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

V_5 ist Teilmenge des Vektorraums $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, und für $f, g \in V_5$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ liegt auch $\lambda f + \mu g$ in V_5 , denn $(\lambda f + \mu g)'(2) = \lambda f'(2) + \mu g'(2) = 0 + 0 = 0$. Genauso sieht man, daß V_6 *kein* Vektorraum ist: Für $f, g \in V_6$ ist $(f + g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 2 + 2 = 4$, d.h. $f + g \notin V_6$.

n) Bestimmen Sie alle Elemente der folgenden Mengen und geben Sie an, welche dieser Mengen ein \mathbb{F}_2 -Vektorraum ist!

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{F}_2 \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{F}_2, x(y+z) = 0 \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ xy \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{F}_2 \right\}, \quad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{F}_2, x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}$$

Lösung: V_1 ist aus demselben Grund wie bei der vorigen Aufgabe ein Untervektorraum. Als Menge ist

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Bedingung $x(y+z) = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn $x = 0$ oder $y+z = 0$ ist. In \mathbb{F}_2 ist $y+z = 0$ äquivalent zu $y = z$. Daher ist

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

und das ist kein Vektorraum, da beispielsweise die Summe

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nicht in V_2 liegt.

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist kein Vektorraum, da beispielsweise die Summe

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nicht in V_3 liegt. Da jedes der beiden Elemente von \mathbb{F}_2 gleich seinem Quadrat ist, können wir die Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ vereinfachen zu $x + y + z = 0$ oder auch $z = x + y$. Da diese Bedingung bei der Addition und bei der Multiplikation mit einem Skalar erhalten bleibt, ist

$$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ein Vektorraum.

- o) Richtig oder falsch:* Ist k ein Körper und V ein k -Vektorraum, so wird auch $V \times V$ zu einem k -Vektorraum mit Vektoraddition $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{w}, \vec{z}) = (\vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{z})$ und Skalarmultiplikation $\lambda(\vec{u}, \vec{v}) = (\lambda\vec{u}, \lambda\vec{v})$.

Lösung: *Richtig:* Alle Vektorraumaxiome können einfach komponentenweise nachgerechnet werden.