WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

23. Juli 2004

14. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Ein konservatives Vektorfeld ist quellenfrei.

Lösung: *Falsch;* ist etwa $\vec{V}(x, y, z) = \operatorname{grad} \varphi(x, y, z)$ mit $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, so ist $\operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) = \Delta\varphi(x, y, z) - 6$.

2) Richtig oder falsch: Falls ein Vektorfeld $\vec{V}$ mit antisymmetrischer JACOBI-Matrix über der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Stammfunktion hat, ist es dort konstant.

3) Richtig oder falsch: Falls für zwei Vektorfelder $\vec{V}$ und $\vec{W}$ auf $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Kurve γ in U gilt $\int_\gamma \vec{V} \cdot d\vec{x} = \int_\gamma \vec{W} \cdot d\vec{x}$, so ist $\vec{V}(\boldsymbol{x}) = \vec{W}(\boldsymbol{x})$ für alle Kurvenpunkte $\boldsymbol{x} = \gamma(t)$.

4) Was ist das (dreidimensionale) Volumen von $Z = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 100,\ |z| \leq 1\right\}$?

Lösung: Z ist ein Zylinder mit Grundkreisdurchmesser zehn und Höhe eins, hat also das Volumen $\pi r^2 h = 10\pi$.

5) Richtig oder falsch: Das Vektorfeld $\vec{V}(x, y) = \binom{y/(x^2+y^2)}{-x/(x^2+y^2)}$ hat eine Stammfunktion.

Lösung: *Falsch,* denn die Ableitung der ersten Komponente nach y ist $2xy/(x^2 + y^2)^2$, die der zweiten nach x aber das negative davon. (Falls es eine Stammfunktion F gäbe, müßte beides gleich F_{xy} sein.)

6) Richtig oder falsch: $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \geq 1\right\}$ ist einfach zusammenhängend.

Lösung: *Falsch:* Das ist das Äußere einer Kreisscheibe, im Innern gibt es also ein Loch. Besser ausgedrückt: Ein Kreis um den Nullpunkt, der im Gebiet liegt, läßt sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen.

7) Richtig oder falsch: Die Oberfläche einer Kugel ist einfach zusammenhängend.

Lösung: *Richtig,* denn dort hat jede geschlossene Kurve eine Innenfläche, in der sie sich auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

8) Richtig oder falsch: Die Oberfläche eines Torus ist einfach zusammenhängend.

Lösung: *Falsch,* beispielsweise lassen sich die Kreise, die durch einen Querschnitt durch den Schlauch definiert sind, nicht zusammenziehen. (Die Kreise entlang des Schlauches auch nicht.)

Aufgabe 1: **(***5 Punkte***)**

a) Ein Massenpunkt läuft im ebenen Kraftfeld $\vec{F}(\boldsymbol{x}) = \binom{-y}{x}$ auf einem der beiden Bogen des Einheitskreises von $(-1, 0)$ nach $(0, 1)$. Berechnen Sie die Arbeit $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\boldsymbol{x}$ für beide Möglichkeiten!

b) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \binom{y^2}{x^2}$ längs des Dreiecks mit Ecken $(1,0)$, $(1,1)$ und $(0,0)$!

Lösung: Zunächst müssen wir die drei Seiten des Dreiecks Δ als Kurvenstücke darstellen und die Tangentenvektoren dieser Kurvenstücke bestimmen:

$$\gamma_1\colon \begin{cases} [0,\,1] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (1,t) \end{cases} \qquad \text{führt von } (1,0) \text{ nach } (1,1)\,, \qquad \dot\gamma_1(t) = \binom{0}{1}$$

$$\gamma_2\colon \begin{cases} [0,\,1] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (1-t,1-t) \end{cases} \qquad \text{führt von } (1,1) \text{ nach } (0,0)\,, \qquad \dot\gamma_2(t) = \binom{-1}{-1}$$

$$\gamma_3\colon \begin{cases} [0,\,1] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (t,0) \end{cases} \qquad \text{führt von } (0,0) \text{ nach } (1,0)\,, \qquad \dot\gamma_3(t) = \binom{1}{0}$$

Damit ist

$$\int_{\gamma_1} V(x,y)\,ds = \int_0^1 V\big(\gamma_1(t)\big)\dot\gamma_1(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 dt = 1\,,$$

$$\int_{\gamma_2} V(x,y)\,ds = \int_0^1 V\big(\gamma_2(t)\big)\dot\gamma_2(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ (1-t)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt = -2\int_0^1 (1-t)^2\,dt = \frac{2}{3}(1-t)^3\,\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}\,,$$

$$\int_{\gamma_3} V(x,y)\,ds = \int_0^3 V\big(\gamma_3(t)\big)\dot\gamma_3(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 0\,dt = 0\,,$$

und

$$\int_\Delta V(x,y)\,ds = \int_{\gamma_1} V(x,y)\,ds + \int_{\gamma_2} V(x,y)\,ds + \int_{\gamma_3} V(x,y)\,ds = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

c) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{W}(x,y) = \binom{x^2y}{xy^2}$ längs der beiden Teilbögen des Einheitskreises, die den Punkt $(1,0)$ mit $(0,1)$ verbinden!

Lösung: Die übliche Parametrisierung

$$\gamma(t) = \big(\cos t,\, \sin t\big)$$

des Einheitskreises durchläuft diesen im mathematisch positiven Sinn, dem Gegenuhrzeigersinn also; um vom Punkt $(1,0)$ zu $(0,1)$ zu kommen, müssen wir das Parameterintervall von 0 bis $\pi/2$ betrachten. Somit ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{W}(x,y)\,ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{W}(\cos t, \sin t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos^2 t\, \sin t \\ \cos t\, \sin^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 t\, \sin^2 t + \cos^2 t\, \sin^2 t)\,dt = 0\,.\end{aligned}$$

Für den Uhrzeigersinn:
Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen können wir den Kreisbogen im Uhrzeigersinn durchlaufen, indem wir einfach den Parameter t durch $-t$ ersetzen; wir betrachten also das Kurvenstück

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{mit Tangentenvektor} \quad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Der Punkt $(1,0)$ gehört zum Parameterwert null, und für $t = 3\pi/2$ erhalten wir den Punkt $(0,1)$; daher ist

$$\int_\gamma \vec{W}(x,y)\,ds = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \vec{W}(\cos t, -\sin t)\begin{pmatrix}-\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix} dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \begin{pmatrix}-\cos^2 t\,\sin t\\ \cos t\,\sin^2 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t\,\sin^2 t - \cos^2 t\,\sin^2 t)\,dt = 0\,.$$

e) Ist eines der Vektorfelder $\vec{F}, \vec{V}, \vec{W}$ konservativ?

Lösung: $\vec{V}$ ist nicht konservativ, da das Integral längs des (geschlossenen) Dreiecks Δ nicht verschwindet.
Für $\vec{W}$ haben die beiden Integrale aus *b)* und *c)* denselben Wert, $\vec{W}$ ist aber trotzdem nicht konservativ, denn gäbe es eine Stammfunktion Φ, so wären $\Phi_x = x^2y$ und $\Phi_y = xy^2$ die beiden Komponenten von $\vec{W}$; da diese stetig differenzierbar sind, müßte nach dem Lemma von Schwarz

$$x^2 = \frac{\partial}{\partial y}\Phi_x = \frac{\partial}{\partial x}\Phi_y = y^2$$

sein, was offensichtlich für die meisten Punkte falsch ist.

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

a) Berechnen Sie für die Kurve $\gamma\colon [0,\ell] \to \mathbb{R}^3; t \mapsto \left(t - \frac{\ell}{2}, 0, 0\right)$ das Integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{ds}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|}$ für einen festen Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, der nicht auf γ liegt.

b) Wie verhält sich das Integral, wenn $\boldsymbol{x}_0$ gegen einen Punkt auf γ geht?

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Bestimmen Sie für den Bereich $B \underset{\text{def}}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 4y^2 \le 1\right\}$ die folgenden Integrale:

$$\iint_B x\,dx\,dy, \quad \iint_B xy\,dx\,dy, \quad \iint_B \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}\,dx\,dy \quad \text{und} \quad \iint_B \sqrt{x^2 + 4y^2}\,dx\,dy$$

b) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \binom{y^2}{-x}$ nach dem Satz von Green entlang des Dreiecks mit Ecken $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$!

Lösung: Nach dem Satz von Green ist für ein ebenes Gebiet B mit Randkurve γ

$$\int_\gamma \vec{V}\,ds = \iint_B \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$$

Hier ist

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial y^2}{\partial y} = 2y\,,$$

wir müssen also $2y - 1$ über die Fläche des Dreiecks Δ mit Ecken $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$ integrieren. Dieses Dreieck ist ein Fundamentalbereich sowohl vom Typ I als auch vom Typ II; wir können es etwa darstellen als

$$\delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1 \text{ und } 0 \le y \le 1 - x\right\}.$$

Damit ist

$$\iint_{\Delta} (2y-1)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (2y-1)\,dy \right) dx = \int_0^1 (y^2-y)\Big|_0^{1-x} dx$$
$$= \int_0^1 (x^2-x)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\,,$$

und das ist nach dem Satz von GREEN auch gleich dem gesuchten Integral.

c) Berechnen Sie nach dem Satz von GAUSS das Integral $\iint_S \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O}$ mit $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x^2+y^2 = z,\ 0 \le z \le 1\big\}$!

Lösung: S ist der Mantel eines Kegels mit Spitze im Nullpunkt; nach dem Satz von GAUSS gilt für den zugehörigen Vollkegel V

$$\iint_O \vec{W}\,d\vec{O} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{W}\,dx\,dy\,dz\,,$$

wobei der Rand $O = S \cup D$ von V aus dem Mantel S und einer Kreisscheibe D besteht. Die Divergenz des Integranden ist

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} = y + z\,,$$

also ist

$$\iint_O \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O} = \iiint_V (y+z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Bezeichnen wir für festgehaltenes z mit

$$D_z = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x^2+y^2 \le z\big\}$$

den Schnitt durch V auf Höhe z, so ist

$$\iiint_V (y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} (y+z)\,dx\,dy \right) dz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} y\,dx\,dy + \iint_{D_z} z\,dx\,dy \right) dz\,.$$

Da die Kreisscheibe D_z spiegelsymmetrisch zur (x,z)-Ebene ist, verschwindet das Integral über y. Der zweite Integrand z ist konstant auf D_z, das Integral ist also gleich z mal der Fläche von D_z, d.h. πz^3. Somit ist

$$\iiint_V (y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \pi z^3\,dz = \frac{\pi}{4}\,.$$

Nach dem Satz von GAUSS ist das gleich

$$\iint_O \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O} = \iint_S \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O} + \iint_{D_1} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O}\,;$$

um daraus das Oberflächenintegral über S zu bestimmen, müssen wir also noch das über D_1 berechnen.

Der Normalenvektor auf D_1 zeigt in Richtung der posititven z-Achse, denn zur Anwendung des Satzes von GAUSS müssen die Normalenvektoren auf dem Rand nach außen zeigen. Eine mögliche Darstellung von D_1 als Flächenstück ist die Parametrisierung

$$f\colon \begin{cases} [0,1]\times[0,2\pi) \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad (r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 1) \end{cases};$$

da

$$f_r(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_\varphi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_r(r,\varphi)\times f_\varphi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

ist, liefert das die richtige Orientierung, und wegen

$$\begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = rx$$

ist

$$\iint_{D_1} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \cdot r\cos\varphi \, d\varphi \, dr = \int_0^1 r^2(\sin 2\pi - \sin 0)\, dr = 0\,.$$

(Das kann man auch ohne Rechnung durch Symmetriebetrachtungen sehen.) Damit ist

$$\iint_S \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O} = \iiint_V (y+z)\, dx\, dy\, dz - \iint_{D_1} \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ x \end{pmatrix} d\vec{O} = \frac{\pi}{4}\,.$$

W E I T E R H I N   S C H Ö N E   F E R I E N !