Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

9. Juli 2004

12. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ und $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ seien differenzierbare Abbildungen. Dann ist auch $f \circ g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar und $J_{f\circ g}(\boldsymbol{x}) = J_g(\boldsymbol{x}) \cdot J_f\big(g(\boldsymbol{x})\big)$.

2) Richtig oder falsch: Falls alle zweiten partiellen Ableitungen von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existieren und stetig sind, ist die Jacobi-Matrix von f symmetrisch.

3) Richtig oder falsch: Wenn die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ überall und zu jeder beliebigen Ordnung stetige partielle Ableitungen hat, ist sie um jeden Punkt durch eine Taylor-Reihe darstellbar.

4) Finden Sie eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$!

5) $\vec{V}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei ein mindestens zweimal differenzierbares Vektorfeld. Was ist $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V}$?

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Entscheiden Sie für die folgenden Funktionen, wo diese eindeutig in der Form $y = f(x)$ nach y aufgelöst werden können, und bestimmen Sie dort die Ableitung $y' = f'(x)$!

a) $F(x, y) = x \sin y + \cos y + \cos 2y = 0$

b) $F(x, y) = |x|^{\cos y} + e^{\sin x} = 0$

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Zeigen Sie: Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ und ein Vektorfeld $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R}^3)$ auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt:

a) $\operatorname{div}(f\vec{V}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{V} + f \operatorname{div}\vec{V}$

b) $\operatorname{rot}(f\vec{V}) = (\operatorname{grad} f) \times \vec{V} + f \operatorname{rot}\vec{V}$

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{V}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{V}) - \begin{pmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f_n\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0\} \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^n} \end{cases}$ für eine beliebige positive reelle Zahl n!

b) Was ist Δf_n?

c) Zeigen Sie: $\Delta f_n \equiv 0 \iff n = \frac{1}{2}$!

Keine Abgabe – Abgegeben wird diese Woche nur die Klausur!
Die kleinen Übungen dieser Woche dienen zur Klausurvorbereitung, daher gibt es keine Themenvorschläge zum neuen Vorlesungsstoff.