

7. Mai 2004

### 3. Übungsblatt Höhere Mathematik I

**Fragen:** (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Ist  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$  eine Basis des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $V$ , so gilt dasselbe für  $(4\vec{b}_4, 3\vec{b}_3, 2\vec{b}_2, \frac{1}{7}\vec{b}_1)$ .
- 2) *Richtig oder falsch:* Jeder Untervektorraum von  $\mathbb{Q}^n$  hat eine Basis aus ganzzahligen Vektoren.
- 3) Berechnen Sie in  $\mathbb{F}_2^{10}$  die Summe der beiden Vektoren  $\vec{v} = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$  und  $\vec{w} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ !
- 4) Finden Sie einen Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{F}_2^{10}$  mit  $\vec{v} + \vec{x} = \vec{w}$ !
- 5) *Richtig oder falsch:* Für eine ungerade Primzahl  $p$  ist die Summe aller Elemente des Körpers  $\mathbb{F}_p$  gleich Null.

**Aufgabe 1:** (4 Punkte)

- a) Welche Dimension hat der Vektorraum  $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0 \right\} \leq \mathbb{R}^3$ ?
- b) Bestimmen Sie eine Basis von  $U$ !
- c) Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis von  $\mathbb{R}^3$ !

**Aufgabe 2:** (5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie eine Basis des Untervektorraums

$$U = [\sinh t, \cosh t, \sinh^2 t, \cosh^2 t, e^{-2t}, e^{-t}, 1, e^t, e^{2t}] \leq C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})!$$

Dabei ist  $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$  und  $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ .

- b) Zeigen Sie: Das Bild der linearen Abbildung  $\varphi: U \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \mapsto \frac{df}{dt}$  liegt in  $U$ .
- c) Bestimmen Sie eine Basis des Bilds von  $\varphi$ !

**Aufgabe 3:** (6 Punkte)

- a) Stellen Sie den ggT von 2004 und 1986 als Linearkombination dieser beiden Zahlen dar!
- b) Finden Sie ganze Zahlen  $x, y$  mit  $124x + 256y = 20$ !  
Sind diese Lösungen eindeutig bestimmt?
- c) Bestimmen Sie im Körper  $\mathbb{F}_{2003}$  das multiplikative Inverse von 20!

Abgabe bis zum Freitag, dem 14. Mai 2004, um 12.00 Uhr