der erregenden Frequenz gibt, gegen die *alle* Lösungen der Differentialgleichung langfristig konvergieren.

Für allgemeinen Aussagen ist also dieser Ansatz besser geeignet; falls wir dagegen ein konkretes Anfangswertproblem lösen wollen, liefert die LAPLACE-Transformation direkt die Lösung, während wir beim Weg über die allgemeine Lösung noch ein lineares Gleichungssystem lösen müssen, um die freien Parameter der allgemeinen Lösung an vorgegebene Anfangswerte anzupassen. (Falls man freilich die inversen LAPLACE-Transformationen über Partialbruchzerlegung wirklich konkret berechnet, wird man oft auf genau dasselbe lineare Gleichungssystem stoßen, das man zur Anpassung der allgemeinen Lösung an konkrete Anfangsbedingungen lösen muß.)

Falls man einigermaßen konkrete Erwartungen über das Verhalten zumindest einer Lösungsfunktion hat, ist das Erraten einer speziellen Lösung also oft erfolgversprechend. Das in §1*c)* behandelte Beispiel der Resonanzkatastrophe zeigt aber, daß es auch Fälle gibt, wo man nur mit ziemlicher Erfahrung eine spezielle Lösung erraten kann: Die Gleichung

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \cos \omega_0 t$$

hat schließlich *keine* Lösung, die eine reine Schwingung der Frequenz ω_0 ist.

Zum Glück gibt es außer LAPLACE-Transformation und Erraten noch ein drittes, rein formales Verfahren, das ebenfalls häufig zum Ziel führt, die bereits von den linearen Differentialgleichung erster Ordnung her bekannte *Variation der Konstanten.* Diese werden wir, in einem leicht allgemeineren Zusammenhang, im nächsten Abschnitt betrachten.

e) Symmetriebetrachtungen

Viele Systeme haben eine natürliche oder konstruktionsbedingte Symmetrie; wenn man diese Symmetrie erkennt, hat man gleich zwei Werkzeuge in der Hand:

Einmal hat man eine Struktur des Lösungsraums erkannt und kann via Symmetrie eventuell aus einfachen, leicht erkennbaren Lösungen kom-

plizierte konstruieren. Dieser Aspekt spielt bei den linearen Differentialgleichungen, die wir hier betrachten, keine nennenswerte Rolle: Hier hat der Lösungsraum schließlich immer eine einfache Struktur als affiner Raum oder (im homogenen Fall) sogar Vektorraum – was andererseits natürlich gerade ein sehr einfacher Fall des gerade Gesagten ist.

Zum anderen kann man eventuell versuchen, die Symmetrie der Differentialgleichung durch Koordinatentransformationen auf eine *bekannte* Symmetrie zurückzuführen, die zu einem bekannten Typus von Differentialgleichungen gehört, von denen man weiß, wie sie gelöst werden können.

In diesem Abschnitt soll diese sehr vage Bemerkung anhand einiger konkreter Beispiele erläutert werden.

Die unproblematischste aller Differentialgleichungen ist

$$\dot{y}(t) = f(t)\,;$$

einfache Integration führt auf die Lösung

$$y(t) = \int f(t)\,dt + C\,. \tag{$*$}$$

(Tatsächlich kann diese Integration alles andere als „einfach“ sein, aber wenn es um Lösungsformeln für Differentialgleichungen geht, wollen wir ein Problem auch dann als „gelöst“ betrachten, wenn die Formel noch Integrale enthält; das Auffinden von Stammfunktionen ist ein getrenntes Problem und hat seine eigenen Methoden.)

Wenn wir $(*)$ unter Symmetriegesichtspunkten betrachten, sehen wir, daß mit jeder Lösung $y(t)$ auch $y(t) + C$ eine Lösung ist.

Falls umgekehrt eine Differentialgleichung die Eigenschaft hat, daß mit $y(t)$ auch $y(t) + C$ für jede Konstante C eine Lösung ist, haben alle Lösungen dieselbe Ableitung, die Differentialgleichung läßt sich also auf die Form

$$\dot{y}(t) = f(t)$$

bringen. Somit sind die Differentialgleichungen, die durch eine einfache Integration gelöst werden können, dadurch charakterisiert, daß mit jeder

Lösungsfunktion $y(t)$ und jede Konstante C auch $y(t) + C$ eine Lösung ist.

Dies können wir dadurch ausnutzen, daß wir eine gegebene Differentialgleichung, in der wir eine Symmetrie erkennen können, so umformen, daß diese Symmetrie transformiert wird in die Addition einer Konstanten.

Ein Beispiel dafür kennen wir bereits, auch wenn wir damals anders vorgegangen sind: Die lineare homogene Differentialgleichung

$$\dot y(t) = f(t)y(t)$$

hat mit $y(t)$ auch jedes Vielfache $Cy(t)$ als Lösung. Die Modifikation, die aus Multiplikationen Additionen macht, ist der Logarithmus; wir müssen also schauen, welcher Differentialgleichung die Funktion

$$z(t) = \ln y(t)$$

genügt. Nach der Kettenregel ist

$$\dot z(t) = \frac{\dot y(t)}{y(t)}\,;$$

somit folgt aus der Ausgangsleichung, daß

$$\dot z(t) = f(t)$$

ist, und das läßt sich in der Tat durch direkte Integration lösen:

$$z(t) = \int f(t)\,dt + C \quad \text{und} \quad y(t) = e^{\int f(t)\,dt}\,.$$

Auch die Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot y(t) = f(t)y(t) + g(t)\,,$$

die in §1*d)* einfach vom Himmel gefallen war, läßt sich leicht aus Symmetriebetrachtungen herleiten: Ist $y(t)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung und $u(t)$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$\dot u(t) = f(t)u(t)\,,$$

so ist für jede Konstante C auch

$$y(t) + Cu(t)$$

eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

Auch hier gibt es eine offensichtliche Modifikation, die aus $y(t)$ eine Funktion macht, die bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, nämlich

$$z(t) = \frac{y(t)}{u(t)}\,.$$

Für diese Funktion ist

$$\begin{aligned}\dot z(t) &= \frac{u(t)\dot y(t) - y(t)\dot u(t)}{u(t)^2} = \frac{\dot y(t)}{u(t)} - \frac{y(t)}{u(t)}\frac{\dot u(t)}{u(t)}\\ &= \frac{f(t)y(t)+g(t)}{u(t)} - z(t)f(t) = f(t)z(t) + \frac{g(t)}{u(t)} - z(t)f(t)\\ &= \frac{g(t)}{u(t)}\,,\end{aligned}$$

wobei wir endgültige rechte Seite nach Lösung der homogenen Differentialgleichung kennen: Wegen

$$u(t) = e^{\int f(t)\,dt}$$

ist

$$\frac{g(t)}{u(t)} = e^{-\int f(t)\,dt} \quad \text{und} \quad y(t) = u(t)z(t) = e^{\int f(t)\,dt} \int e^{-\int^t f(\tau)\,d\tau}\,dt\,.$$

Diese Methode der Variation der Konstanten kann gelegentlich auch dann mit Erfolg angewandt werden, wenn man die ihrer Ableitung zugrundeliegende Symmetrie nicht direkt sieht: Ohne eine solche Symmetrie verliert die Methode zwar ihre Erfolgsgarantie, aber als Ansatz der *vielleicht* zum Erfolg führen kann, taugt sie allemal, und die Auflösung von Differentialgleichungen ist nunmal oft mehr Kunst als Wissenschaft.

Betrachten wir als Beispiel die Differentialgleichung

$$\ddot y(t) - y(t) = 6\sinh t\,.$$

Erraten einer speziellen Lösung nach dem Motto, daß diese so ähnlich aussehen sollte wie die rechte Seite, legt hier einen Ansatz der Form

$$y(t) = a\cosh t + b\sinh t\,,$$

nahe, aber der führt offensichtlich nicht zum Erfolg: Für jede solche Funktion die linke Seite identisch null ist.

Probieren wir es also mit Variation der Konstanten: Der obige Ansatz ist gleichzeitig die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (und konnte genau deshalb auch unmöglich zu einer Lösung der inhomogenen Gleichung führen); Variation der Konstanten macht daraus den Ansatz

$$y(t) = a(t)\cosh t + b(t)\sinh t\,.$$

Differenzieren führt auf

$$\dot y(t) = \dot a(t)\cosh t + a(t)\sinh t + \dot b(t)\sinh t + b(t)\cosh t$$

und

$$\begin{aligned}\ddot y(t) = \ddot a(t)\cosh t + 2\dot a(t)\sinh t + a(t)\cosh t\\ + \ddot b(t)\sinh t + 2\dot b(t)\cosh t + b(t)\sinh t\,;\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\big(\ddot a(t) + 2\dot b(t)\big)\cosh t + \big(\ddot b(t) + 2\dot a(t)\big)\sinh t = 6\sinh t\,.$$

Das sieht nicht gerade sehr vielversprechend aus: Diese Differentialgleichung ist eher komplizierter als die ursprüngliche.

Zum Glück brauchen wir aber nicht die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung, sondern nur *irgendeine* Lösung. Daher können wir versuchsweise umformen auf neue Gleichungen, die zwar nicht äquivalent sind zur obigen, deren Lösungen – so wir welche finden können – aber zu Lösungen dieser Differentialgleichung führen.

Ein offensichtlicher Kandidat für einen Ansatz ist das System

$$\ddot a(t) + 2\dot b(t) = 0 \quad \text{und} \quad \ddot b(t) + 2\dot a(t) = 6\,.$$

Dieses System können wir auffassen als lineares Differentialgleichungssystem für die Ableitungen $\dot a(t)$ und $\dot b(t)$ und somit nach den allgemeinen Methoden, die wir bereits entwickelt haben, lösen.

Da wir nur eine Lösung suchen, können wir uns diese Mühe allerdings sparen, indem wir heutistisch vorgehen und versuchen, eine spezielle einfache Lösung zu erraten.

Die einfachste Lösung der ersten Gleichung

$$\ddot a(t) + 2\dot b(t) = 0$$

ist natürlich $a(t) = b(t) = 0$, aber damit können wir nicht die zweite Gleichung lösen. Tatsächlich genügt es aber für eine Lösung der ersten Gleichung bereits, daß

$$\ddot a(t) = \dot b(t) = 0$$

ist, und wenn wir dies in die zweite Gleichung

$$\ddot b(t) + 2\dot a(t) = 6$$

einsetzen, folgt, daß $\dot a(t) = 3$ sein muß.

Eine Lösung davon ist $a(t) = 3t$ und $b(t) = 0$; damit erhalten wir die spezielle Lösung

$$y(t) = 3t\cosh t\,.$$

Die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung ist daher

$$y(t) = 3t\cosh t + a\cosh t + b\sinh t$$

mit zwei beliebigen Konstanten a und b.

Dieser Lösungsweg sieht sehr nach Trickserei und Glück aus; wenn wir die Gleichung aber umschreiben in ein nichthomogenes lineares Differentialgleichungssystem, können wir die Variation der Konstanten wieder durch Symmetriebetrachtungen rechtfertigen und erhalten ein Verfahren, das (wenn wir Stammfunktionen finden können) stets zu einer Lösung führt.

Wir betrachten dazu gleich das allgemeine System

$$\dot{\vec y}(t) = A\vec y(t) + \vec b(t)$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und einem Vektor $\vec b(t)$ von Funktionen $b_i(t)$.

Bei der Suche nach Symmetrien dieses Systems können wir genauso vorgehen wie im eindimensionalen Fall: Ist $\vec u(t)$ eine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{\vec u}(t) = A\vec u(t)$$

und $\vec{y}(t)$ eine Lösung des inhomogenen Systems, so ist mit

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

auch

$$\begin{pmatrix} y_1(t) + C_1 u_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) + C_n u_n(t) \end{pmatrix}$$

für beliebige Konstanten $C_1, \dots, C_n$ eine Lösung.

Beim System $\dot{\vec{y}}(t) = \vec{g}(t)$ ist mit $\vec{y}(t)$ auch $\vec{y}(t)+\vec{C}$ für jeden Vektor $\vec{C}$ von Konstanten eine Lösung und umgekehrt kann jedes System mit dieser Eigenschaft auf die Form $\dot{\vec{y}}(t) = \vec{g}(t)$ gebracht werden. Auch läßt sich, wie im Eindimensionalen, die Lösung auf Integrationen zurückführen: Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{y}(t) = \int g(t)\,dt + \vec{C}\,,$$

wobei das Integral über die vektorwertige Funktion $\vec{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ einfach als Abkürzung dafür steht, daß wir jede der Komponenten g_i von $\vec{g}$ einzeln integrieren und die n Ergebnisse wieder zu einem Vektor zusammenfassen.

Für unser ursprüngliches Problem, die Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$ bedeutet dies, daß wir den Vektor

$$\vec{z}(t) \quad \text{mit} \quad z_i(t) = \frac{y_i(t)}{u_i(t)}$$

betrachten sollten, denn der ist wohlbestimmt bis auf die Addition eines konstanten Vektors.

Die Lösungsmenge des homogenen Systems $\dot{\vec{u}}(t) = A\vec{u}(t)$ besteht aus den Funktionen $e^{At}\vec{C}$ mit einem beliebigen Vektor $\vec{C} \in \mathbb{C}^n$; der Lösungsvektor $\vec{y}(t)$ des inhomogenen Systems entsteht daraus durch komponentenweise Multiplikation mit dem noch zu bestimmenden Vektor $\vec{z}(t)$, von dem wir aber immerhin schon wissen, daß er direkt durch Integration einer vektorwertigen Funktion bestimmt werden kann.

Komponentenweise Multiplikation ist keine übliche Vektoroperation; wenn wir mit Vektoren und Matrizen arbeiten wollen, sollten wir sie also möglichst schnell eliminieren.

Für eine Matrix M und zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zeigt die Multiplikationsformel sofort, daß $M\vec{v}$ komponentenweise multipliziert mit $\vec{w}$ das Gleiche ist wie M multipliziert mit dem komponentenweisen Produkt der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$. In unserem Fall interessiert das komponentenweise Produkt $\vec{y}(t)$ von $\vec{u}(t) = e^{At}\vec{C}$ mit $\vec{z}(t)$, wobei die Wahl eines Konstantenvektors $\vec{C}$ uns überlassen bleibt.

Speziell für den Vektor $\vec{C}$, dessen Komponenten allesamt Einsen sind, ist das komponentenweise Produkt von $\vec{C}$ mit einem beliebigen Vektor $\vec{v}$ gleich $\vec{v}$, also ist für diese Wahl von $\vec{C}$

$$\vec{y}(t) = e^{At}\vec{z}(t)\,.$$

Damit können wir auch hier die Gleichung durch Variation der Konstanten lösen: Wir ersetzen einfach den konstanten Vektor $\vec{C}$ durch eine vektorwertige Funktion $\vec{z}(t)$ und müssen nun diese durch Integration bestimmen.

Da die LEIBNIZsche Produktregel auch für matrixwertige Funktionen gilt, ist

$$\dot{\vec{y}}(t) = Ae^{At}\vec{z}(t) + e^{At}\dot{\vec{z}}(t) = A\vec{y}(t) + e^{At}\dot{\vec{z}}(t)\,;$$

$\vec{y}(t)$ erfüllt also genau dann die Differentialgleichung

$$\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t)\,,$$

wenn

$$\vec{b}(t) = e^{At}\dot{\vec{z}}(t) \quad \text{oder} \quad \dot{\vec{z}}(t) = e^{-At}\vec{b}(t)$$

ist. Damit können wir die Komponenten von $\vec{z}(t)$ als Stammfunktionen der Komponenten des ganz rechts stehenden Vektors von Funktionen berechnen.

Zur Vereinfachung der Schreibweise vereinbaren wir, daß für eine vektorwertige Funktion $\vec{v}(t)$ gelten soll

$$\int \vec{v}(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int v_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int v_n(t)\,dt \end{pmatrix} \quad \text{falls} \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix}\;;$$

dann ist

$$\vec{z}(t) = \int e^{-At}\vec{b}(t)\,dt\,,$$

und wir haben eine spezielle Lösung gefunden. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist daher

$$\vec{y}(t) = e^{At}\left(\int e^{-At}\vec{b}(t)\,dt\right) + e^{At}\vec{y}_0$$

mit einem beliebigen konstanten Vektor $\vec{y}_0$.

Zur Anwendung dieser Formel auf das obige Beispiel müssen wir die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) - y(t) = 6\sinh t$$

umschreiben in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung, also in

$$\dot{y}(t) = z(t)$$
$$\dot{z}(t) = y(t) + 6\sinh t\,.$$

Hier ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6\sinh t \end{pmatrix}\;;$$

wir müssen zunächst die Matrix e^{At} berechnen.

Wie wir bereits zu Beginn von §1*e)* gesehen haben, ist A^2 die Einheitsmatrix und somit

$$e^A = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}\;;$$

im wesentlichen die gleiche Rechnung zeigt, daß

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

ist und

$$e^{-At} = \begin{pmatrix} \cosh(-t) & \sinh(-t) \\ \sinh(-t) & \cosh(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}\,.$$

Wir brauchen die Funktion

$$e^{-At}\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6\sinh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sinh^2 t \\ 6\sinh t\cosh t \end{pmatrix}$$

und müssen diese integrieren.

Beginnen wir mit dem ersten Eintrag:

$$\begin{aligned}
\int -6\sinh^2 t\,dt &= -6\int\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 dt = -\frac{3}{2}\int(e^{2t} + e^{-2t} - 2)\,dt \\
&= -\frac{3}{2}\left(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - 2t\right) + C \\
&= -\frac{3}{4}(e^t - e^{-t})(e^t + e^{-t}) + 3t + C' \\
&= -3\sinh t\cosh t + 3t + C'\,.
\end{aligned}$$

Genauso finden wir auch eine Stammfunktion des zweiten Eintrags:

$$\begin{aligned}
\int 6\sinh t\cosh t\,dt &= \frac{3}{2}\int(e^{2t} - e^{-2t})\,dt \\
&= \frac{3}{4}\left(e^{2t} + e^{-2t}\right) + C \\
&= \frac{3}{4}\left(e^{2t} + 2 + e^{-2t}\right) + C - \frac{3}{2} \\
&= 3\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 + C' = 3\cosh^2 t + C'\,.
\end{aligned}$$

Da wir nur eine spezielle Lösung brauchen, können wir die beiden Integrationskonstanten unbesorgt auf null setzen; jede andere Wahl würde nur bedeuten, daß wir eine Lösung der homogenen Gleichung dazuaddieren. Also arbeiten wir mit

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} -3\sinh t\cosh t + 3t \\ 3\cosh^2 t \end{pmatrix}$$

und die gesuchte spezielle Lösung ist

$$e^{At}\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3\sinh t\cosh t + 3t \\ 3\cosh^2 t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3\sinh t\cosh^2 t + 3t\cosh t + 3\cosh^2 t\sinh t \\ -3\sinh^2 t\cosh t + 3t\cosh t + 3\cosh^3 t \end{pmatrix}.$$

In der ersten Zeile dieses Ergebnisses heben sich der erste und der dritte Term gegenseitig weg; in der zweiten ist

$$3\cosh^3 t - 3\sinh^2 t\cosh t = 3\cosh t(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = 3\cosh t\,.$$

Als Endergebnis erhalten wir somit die spezielle Lösung

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{At}\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 3t\cosh t \\ 3t\sinh t + 3\cosh t \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist

$$y(t) = 3t\cosh t$$

eine spezielle Lösung der Ausgangsgleichung

$$\ddot{y}(t) - y(t) = 6\sinh t\,,$$

und die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$y(t) = 3t\cosh t + a\cosh t + b\sinh t$$

mit beliebigen Konstanten a, b aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ – je nachdem, über welchem der beiden Körper wir das Problem betrachten.

Die Beispiele aus diesem Abschnitt zeigen nur einen winzigen Ausschnitt der Möglichkeiten, wie Symmetriebetrachtungen zu Lösungen von Differentialgleichungen führen können; ihre volle Nützlichkeit entfalten sie erst bei nichtlinearen Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen. Im Rahmen dieser Vorlesung bleibt keine Zeit, näher darauf einzugehen; eine ausführliche Darstellung von Symmetriemethoden findet man etwa bei

G.W. BLUMAN, S. KUMEI: Symmetries and Differential Equations, *Springer,* 1989

Symmetriemethoden zur Lösung von Differentialgleichungen wurden ab etwa 1880 von dem norwegischen Mathematiker SOPHUS LIE (1842–1899) eingeführt. Insbesondere zeigte LIE auch, daß man nicht wirklich die (schwer bestimmbaren) Symmetrien eines Systems bestimmen muß, sondern daß bereits die mit linearer Algebra bestimmbaren sogenannten *infinitesimalen* Symmetrien ausreichen können, um Lösungen zu finden. Mit diesem Ansatz arbeiten auch die heutigen Computeralgebrasysteme; ein einfaches Beispiel dazu wird uns im nächsten Paragraphen bei der Suche nach integrierenden Faktoren begegnen.

Ausgebaut wurde die Methode von EMMY NOETHER (1882–1935), der Tochter des Mannheimer Mathematikers MAX NOETHER (1844-1921). Sie brachte Symmetrien mit den in den Naturwissenschaften allgegenwärtigen Erhaltungssätzen in Verbindung und bereitete damit auch EINSTEINs Relativitätstheorie vor. Bekannter ist sie allerdings als Mitbegründerin der modernen abstrakten Algebra. Nur dank der massiven Intervention HILBERTs durfte sie sich nach langem Kampf 1919 in Göttingen als erste Frau in Mathematik habilitieren. 1933 wurde sie als Jüdin von der Universität Göttingen entlassen und emigrierte nach USA, wo sie am Bryn Mawr College und dem Institute for Advanced Study in Princeton arbeitete.

§4: Nichtlineare Differentialgleichungen

Lineare Differentialgleichungen spielen vor allem deshalb eine so große Rolle in den Anwendungen, weil es dafür (wie wir im letzten Paragraphen gesehen haben) eine gut ausgebaute Lösungstheorie gibt. Oft werden deshalb sogar ihrem Wesen nach nichtlineare Probleme in einer linearen Approximation betrachtet um so wenigstens zu einem ungefähren Verständnis der Dynamik eines Systems zu gelangen.

Nichtlineare Differentialgleichungen können nur selten explizit in geschlossener Form gelöst werden; trotzdem lohnt sich die Suche nach einer Lösungsformel, denn eine solche Formel gestattet erstens bessere theoretische Aussagen über das Verhalten der Lösungen und zweitens kann eine einmal gefundene Lösungsformel immer wieder auf Systeme mit anderen Anfangswerten und/oder Parametern angewandt werden, wohingegen eine numerische Lösung für jede Konstellation von Anfangswerten neu berechnet werden muß. Auch ist die Auswertung einer expliziten Lösungsformel zwar keinesfalls *immer* einfacher (oder numerisch stabiler) als eine direkte numerische Lösung, aber doch meistens.

Dieser Paragraph soll anhand einiger einfacher Beispiele und Sätze einen ersten Überblick über das sehr weite Gebiet der nichtlinearen Differentialgleichungen geben.

a) Eindeutigkeitsfragen

Wir hatten Differentialgleichungen eingeführt, um aus dem gegenwärtigen Zustand eines Systems Folgerungen über die künftige Entwicklung zu ziehen. Dies ist natürlich nur dann möglich, wenn das zugehörige Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist. Bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist das, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, immer der Fall; in diesem Abschnitt wollen wir uns überlegen, welche Probleme im nichtlinearen Fall auftreten können.

Betrachten wir als erstes die Differentialgleichung

$$\dot y(t) = \frac{1}{2y(t)}\,,$$

wobei wir uns hier wie bei allen Beispielen in diesem Abschnitt der Einfachheit halber auf *reelle* Lösungsfunktionen beschränken wollen.

Multiplikation beider Seiten mit $2y(t)$ führt auf

$$2\dot y(t)y(t) = 1\,,$$

die Ableitung von $y(t)^2$ ist also gleich 1. Damit ist

$$y(t)^2 = t + C \quad \text{oder} \quad y(t) = \pm\sqrt{t+C}$$

mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Fordern wir noch, daß $y(0) = 0$ sein soll, so hat das entsprechende Anfangswertproblem die beiden Lösungen

$$y(t) = \sqrt{t} \quad \text{und} \quad y(t) = -\sqrt{t}\,,$$

von denen die eine für $t \to \infty$ gegen $+\infty$ geht, die andere gegen $-\infty$.

Als zweites Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot y(t) = 2\sqrt{|y(t)|} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0\,.$$

Es hat natürlich die Nullfunktion als Lösung, aber auch die stetig differenzierbare Funktion

$$y(t) = \begin{cases} t^2 & \text{für } t \ge 0 \\ -t^2 & \text{für } t \le 0 \end{cases}.$$

($y(t) = t^2$ ist für $t < 0$ *keine* Lösung.) Da die Ableitung von $\pm t^2$ für $t = 0$ verschwindet, sind aber auch die beiden zusammengesetzten Funktionen

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \ge 0 \\ -t^2 & \text{für } t \le 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad y(t) = \begin{cases} t^2 & \text{für } t \ge 0 \\ 0 & \text{für } t \le 0 \end{cases}$$

stetig differenzierbar und Lösungen.

Es kommt noch schlimmer: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ löst

$$y(t) = (t-a)^2$$

für $t \ge a$ (und nur dort) die Differentialgleichung, wenn auch nicht das Anfangswertproblem. Für $a \ge 0$ können wir dazu die zusammengesetzte Funktion

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le a \\ (t-a)^2 & \text{für } t \ge a \end{cases}$$

betrachten; diese ist in jedem Punkt t stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung samt Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

Auf Grund der Differentialgleichung und der Anfangsbedingung wissen wir also nur, daß die Funktion entweder konstant gleich null ist oder aber nach einem Zeitraum $a \ge 0$ damit beginnt, quadratisch gegen unendlich zu gehen – nicht gerade viel Information.

Bei der Differentialgleichung

$$\dot y(t) + \frac{y(t)}{2t^3} = 0$$

schließlich überzeugt man sich leicht, daß für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion $y(t) = \lambda e^{-1/t^2}$ eine Lösung ist. Diese Funktion ist zwar *a priori* für $t = 0$

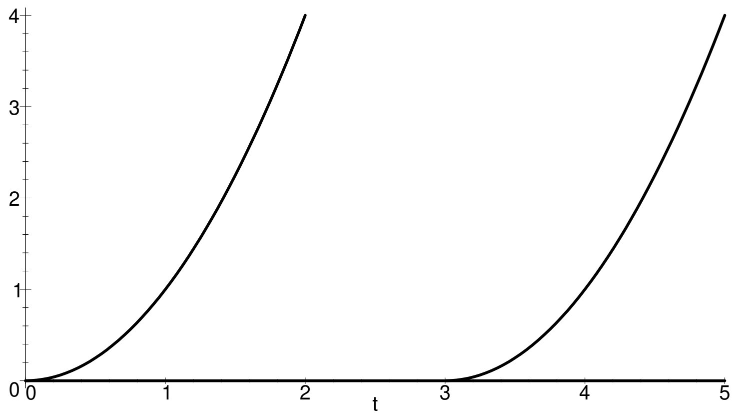


Abb. 33: Drei Lösungen von $\dot{y}(t) = \sqrt{|y(t)|}$ mit $y(0) = 0$

nicht definiert, sie kann aber stetig ergänzt werden durch die Vorschrift, daß ihr Wert dort gleich null sein soll. Genauso verhält es sich mit ihrer Ableitung

$$\dot{y}(t) = -\frac{y(t)}{2t^3} = -\frac{\lambda}{2t^3} \cdot e^{-1/t^2},$$

denn e^{-1/t^2} geht schneller gegen null als $\frac{\lambda}{2t^3}$ gegen unendlich. Also ist die Funktion stetig differenzierbar (sogar beliebig oft, wie man sich ohne große Schwierigkeiten überlegen kann). Ihr Wert an der Stelle $t = 0$ ist unabhängig von λ immer gleich null, d.h. das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) + \frac{y(t)}{2t^3} = 0 \quad \text{und} \quad y(0) = 0$$

hat *jede* der Funktionen $y(t) = \lambda e^{-1/t^2}$ als Lösung, egal welchen Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ man auch wählt. Über die Entwicklung eines Systems, das durch diese Gleichung beschrieben wird, läßt sich also *nichts* aussagen. Erst wenn $x(t_0)$ für einen Wert $t_0 \neq 0$ bekannt ist, lassen sich die Lösungen mit den verschiedenen Parameterwerten λ voneinander unterscheiden. Für $t \to \infty$ konvergiert die Lösungsfunktion gegen den Wert λ, der somit die entscheidende Größe für die Beschreibung des Langzeitverhaltens ist und trotzdem durch das Anfangswertproblem völlig unbestimmt gelassen wird.

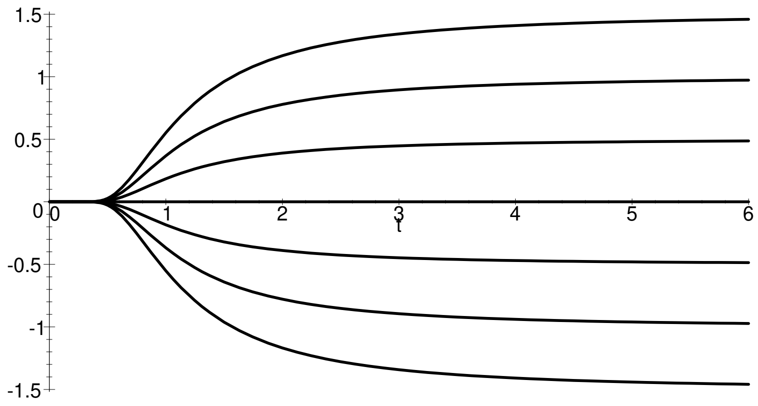


Abb. 34: Sieben Lösungen von $\dot{y}(t) + \frac{y(t)}{2t^3} = 0$ mit $y(0) = 0$

Falls man Differentialgleichungen zur Beschreibung und vor allem zur Vorhersage realer Phänomene einsetzt, ist es also definitiv kein überflüssiger Luxus, wenn man sich zunächst darum kümmert, ob die Differentialgleichung zusammen mit ihrer Anfangsbedingung überhaupt eine eindeutig bestimmte Lösungsfunktion festlegt. Ohne diese Vorüberlegung ist jede Lösungsfunktion wertlos.

b) Der Satz von Picard und Lindelöf

Wir betrachten in diesem Abschnitt das eindimensionale Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = f\big(y(t), t\big) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = c_0 .$$

Dabei sei

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \times [t_0,\, t_1] \to \mathbb{R} \\ \qquad (y, t) \mapsto f(y, t) \end{cases}$$

eine stetige Funktion, d.h. für jeden Punkt (y, t) aus dem Definitionsbereich und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$\left| f\left(\widetilde{y}, \widetilde{t}\right) - f(y, t) \right| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |\widetilde{y} - y| < \delta \text{ und } \left|\widetilde{t} - t\right| < \delta .$$

Indem wir beide Seiten der Differentialgleichung ab t_0 integrieren, erhalten wir unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(t_0) = c_0$ die neue Gleichung

$$y(t) = c_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(y(\tau),\tau\big)\, d\tau\ ,$$

aus der durch Diffenzieren sofort folgt, daß jede ihrer Lösungen das obige Anfangswertproblem löst.

Wir bezeichnen die Funktion auf der rechten Seite mit $T(y)$, d.h.

$$T(y)(t) \underset{\text{def}}{=} c_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(y(\tau),\tau\big)\, d\tau\ .$$

Dies definiert einen Operator, der jeder stetigen Funktion auf $[t_0,\ t_1]$ wieder eine solche Funktion zuordnet, und wir können nun kurz sagen, daß wir eine Funktion suchen, die der Gleichung $y = T(y)$ genügt, oder, anders ausgedrückt, einen Fix„punkt“ des Operators T.

Um einen solchen Fixpunkt zu erhalten ,starten wir mit einer beliebigen Funktion $y_0(t)$ auf dem Intervall $[t_0,\ t_1]$ und betrachten die Folge von Funktionen $y_n(t)$, die für $n \geq 1$ rekursiv durch $y_n = T(y_{n-1})$ definiert ist, d.h. $y_n = T^n(y_0)$. Falls diese Folge gegen eine Funktion y_∞ konvergiert, ist klar, daß diese Funktion Fixpunkt von T sein muß.

Als Beispiel betrachten wir das (wohlbekannte) Anfangswertproblem

$$\dot y(t) = y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1\ .$$

Hier ist

$$T(y)(t) = 1 + \int_0^t y(\tau)\, d\tau\ ;$$

falls wir also von der konstanten Funktion $y_0(t) = 1$ ausgehen, ist

$$y_1(t) = 1 + \int_0^t d\tau = 1 + t\ ,$$

$$y_2(t) = 1 + \int_0^t (1+\tau)\, d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2}\ ,$$

$$y_3(t) = 1 + \int_0^t \left(1 + \tau + \frac{\tau^2}{2}\right) d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\ ,$$

und so weiter. Ab hier wird man erraten, daß die Funktionen $y_n(t)$ gerade die TAYLOR-Polynome n-ten Grades der Exponentialfunktion sind, was sich dann leicht durch vollständige Induktion beweisen läßt. Somit ist

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = e^t\ ,$$

wie auch nicht anders zu erwarten war.

In diesem Beispiel geht also alles gut; in anderen Fällen kann es, wie die Beispiele aus dem vorigen Abschnitt zeigten, Probleme geben. Um zu positiven Ergebnisse zu kommen, wollen wir mehr von f verlangen als die bloße Stetigkeit und uns auch auf ein abgeschlossenes Intervall $[t_0,\ t_1]$ beschränken statt t auf der gesamten reellen Achse variieren zu lassen. Eine mögliche Verschärfung der Stetigkeitsforderung ist die

Lipschitz-Bedingung: Es gibt eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, genannt LIPSCHITZ-Konstante, so daß für alle $t \in [t_0,\ t_1]$ und alle $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|f(y_2,t) - f(y_1,t)| \leq L\,|y_2 - y_1|\ .$$

RUDOLF OTTO SIGISMUND LIPSCHITZ (1832–1903) wurde in Königsberg geboren und starb in Bonn. Am besten bekannt ist er durch die gerade definierte LIPSCHITZ-Bedingung für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen. Sein Hauptarbeitsgebiet waren die Differentialgleichungen der mathematischen Physik, jedoch beschäftigte er sich auch mit anderen Hilfsmitteln der mathematischen Physik wie etwa Matrizengruppen. Seine Arbeiten über dynamische Systeme haben wichtige Anwendungen in der Himmelsmechanik.

Die LIPSCHITZ-Bedingung muß glücklicherweise in vielen Fällen nicht explizit durch Abschätzungen nachgeprüft werden, denn es gilt

Lemma: Falls die partielle Ableitung von f nach y existiert und betragsmäßig beschränkt ist durch eine Konstante L, genügt f einer LIPSCHITZ-Bedingung mit L als LIPSCHITZ-Konstante.

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für jedes feste t (das wir bezüglich der partiellen Ableitung wie eine Konstante betrachten können) und für je zwei Werte $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ einen Punkt $z \in [y_1,\ y_2]$ mit der Eigenschaft, daß

$$\frac{f(y_2,t) - f(y_1,t)}{y_2 - y_1} = \frac{\partial f}{\partial y}(z,t)$$

ist. Also ist

$$|f(y_2,t) - f(y_1,t)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(z,t)\right| \, |y_2 - y_1| \ ,$$

und da der Betrag der partiellen Ableitung überall höchstens L ist, erfüllt f eine LIPSCHITZ-Bedingung mit Konstante L.

■

Wir betrachten nun wieder den oben eingeführten Operator T, von dem uns im Augenblick nur interessieren soll, daß er stetige Funktionen auf dem Intervall $[t_0,\ t_1]$ in ebensolche Funktionen überführt. Wir suchen eine Funktion $y(t)$ mit $T(y) = y$, die wir wie oben als Limes einer Funktionenfolge konstruieren wollen.

Um von einem solchen Limes reden zu können, brauchen wir zunächst eine Norm; wir verwenden dazu die *Supremumsnorm,* die für auf $[t_0,\ t_1]$ stetige Funktionen h durch

$$\|h\| \underset{\text{def}}{=} \sup_{\tau\in[t_0,\ t_1]} |h(\tau)|$$

definiert ist. Da eine stetige Funktion in einem abgeschlossenen Intervall ihr Maximum annimmt, existiert dieses Supremum und ist sogar ein Funktionswert von h.

Über dem Intervall $[0,\ 10]$ beispielsweise ist $\|\sin\| = \|\cos\| = 1$, und für die Funktion $g(t) = t^2$ ist $\|g\| = 10^2 = 100$.

Unser wichtigstes Hilfsmittel zur Untersuchung, wann eine Grenzfunktion existiert, ist der BANACHsche Fixpunktsatz, der in diesem Semester in der Numerik allgemein formuliert und bewiesen wird. Um keine neuen Begriffe einführen zu müssen, begnüge ich mich hier mit dem für unsere Zwecke notwendigen Spezialfall; der Beweis vereinfacht sich dadurch zwar nicht, aber die Formulierung des Satzes wird leichter verständlich.

Banachscher Fixpunktsatz: Für einen Operator T, der stetige Funktionen auf $[t_0,\ t_1]$ auf ebensolche Funktionen abbildet, gebe es eine Konstante $K < 1$ derart, daß für alle auf $[t_0,\ t_1]$ stetigen Funktionen $w(t), z(t)$ gilt

$$\|T(z) - T(w)\| \le K\,\|z - w\| \ .$$

Dann gibt es genau eine stetige Funktion $y\colon [t_0,\ t_1] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $T(y) = y$.

Beweis: Zunächst ist klar, daß es *höchstens* eine solche Funktion gibt, denn sind $y(t)$ und $z(t)$ zwei Lösungen, so ist

$$\|z - y\| = \|T(z) - T(y)\| \le K\,\|z - y\| \ ,$$

was für $K < 1$ nur dann möglich ist, wenn $\|z - y\|$ verschwindet, wenn also überall $y(t) = z(t)$ ist.

Zum Nachweis der Existenz starten wir mit irgendeiner stetigen Funktion $y_0(t)$ und iterieren sie mit T, d.h. für $n > 0$ sei $y_n = T(y_{n-1})$.

Wir überlegen uns zunächst, daß für jedes feste $\tau \in [t_0,\ t_1]$ die Folge der reellen Zahlen $y_n(\tau)$ konvergiert. Nach dem CAUCHYschen Konvergenzkriterium müssen wir dazu zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$|y_m(\tau) - y_n(\tau)| \le \varepsilon \quad \text{falls} \quad m > n > N$$

ist. Da wir mit der Supremumsnorm arbeiten, ist

$$|y_m(\tau) - y_n(\tau)| \le \|y_m - y_n\| \ ,$$

und nach Voraussetzung ist für jedes $r \in \mathbb{N}$

$$\|y_{r+2} - y_{r+1}\| \le K\,\|y_{r+1} - y_r\| \ .$$

Induktiv folgt daraus, daß

$$\|y_{r+1} - y_r\| \le K^r\,\|y_1 - y_0\|$$

ist und damit nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\| &\le \|y_m - y_{m-1}\| + \cdots + \|y_{n+1} - y_n\| \\ &\le K^m \|y_1 - y_0\| + \cdots + K^n \|y_1 - y_0\| \\ &= (K^m + \cdots + K^n)\, \|y_1 - y_0\| \\ &= K^n(1 + K + \cdots + K^{m-n})\, \|y_1 - y_0\| \\ &\le K^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} K^i\right) \|y_1 - y_0\| = \frac{K^n}{1-K} \|y_1 - y_0\| \ .\end{aligned}$$

Wählen wir also N so, daß

$$\frac{K^N}{1-K} \|y_1 - y_0\| < \varepsilon$$

ist, gilt die Voraussetzung des CAUCHYschen Konvergenzkriteriums mit diesem N für alle $\tau \in [t_0,\, t_1]$. Somit konvergiert die Folge der Funktionen $y_n(t)$ *punktweise* gegen eine Funktion $y(t)$. Für jedes $\tau \in [t_0,\, t_1]$ ist dann

$$\begin{aligned}|y(\tau) - y_n(\tau)| = \lim_{m\to\infty} |y_m(\tau) - y_n(\tau)| &\le \lim_{m\to\infty} \|y_m - y_n\| \\ &\le \frac{K^n}{1-K} \|y_1 - y_0\| \ ,\end{aligned}$$

die Folge konvergiert also in $[t_0,\, t_1]$ *gleichmäßig* gegen $y(t)$. Damit ist $y(t)$ eine stetige Funktion, und der Satz ist bewiesen. ■

STEFAN BANACH (1892–1945) wurde in Krakau geboren und ausgebildet, promovierte und arbeitete dann aber an der Universität von Lvov in der Ukraine, wo er unter schwierigen Bedingungen unter deutscher Besatzung den zweiten Weltkrieg verbrachte. Durch seine Arbeiten über lineare Operatoren und über Vektorräume von Funktionen wurde er zum Begründer der modernen Funktionalanalysis. Nach dem Krieg wollte er auf einen Lehrstuhl an der Universität Krakau wechseln, starb aber 1945 an Lungenkrebs. Das wichtigste mathematische Forschungsinstitut Polens, das Banach-Zentrum in Warschau, ist nach ihm benannt.

Als Anwendung erhalten wir den

Satz von Picard-Lindelöf: Die stetige Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \times [t_0,\, t_1] \to \mathbb{R} \\ \qquad (y,t) \mapsto f(y,t) \end{cases}$$

genüge einer LIPSCHITZ-Bedingung mit irgendeiner Konstanten $L \in \mathbb{R}$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\dot y(t) = f\big(y(t), t\big) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = c_0$$

für jedes $c_0 \in \mathbb{R}$ eine in $[t_0,\, t_1]$ eindeutig bestimmte Lösung.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß für den oben definierten Operator T mit

$$T(y)(t) \underset{\text{def}}{=} c_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(y(\tau), \tau\big)\, d\tau$$

und zwei beliebige stetige Funktionen z, w auf $[t_0,\, t_1]$

$$\|T(z) - T(w)\| \le K\, \|z - w\|$$

ist mit einer Konstanten $K < 1$. Links steht die Norm jener Funktion, die an der Stelle t den Wert

$$T(z)(t) - T(w)(t) = \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(z(\tau), \tau\big) - f\big(w(\tau), \tau\big)\Big)\, d\tau$$

annimmt, und auf Grund der LIPSCHITZ-Bedingung ist

$$\Big|f\big(z(\tau), \tau\big) - f\big(w(\tau), \tau\big)\Big| \le L\, |z(\tau) - w(\tau)| \le L\, \|z - w\| \ .$$

Also ist für $t \in [t_0,\, t_1]$

$$\begin{aligned}\left|\int_{t_0}^{t} \Big(f\big(z(\tau), \tau\big) - f\big(w(\tau), \tau\big)\Big)\, d\tau\right| &\le \int_{t_0}^{t} L\, \|z - w\|\, d\tau \\ = L \cdot (t - t_0)\, \|z - w\| &\le L \cdot (t_1 - t_0)\, \|z - w\| \ .\end{aligned}$$

Falls $L \cdot (t_1 - t_0)$ kleiner als eins ist, haben wir eine Konstante $K < 1$ gefunden und können den BANACHschen Fixpunktsatz anwenden; er liefert uns eine stetige Funktion $y(t)$, die der Bedingung

$$y(t) = c_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(y(\tau), \tau\big)\, d\tau$$

genügt. Da die rechte Seite wegen der Stetigkeit von f differenzierbar ist, haben wir sogar eine differenzierbare Funktion, und

$$\dot{y}(t) = f\big(y(t), t\big) .$$

Außerdem ist $y(t_0) = c_0$, da das Integral von t_0 bis t für $t = t_0$ verschwindet. Wir haben somit eine Lösung des Anfangswertproblems gefunden, und das ist die einzige Lösung, denn nach dem BANACHschen Fixpunktsatz hat T nur einen Fixpunkt.

Falls $L\cdot(t_1-t_0)$ größer als eins ist, gibt es immerhin noch eine natürliche Zahl n, so daß $L \cdot (t_1 - t_0) < n$ ist. Wir unterteilen das Intervall $[t_0,\, t_1]$ in n gleich lange Teilintervalle $[\tau_i,\, \tau_{i+1}]$ mit Grenzen

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n = t_1 ,$$

d.h. $\tau_i = t_0 + \dfrac{i}{n}(t_1 - t_0)$.

Für jedes dieser Intervalle ist dann $L \cdot (\tau_{i+1} - \tau_i) < 1$, insbesondere ist also das Anfangswertproblem im Anfangsintervall $[\tau_0,\, \tau_1]$ eindeutig lösbar.

Für die entsprechende Lösung sei $y(\tau_1) = c_1$. Dann betrachten wir im Intervall $[\tau_1,\, \tau_2]$ das entsprechende Anfangswertproblem mit $y(\tau_1) = c_1$ und erhalten eine in diesem Intervall eindeutige Lösung und so weiter, bis wir die Lösung auf ganz $[t_0, t_1]$ ausgedehnt haben. ■

ÉMILE PICARD (1856–1941) wurde in Paris geboren und hatte an der dortigen Universität auch seine erste Stelle, bis er 1878 eine Professur in Toulouse bekam. 1898 wurde er Professor an der Sorbonne und kehrte nach Paris zurück, wo er auch starb. Seine Arbeiten beschäftigen sich mit der Analysis (z.B. dem gerade bewiesenen Satz) und der Geometrie.

Dort interessierte er sich für algebraische Flächen und die eng damit verbundenen algebraiscchen Funktionen zweier Veränderlichen sowie den zugehörigen Integralen. Weitere Arbeiten beschäftigen sich auch mit der Topologie von Flächen und wieder andere mit Anwendungen der Analysis in der Elektrodynamik, Wärmelehre und Elastizitätstheorie. Er war mit der Tochter von CHARLES HERMITE verheiratet.

ERNST LEONARD LINDELÖF (1870–1946) wurde in Helsinki geboren, als Finnland noch eine russische Provinz war. Sein Vater war Mathematikprofessor an der damals noch schwedischen (heute finnischen) Universität Helsingfors, an der später auch Lindelöf selbst sein Studium begann, unterbrochen durch Aufenthalte in Stockholm (1891), Paris (1893-1894) und Göttingen (1901). Der gerade bewiesene Satz stammt aus einer Arbeit von 1890; weitere Arbeiten beschäftigen sich mit analytischen Funktionen und Singularitäten. Nachdem er Professor in Helsingfors wurde, widmete er sich vor allem der Lehre und publizierte mehrere Bücher.

Die Anfangswertprobleme aus dem vorigen Abschnitt erfüllen offensichtlich allesamt *keine* LIPSCHITZ-Bedingung, denn sie sind ja nicht eindeutig lösbar. Im Falle von

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{2y(t)} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0$$

ist

$$f(y, t) = \frac{1}{2y} ,$$

also

$$\left|f(y_2, t) - f(y_1(t)\right| = \left|\frac{1}{2y_2} - \frac{1}{2y_1}\right| = \frac{1}{|2y_1y_2|}\,|y_2 - y_1| ,$$

und das kann man nur dann durch eine Schranke der Form $L\,|y_2 - y_1|$ abschätzen, wenn $1/\,|2y_1y_2|$ kleiner ist als L. In der Nähe des Nullpunkts kann $1/\,|2y_1y_2|$ aber beliebig groß werden, und somit kann hier keine LIPSCHITZ-Bedingung gelten.

Ähnlich verhält es sich beim Anfangswertproblem

$$\dot y(t) = 2\sqrt{|y(t)|} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0\,.$$

Hier ist

$$f(y,t) = 2\sqrt{|y(t)|}$$

zwar überall stetig, aber die Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,t) = 2\frac{d}{dy}\sqrt{|y|} = \pm\frac{1}{\sqrt{|y|}}$$

mit Pluszeichen für $y > 0$ und Minuszeichen für $y < 0$ wächst bei Annäherung an den Nullpunkt betragsmäßig unbeschränkt, die Kurve wird also immer steiler, und damit zeigt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung, daß es keine LIPSCHITZ-Konstante geben kann.

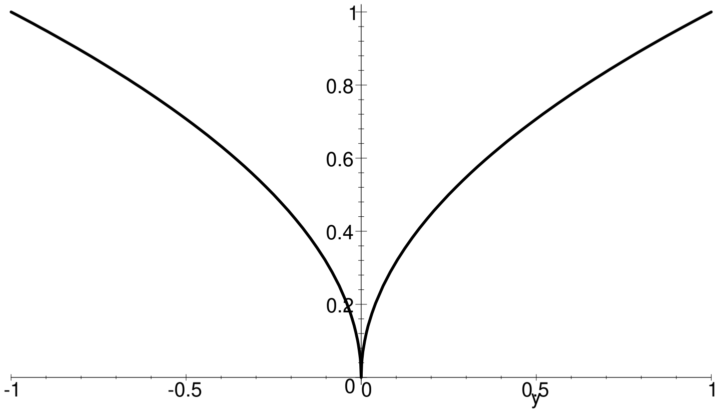


Abb. 35: Die Funktion $2\sqrt{|y|}$

Beim dritten Beispiel

$$\dot y(t) + \frac{y(t)}{2t^3} = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0$$

schließlich ist

$$f(y,t) = -\frac{y}{2t^3}\;;$$

hier ist zwar die y-Abhängigkeit harmlos, aber

$$|f(y_2,t) - f(y_1,t)| = \frac{1}{|2t^3|}\,|y_2 - y_1|$$

läßt sich nicht durch durch eine Schranke der Form $L\,|y_2 - y_1|$ abschätzen, da $1/\,|2t^3|$ für t gegen null nicht beschränkt bleibt.

Obwohl in keinem der drei Fälle eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt war, existierten doch immer Lösungen, und in der Tat reichen für die bloße Existenz von Lösungen deutlich schwächere Voraussetzungen als für Existenz und Eindeutigkeit. Nach einem Satz von PEANO etwa hat jedes Anfangswertproblem

$$\dot y(t) = f\big(y(t),t\big) \quad \text{und} \quad y(t_0) = c_0$$

mit *stetigem* f mindestens eine Lösung. Der Beweis arbeiter wieder mit einer Iteration, nutzt allerdings die gleichgradige Stetigkeit einer Folge aus, um die Existenz und die Stetigkeit der Grenzfunktion zu zeigen. Da nichteindeutige Lösungen für Anwendungen meist nutzlos sind, wollen wir hier auf diesen Beweis verzichten.

GUISEPPE PEANO (1858–1932) war Sohn eines Landarbeiters und wuchs auf einem Bauernhof nahe Cuneo im Piemont auf. 1870 brachte ihn ein Bruder seiner Mutter nach Turin, wo er weiterführende Schulen und schließlich die Universität besuchte. Dort wurde er 1880 Assistent und 1890 Professor. Den gerade erwähnten Existenzsatz bewies er 1886, und 1890 zeigte er, daß das Anfangswertproblem $\dot y(t) = 3y^{2/3}$ mit $y(0) = 0$ mehrere Lösungen hat. Die berühmten PEANO-Axiome für die natürlichen Zahlen veröffentlichte er 1889, und zwar aus unerfindlichen Gründen in lateinischer Sprache. Später beschäftigte er sich vor allem mit Logik.

c) Eindeutigkeitsprobleme für Systeme

Natürlich können alle Probleme, die wir vom Eindimensionalen her kennen, auch im Mehrdimensionalen auftreten; auch bei Systemen von

Differentialgleichungen muß man sich also um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen Gedanken machen. Zum Glück geht alles fast genauso wie im eindimensionalen Fall.

Wir betrachten ein Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{y}}(t) = f\big(\vec{y}(t), t\big) \quad \text{und} \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

mit einer Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \times [t_0,\, t_1] \to \mathbb{R}^n .$$

Ausgeschrieben ist also

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(\vec{y}, t) = \begin{pmatrix} f_1(y_1, \dots, y_n, t) \\ \vdots \\ f_n(y_1, \dots, y_n, t) \end{pmatrix}$$

mit Funktionen $f_i\colon \mathbb{R}^n \times [t_0,\, t_1] \to \mathbb{R}$.

Wir versehen den $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm

$$\|\vec{v}\| = \max_{i=1}^{n} |v_i|$$

und sagen, die Funktion f oder auch das obige System erfülle eine LIPSCHITZ-Bedingung, wenn es eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in [t_0,\, t_1]$ gilt

$$\big\| f\big(\vec{z}, t\big) - f(\big(\vec{y}, t)\big\| \le L\, \|\vec{z} - \vec{y}\| .$$

Dann gilt auch hier der

Satz von Picard und Lindelöf: Falls f stetig ist und eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt, hat jedes Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{y}}(t) = f\big(\vec{y}(t), t)\big) \quad \text{mit} \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

im Intervall $[t_0,\, t_1]$ eine eindeutig bestimmte Lösung.

Der *Beweis* geht fast wörtlich genauso wie im Eindimensionalen: Wir schreiben das System um als

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\vec{y}(\tau), \tau\big)\, d\tau ,$$

wobei das Integral über einen Vektor von Funktionen einfach der Vektor der Integrale über die Komponenten sein soll:

$$\int\limits_{t_0}^{t} f\big(\vec{y}(\tau), \tau\big)\, d\tau = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} f_1\big(\vec{y}(\tau), \tau\big)\, d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t} f_n\big(\vec{y}(\tau), \tau\big)\, d\tau \end{pmatrix} .$$

Sodann definieren wir eine Supremumsnorm durch

$$\|\vec{y}(t)\| \underset{\text{def}}{=} \max_{i=1}^{n} \sup_{t\in[t_0,\, t_1]} |y_i(t)| ,$$

beweisen auch hierfür einen BANACHschen Fixpunktsatz und folgern schließlich daraus den Satz von PICARD und LINDELÖF. ∎

d) Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

Es gibt eine ganze Reihe von Typen elementar integrierbarer nichtlinearer Differentialgleichungen; die meisten davon sind allerdings außerhalb von Lehrbüchern über Differentialgleichungen nur selten anzutreffen. Zwei Ausnahmen sind wichtig genug, um hier behandelt zu werden: Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen und exakte Differentialgleichungen.

Wir betrachten zunächst Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen.

Darunter versteht man Differentialgleichungen der Form

$$\dot{y}(t) = f\big(y(t), t\big) ,$$

bei denen sich die Funktion $f(y, t)$ als Produkt einer Funktion von y und einer Funktion von t schreiben läßt. Da die Funktion von y besser keine Nullstellen haben sollte, setzen wir ihren Kehrwert in den Nenner und schreiben die Differentialgleichung somit als

$$\dot{y}(t) = \frac{g(t)}{h\big(y(t)\big)} .$$

Multiplikation mit dem Nenner und Integration führen auf

$$h\big(y(t)\big)\, \dot{y}(t) = g(t) \quad \text{und} \quad \int h\big(y(t)\big)\, \dot{y}(t)\, dt = \int g(t)\, dt .$$

Das linke Integral ist nach der Substitutionsregel einfach $\int h(y)\,dy$, wir erhalten also mit

$$\int h(y)\,dy = \int g(t)\,dt + C$$

eine Beziehung zwischen y und t. Damit sind die Lösungsfunktionen zumindest implizit dargestellt.

Falls eine Anfangsbedingung der Form $y(t_0) = y_0$ gegeben ist, können wir die spezielle Lösung mit dieser Anfangsbedingung auch direkt darstellen durch die Gleichung

$$\int_{y_0}^{y} h(\eta)\,d\eta = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\,,$$

die für $t = t_0$ und $y = y_0$ offensichtlich erfüllt ist.

Ein erstes Beispiel kennen wir bereits: Eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot y(t) = a(t) \cdot y(t)$$

mit $y(t) \neq 0$ läßt sich auf diese Form bringen mit

$$g(t) = a(t) \quad \text{und} \quad h(y) = \frac{1}{y}\,;$$

wir erhalten also die Beziehung

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(t)\,dt \quad \text{oder} \quad \ln y = \int a(t)\,dt + C\,.$$

Diese Gleichung läßt sich durch Anwendung der Exponentialfunktion auflösen; wir erhalten das Ergebnis

$$y(t) = e^{\int a(t)\,dt + C}\,.$$

Als zweites Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot y(t) = -\frac{t}{y(t)} \quad \text{mit} \quad y(0) = 2\,.$$

Trennung der Veränderlichen und Integration führt auf

$$\int_2^y \eta\,d\eta = -\int_0^t d\tau \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{2} - \frac{2^2}{2} = -\frac{t^2}{2}\,.$$

Dies führt auf

$$y(t)^2 = 4 - t^2 \quad \text{oder} \quad y(t) = \pm\sqrt{4 - t^2}\,,$$

aber tatsächlich ist die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ nur dann erfüllt, wenn in Pluszeichen vor der Wurzel steht, d.h.

$$y(t) = \sqrt{4 - t^2}\,.$$

Beim Auflösen der Gleichung nach y muß also nochmals die Anfangsbedingung ins Spiel gebacht werden, was eigentlich niemanden verwundern sollte: Eine nichtlineare Gleichung hat nur selten eine eindeutig bestimmte Lösung, wohingegen der Satz von PICARD-LINDELÖF zeigt, daß Anfangswertprobleme oft eindeutig lösbar sind. Von den mehreren Lösungen der impliziten Gleichung, die wir bei einer Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen bekommen, wird daher meist nur eine das Anfangswertproblem lösen.

Etwas komplizierter ist das Beispiel

$$\dot y(t) = \frac{1}{\cos^2 2t \cos^2 3y}\,;$$

Hier erhalten wir

$$\int \cos^2 3y\,dy = \int \frac{dt}{\cos^2 2t}\,.$$

Partielle Integration links und die Erinnerung an die Ableitung des Tangens für das rechte Integral führen auf die Beziehung

$$\frac{1}{6}\cos 3y \sin 3y + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}\tan 2t + C\,,$$

die wir mittels der Beziehung

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

noch etwas vereinfachen können zu

$$y + \frac{1}{6}\sin 6y = \tan 2t + C' .$$

Trotzdem dürfte es ziemlich hoffnungslos sein, wenn wir versuchen, nach y aufzulösen. Die Auflösung nach t ist aber problemlos, so daß wir mit

$$t = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sin 6y}{6} + y - C'\right)$$

wenigstens die Umkehrfunktion der Lösungsfunktion explizit darstellen können.

Als letztes Beispiel schließlich wollen wir eine Differentialgleichung betrachten, die auch von unabhängigem Interesse ist, die *logistische Gleichung*

$$\dot y(t) = \lambda y(t)\big(K - y(t)\big) \quad \text{mit} \quad \lambda, K > 0 .$$

Sie beschreibt das Wachstum einer Population $y(t)$, deren Wachstumsrate sich immer weiter verlangsamt je mehr sich $y(t)$ an die Grenze K annähert. Für $y(t) = K$ ist $\dot y(t) = 0$, die Bevölkerungszahl bleibt also stabil, und für $y(t) > K$ ist $\dot y(t)$ negativ, d.h. die Bevölkerungszahl sinkt.

Dieses Modell wurde 1846 von dem belgischen Mathematiker PIERRE FRANÇOIS VERHULST (1804–1849) vorgeschlagen und unter anderem auf die Bevölkerungsentwicklung in Belgien angewandt. Er kam damals auf einen Schätzwert $K \approx 9\,400\,000$, der sich nicht sehr von der derzeitigen Bevölkerungszahl 10 152 000 *(Stand 1999)* unterscheidet

Da auf der rechten Seite der Differentialgleichung nur eine Funktion von y steht, haben wir trivialerweise eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen, und im interessanten Bereich

$$0 < y(t) < K$$

gibt es auch keine Probleme mit Nullstellen des Nenners. Wir erhalten damit

$$\int \frac{dy}{\lambda y(t)\big(K - y(t)\big)} = \int dt = t - t_0 ,$$

wobei der Grund für die Schreibweise der Integrationskonstante als $-t_0$ gleich klar werden wird.

Das Integral links kann durch Partialbruchzerlegung berechnet werden; da

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{K - y} = \frac{K}{y(K - y)}$$

ist, folgt

$$\frac{1}{\lambda y(K - y)} = \frac{1}{\lambda K}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K - y}\right)$$

und

$$\int \frac{dy}{\lambda y(t)\big(K - y(t)\big)} = \frac{1}{\lambda K}\big(\ln y - \ln(K - y)\big) = \frac{1}{\lambda K}\ln\frac{y}{K - y} .$$

Die Umkehrfunktion der Lösungsfunktion ist also

$$t = t_0 + \frac{1}{\lambda K}\ln\frac{y}{K - y} .$$

Wir können auch nach y auflösen:

$$\frac{y}{K - y} = e^{\lambda K(t - t_0)} \Longrightarrow \frac{K - y}{y} = e^{-\lambda K(t - t_0)} \Longrightarrow \frac{K}{y} = 1 + e^{-\lambda K(t - t_0)} ,$$

und damit ist schließlich

$$y(t) = \frac{K}{1 + e^{-\lambda K(t - t_0)}} .$$

Speziell ist $y(t_0) = K/2$, die Integrationskonstante gibt also den Zeitpunkt an, zu dem die Population ihre halbe Maximalstärke erreicht hat.

Differenzieren der logistischen Differentialgleichung ergibt

$$\ddot y(t) = \lambda y(t)\big(-\dot y(t)\big) + \lambda \dot y(t)\big(K - y(t)\big) = \lambda \dot y(t)\big(K - 2y(t)\big) ,$$

die Wachstumsrate $\dot y(t)$ steigt also, solange $y(t) < K/2$ oder $t < t_0$ ist, danach beginnt sie zu sinken. Dementsprechend ist der Graph der Lösungsfunktion $y(t)$ konkav für $t < t_0$ und konvex für $t > t_0$; bei $t = t_0$

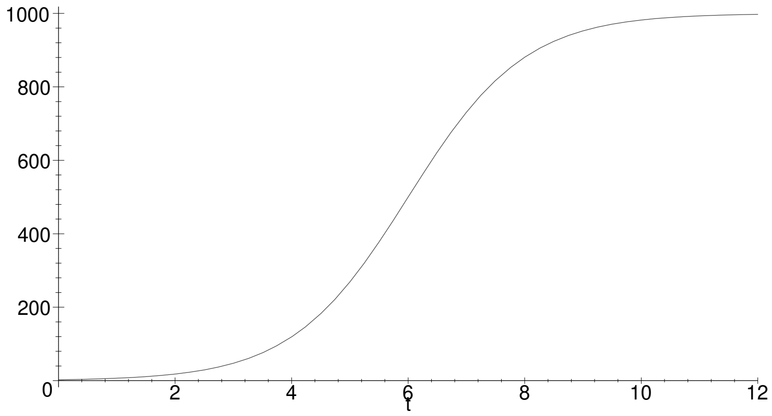


Abb. 36: Eine Lösungskurve der logistischen Differentialgleichung

sitzt der einzige Wendepunkt. Da diese Kurvenform an ein langestrecktes S erinnert, spricht man von einer *sigmoiden* Kurve; der Leser kann sich aussuchen, ob er sich eher an σ, ς oder Σ erinnert fühlt.

Solche Kurven werden beispielsweise bei Erneuerungsprozessen oft beobachtet; ist etwa $y(t)$ = Prozentsatz aller in Frage kommender Personen oder Firmen, die zum Zeitpunkt t bereits eine technische oder sonstige Neuerung eingeführt haben, so genügt auch $y(t)$ ungefähr einer logistischen Gleichung. Dies erscheint plausibel, denn ein potentieller Anwender erfährt von der Neuerung im Gespräch mit jemandem, der sie schon eingeführt hat; es gibt am Anfang also um so mehr Zuwachs bei $y(t)$ je größer $f(t)$ ist. Andererseits kann ein Prozentsatz nie größer als 100 werden, so daß die Steigerungsrate gegen Null gehen muß, wenn sich $y(t)$ der 100%-Grenze nähert. Vergleiche zwischen diesem Modell und vielen tatsächlichen Erneuerungsprozessen findet man etwa bei

C.T. FISCHER, R.H. PRY: A simple substitution model of technological change, *Technological Forecasting and Social Changes* **3** (1971), 75–88.

VERHULST führte die logistische Gleichung, wie bereits erwähnt, zur Modellierung des Bevölkerungswachstums ein, allerdings zeigen weder die Daten für die Bundesrepublik Deutschland noch die für die Weltbevölkerung eine gute Übereinstimmung mit diesem Modell. Seit 1940

immer wieder als Beispiel zitiert wird aber die Bevölkerung der Vereinigten Staaten von Amerika, das wir uns deshalb etwas genauer anschauen wollen:

Die Vereinigten Staaten führen seit 1790 in jedem zehnten Jahr einen „Census“ durch, in dessen Rahmen insbesondere auch die Gesamteinwohnerzahl festgestellt wird; sie bieten daher ein ideales Beispiel, für einen über einen langen Zeitraum hinweg dokumentierten Wachtumsprozess. Zwar hat sich das Territorium der USA seit 1790 gewaltig vergrößert, aber da Staaten wie das 1867 für $7 200 000 dazugekaufte Alaska kaum Einwohner haben, ist der Effekt dieser Änderungen auf die Bevölkerungszahlen fast vernachlässigbar – besonders wenn man bedenkt, daß Volkszählungsdaten notorisch unzuverlässig sind. Wir betrachten daher die Daten, wie sie bei den einzelnen Volkszählung für das jeweils aktuelle Territorium ermittelt wurden.

Das U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, veröffentlicht diese Daten ohne jegliche Rundung; in der folgenden Tabelle sind sie zur besseren Übersicht auf volle Hunderttausender gerundet und in Einheiten von einer Million Einwohner angegeben.

Bevölkerungsentwicklung in den USA 1790–2000

Jahr:	1790	1800	1810	1820	1830	1840
Bevölkerung:	3,9	5,3	7,2	9,6	12,9	17,1
Jahr:	1850	1860	1870	1880	1890	1900
Bevölkerung:	23,2	31,4	38,6	50,2	63,0	76,2
Jahr:	1910	1920	1930	1940	1950	1960
Bevölkerung:	92,2	106,0	123,2	132,2	151,3	179,3
Jahr:	1970	1980	1990	2000		
Bevölkerung:	203,3	226,5	248,7	281,4		

Quelle: http://www.census.gov/main/www/cen2000.html

Die graphische Darstellung in Abbildung 37 zeigt die Datenpunkte zusammen mit einer logistischen Kurve; wie man sieht, ist die Übereinstimmung recht gut, aber bei weitem nicht perfekt.

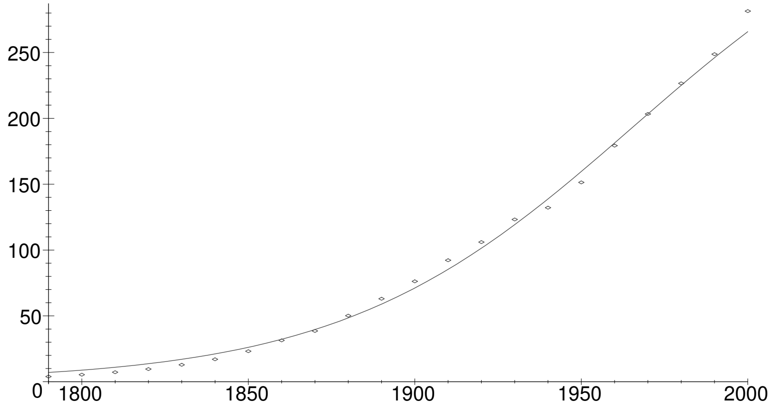


Abb. 37: U.S. Population Census 1790–2000 mit logistischer Kurve

Eine bessere Modellierung mit *zwei* logistischen Kurven zeigt Abbildung 38: Die erste Kurve, die den Datenpunkten bis 1940 angepaßt ist, hat eine Grenzkapazität K von 190 Millionen Einwohner, die zweite, für die Daten ab 1950, hat $K = 356$ Millionen.

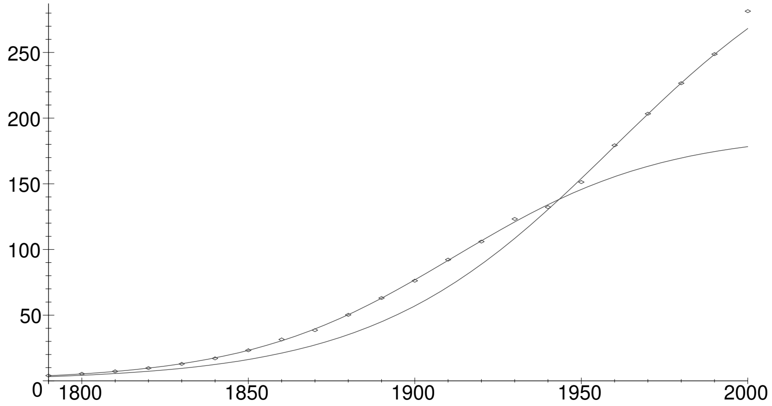


Abb. 38: U.S. Population Census 1790–2000 mit zwei logistischen Kurven

Historisch ist diese Beinahe-Verdoppelung leicht zu erklären: Schließlich

gingen die USA aus dem zweiten Weltkrieg als Weltmacht hervor, und eine solche hat die Macht, auch teilweise auf Kosten anderer Staaten zu leben. Von daher erscheint es durchaus nachvollziehbar, daß sich die Grenzkapazität des Systems USA nach dem zweiten Weltkrieg deutlich vergrößert hat.

Erklärungsbedürftig ist auch der deutlich über der Kurve liegende Wert für 2000. Anhand der vorhandenen Daten läßt sich allerdings nicht beurteilen, ob es sich hier um den Beginn eines neuen Trends handelt, oder ob die ermittelte Bevölkerungszahl für das Jahr 2000 womöglich einfach dadurch zu erklären ist, daß die Vereinigten Staaten im Jahr 2000 Probleme mit dem Zählen hatten. Wenn in fünfzig Jahren fünf weitere Werte vorliegen, wird man mehr sagen können.

e) Exakte Differentialgleichungen und integrierende Faktoren

Im letzten Abschnitt ließ sich die Lösung einer Differentialgleichung gelegentlich nur in der impliziten Form $\Phi(y,t,C) = 0$ angeben, wobei C die Integrationskonstante war.

Falls die Lösungsfunktionen, wie dies im allgemeinen der Fall sein wird, wirklich von C abhängen, kann die partielle Ableitung von Φ nach C nicht überall verschwinden; der Satz über implizite Funktionen (**[HM I]**, *Kap. 2, §3d*) sagt uns, daß die Gleichung $\Phi(y,t,C) = 0$ überall dort nach C aufgelöst werden kann, wo diese partielle Ableitung von Null verschieden ist. Dort lassen sich die Lösungen mit einer geeigneten Funktion F also auch in der Form

$$F(y,t) = C$$

schreiben.

Umgekehrt können wir jede Kurvenschar, die durch eine Gleichung dieser Art implizit gegeben ist, als Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichung interpretieren: Setzen wir für y eine Funktion $y(t)$ ein, so ist nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}F\bigl(y(t),t\bigr) = \frac{\partial F}{\partial y}\bigl(y(t),t\bigr)\cdot \dot y(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\bigl(y(t),t\bigr)\ .$$

Da $F\big(y(t),t\big)=0$ ist, muß dies verschwinden; die gesuchte Differentialgleichung ist also

$$\frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big)\cdot\dot y(t)+\frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big)=0\,.$$

Andererseits verschwindet die Ableitung einer Funktion genau dann, wenn die Funktion konstant ist; die Lösungen dieser Differentialgleichung sind also genau die Funktionen, die (in impliziter Form) gegeben sind durch

$$F\big(y(t),t\big)=C \quad\text{mit}\quad C\in\mathbb{R}\,.$$

Als Beispiel betrachten wir die Schar von Kreisen

$$y^2+t^2=r^2 \quad\text{mit}\quad r\in\mathbb{R}\,.$$

Hier ist $F(y,t)=y^2+t^2$, also erhalten wir die Differentialgleichung

$$2y(t)\cdot\dot y(t)+2t=0\,,$$

was sich auch als

$$y(t)\cdot\dot y(t)=-t$$

schreiben läßt. In dieser Form haben wir eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen; Integration links und rechts liefert

$$\int y\,dy=-\int t\,dt \quad\text{oder}\quad \frac{y^2}{2}=-\frac{t^2}{2}+C\,.$$

Da die Summe zweier Quadrate nicht negativ sein kann, hat diese Gleichung nur für $C\ge 0$ eine Lösung (wobei der Fall $C=0$ in unserem Zusammenhang nichts brauchbares liefert), also können wir $C=r^2/2$ setzen und erhalten dann genau die obigen Kreisgleichungen.

Hier ist die implizite Lösung sogar nützlicher als die explizite: Auflösen nach y liefert die *beiden* Lösungen

$$y(t)=\pm\sqrt{r^2-t^2}\,,$$

wobei man jeweils anhand der Anfangsbedingung das richtige Vorzeichen finden muß. Bei einer Anfangsbedingung der Form $y(t_0)=0$ ist das nicht möglich; hier lösen beide Funktionen

$$y_1(t)=\sqrt{r^2-t_0^2} \quad\text{und}\quad y_2(t)=-\sqrt{r^2-t_0^2}$$

das Anfangswertproblem. Bei einer Anfangsbedingung der Form $y(t_0)=c_0\neq 0$ dagegen gibt es nur die Lösung, bei der das Vorzeichen gleich dem von c_0 ist. Das ist natürlich auch genau das, was wir nach dem Satz von PICARD-LINDELÖF erwarten, denn die rechte Seite der Differentialgleichung

$$\dot y(t)=\frac{-t}{y(t)}$$

erfüllt überall dort eine LIPSCHITZ-Bedingung, wo y nicht verschwindet.

In diesem Abschnitt wollen wir uns allgemein mit Differentialgleichungen beschäftigen, deren Lösungen in einer impliziten Form

$$F(y,t)=C \quad\text{mit}\quad C\in\mathbb{R}$$

dargestellt werden können.

Wie wir oben gesehen haben, ist

$$\frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big)\cdot\dot y(t)+\frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big)=0$$

eine Differentialgleichung mit diesen Lösungen; diese Differentialgleichung bezeichnen wir als *exakt:*

Definition: Die Differentialgleichung

$$a(y,t)\dot y(t)+b(y,t)=0$$

heißt *exakt,* wenn es eine differenzierbare Funktion $F(y,t)$ gibt mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,t)=a(y,t) \quad\text{und}\quad \frac{\partial F}{\partial t}(y,t)=b(y,t)\,.$$

Zu diesen exakten Differentialgleichungen zählen insbesondere auch die Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen aus dem letzten Abschnitt. Diese hatten wir in der Form

$$h\big(y(t)\big)\,\dot y(t)=g(t) \quad\text{oder}\quad h\big(y(t)\big)\,\dot y(t)-g(t)=0$$

geschrieben; mit

$$F(y,t)=\int h(y)\,dy-\int g(t)\,dt$$

ist hier gerade

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,t) = h(y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(y,t) = -g(t)\,.$$

Andererseits ist aber nicht jede Differentialgleichungen der Form

$$a(y,t)\dot{y}(t) + b(y,t) = 0 \tag{$\star$}$$

exakt: Dazu brauchen wir noch zusätzlich eine Funktion $F(y,t)$, so daß

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,t) = a(y,t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(y,t) = b(y,t)$$

ist oder, mit anderen Worten,

$$\nabla F(y,t) = \operatorname{grad} F(y,t) = \begin{pmatrix} a(y,t) \\ b(y,t) \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichung $(\star)$ ist also genau dann exakt, wenn das Vektorfeld $\binom{a(y,t)}{b(y,t)}$ eine Stammfunktion hat.

Dies kann für differenzierbare Funktionen a und b nach dem Lemma von SCHWARTZ (**[HM I]**, Kapitel 2, §2) nur dann der Fall sein, wenn

$$\frac{\partial a}{\partial t}(y,t) = \frac{\partial b}{\partial y}(y,t)$$

ist. Umgekehrt reicht diese Bedingung nach **[HM I]**, Kapitel 2, §6*f)* aus für die Existenz einer Stammfunktion, *falls* das Vektorfeld auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert ist, falls es also keine Löcher im Definitionsbereich gibt, wie sie etwa durch Nullstellen von Nennern verursacht sein können. Insbesondere reicht die Bedingung also aus, wenn beide Funktionen auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert sind oder in einem Rechteck oder einer Kreisscheibe.

Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$te^{-ty(t)}\dot{y}(t) + 6t^2 + ye^{-ty(t)} = 0\,.$$

Diese Gleichung ist exakt, denn beide Koeffizientenfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und

$$\frac{\partial}{\partial t} te^{-ty(t)} = \frac{\partial}{\partial y}(6t^2 + ye^{-ty(t)}) = e^{-ty(t)} - tye^{-ty(t)}\,.$$

Für die Stammfunktion F des Vektorfelds ist einerseits

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,t) = te^{-ty}, \quad \text{also} \quad F(y,t) = -e^{-ty} + h_1(t)$$

mit irgendeiner nur von t abhängigen Funktion h_1 und andererseits

$$\frac{\partial F}{\partial t}(y,t) = 6t^2 + ye^{-ty(t)}, \quad \text{also} \quad F(y,t) = 2t^3 - e^{-ty} + h_2(y)$$

mit irgendeiner nur von y abhängigen Funktion h_2. Abgesehen von einer additiven Konstanten, die wir nach Belieben addieren können, passen die beiden Formeln genau dann zusammen, wenn

$$F(y,t) = 2t^3 - e^{-ty}$$

ist; für die Lösungsfunktionen der Differentialgleichung ist also

$$F\big(y(t),t\big) = 2t^3 - e^{-ty(t)} = C \quad \text{oder} \quad e^{-ty(t)} = 2t^3 - C$$

mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Hier läßt sich diese implizite Gleichung unschwer nach $y(t)$ auflösen; wir erhalten

$$y(t) = -\frac{\ln(2t^3 - C)}{t} \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel einer nichtexakten Differentialgleichung der Form $(\star)$ ist etwa

$$t^2y(t)\dot{y}(t) + t^3y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad a(y,t) = t^2y \ \text{ und } \ b(y,t) = t^3\,,$$

denn hier ist

$$\frac{\partial a}{\partial t}(y,t) = 2ty, \quad \text{aber} \quad \frac{\partial b}{\partial y}(y,t) = 0\,.$$

Trotzdem können wir diese Differentialgleichung lösen: Wenn wir durch t^2 dividieren, erhalten wir die obige Differentialgleichung für konzentrische Kreise um den Nullpunkt, und da eine differenzierbare Funktion durch ihre Werte für $t \neq 0$ auch im Nullpunkt eindeutig festgelegt ist, verlieren wir durch die Division keine Lösungen.

Genau wie nur wenige Vektorfelder Stammfunktionen haben, sich auch nur wenige Differentialgleichungen exakt. In manchen Fällen kann man sie aber immerhin exakt machen: Die Differentialgleichung

$$t^2\dot{y}(t) + ty + 1 = 0$$

beispielsweise ist nicht exakt, da

$$\frac{\partial t^2}{\partial t} = 2t \quad \text{und} \quad \frac{\partial(ty+1)}{\partial y} = t$$

voneiander verschieden sind. Multipliziert man die Gleichung aber mit e^{ty}, so wird sie exakt, denn

$$\frac{\partial(t^2 e^{ty})}{\partial t} = \frac{\partial(ty+1)e^{ty}}{\partial y} = (t^2 y + 2t)e^{ty} ,$$

und in der Tat sind $t^2 e^{ty}$ und $(ty+1)e^{ty}$ die partiellen Ableitungen von $F(y,t) = te^{ty}$ nach y und nach t.

An den Lösungen der Gleichung ändert sich durch die Multiplikation mit der nirgends verschwindenden Funktion e^{ty} nichts, sie sind also also gegeben durch die implizite Gleichung

$$te^{ty(t)} = C$$

oder explizit durch

$$y(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{C}{t} ,$$

wie man sich leicht durch Einsetzen überzeugen kann. Diese Lösung existiert bei positivem C nur für $t > 0$, bei negativem nur für $t < 0$. Für $C = 0$ definiert $te^{ty(t)} = 0$ keine Funktion $y(t)$.

Wenn eine Differentialgleichung durch Multiplikation mit einer Funktion $\varphi(y,t)$ exakt gemacht werden kann, nennt man $\varphi(y,t)$ einen *integrierenden Faktor*. Ihn zu finden, kann im allgemeinen sehr schwierig sein: Einen einfach zusammenhängenden Definitionsbereich vorausgesetzt, ist die Gleichung

$$\varphi\big(y(t),t\big)\,a\big(y(t),t\big)\,\dot y(t) + \varphi\big(y(t),t\big)\,b\big(y(t),t\big) = 0$$

genau dann exakt, wenn die partiellen Ableitungen des ersten Koeffizienten nach t und des zweiten Koeffizienten nach y miteinander übereinstimmen, wenn also

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(y,t)\cdot a(y,t) + \varphi(y,t)\frac{\partial a(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t)\cdot b(y,t) + \varphi(y,t)\frac{\partial b(y,t)}{\partial y}$$

ist. Diese Gleichung für gegebene Funktionen a und b zu lösen ist leider fast aussichtslos; lediglich in wenigen speziellen Fällen kann man eine eine Lösung wirklich hinschreiben:

Sucht man ein φ, das von t abhängt, vereinfacht sich obige Gleichung zu

$$\dot\varphi(t)\cdot a(y,t) = \varphi(t)\left(\frac{\partial b(y,t)}{\partial y} - \frac{\partial a(y,t)}{\partial t}\right)$$

oder

$$\frac{\dot\varphi(t)}{\varphi(t)} = \frac{\frac{\partial b(y,t)}{\partial y} - \frac{\partial a(y,t)}{\partial t}}{a(y,t)} .$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist die Ableitung von $\ln\varphi(t)$; falls die rechte Seite unabhängig von y ist, also nur eine Funktion $\psi(t)$, so ist also

$$\varphi(t) = e^{\int \psi(t)\,dt} .$$

Entsprechend kann man argumentieren, wenn φ nur von y abhängen soll; bezeichnen wir die Ableitung nach y durch einen Strich, wird dann die Gleichung zu

$$\varphi'(y)\cdot b(y,t) = \varphi(y)\left(\frac{\partial a(y,t)}{\partial t} - \frac{\partial b(y,t)}{\partial y}\right)$$

oder

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{\frac{\partial a(y,t)}{\partial t} - \frac{\partial b(y,t)}{\partial y}}{b(y,t)} .$$

Falls die rechte Seite nicht von t abhängt, also eine Funktion $\omega(y)$ ist, folgt wie oben

$$\varphi(y) = e^{\int \omega(y)\,dy} .$$

Ist also

$$\frac{\frac{\partial b(y,t)}{\partial y} - \frac{\partial a(y,t)}{\partial t}}{a(y,t)} \quad \text{unabhängig von } y$$

oder

$$\frac{\frac{\partial a(y,t)}{\partial t} - \frac{\partial b(y,t)}{\partial y}}{b(y,t)} \quad \text{unabhängig von } t ,$$

läßt sich ein integrierender Faktor auch algorithmisch produzieren; ansonsten kann sich die Suche als schwierig erweisen.

Im obigen Beispiel ist $a(y,t) = t^2$ und $b(y,t) = yt + 1$, also

$$\frac{\frac{\partial a(y,t)}{\partial t} - \frac{\partial b(y,t)}{\partial y}}{b(y,t)} = \frac{t}{yt+1}$$

auch von t abhängig, so daß es keinen integrierenden Faktor gibt, der nur von y abhängt. Da aber

$$\frac{\frac{\partial b(y,t)}{\partial y} - \frac{\partial a(y,t)}{\partial t}}{a(y,t)} = \frac{-t}{t^2} = -\frac{1}{t}$$

nur von t abhängt, gibt es einen integrierenden Faktor, der nur von t abhängt, nämlich

$$\varphi(t) = e^{-\int \frac{dt}{t}} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t} .$$

In der Tat ist

$$t\dot{y}(t) + y + \frac{1}{t} = 0$$

eine exakte Differentialgleichung, und

$$F(y,t) = yt + \ln t$$

ist eine Stammfunktion, die (abgesehen von der etwas anderen Form der Integrationskonstanten) auf dieselbe Lösung führt wie das obige F.

Integrierende Faktoren, die sowohl von y als auch von t abhängen, können gelegentlich über Symmetriebetrachtungen gefunden werden: Die Differentialgleichung

$$a(y,t)\dot{y}(t) + b(y,t) = 0$$

habe die (unbekannte) Lösung $F(y,t) = C$ mit $C \in \mathbb{R}$. Angenommen, wie kennen eine Transformation der Koordinaten, die in Abhängigkeit von einem Paramter ε eine Lösungskurve $F(y,t) = C$ überführt in eine neue Lösungskurve $F(y_\varepsilon, t_\varepsilon) = C_\varepsilon$, wobei $\varepsilon = 0$ der Ausgangslösung entsprechen soll. Nach dem Satz über implizite Funktionen können wir dann auch eine Transformation finden, für die $C_\varepsilon = C + \varepsilon$ ist. Es könnte schwierig sein, so eine Transformation explizit anzugeben; es reicht uns

allerdings, wenn wir sie nur in erster Näherung kennen, d.h. bis auf Terme, die schneller gegen null gehen als ε:

$$y_\varepsilon = y + \varepsilon\eta(y,t) + o(\varepsilon) \quad \text{und} \quad t_\varepsilon = t + \varepsilon\tau(y,t) + o(\varepsilon) .$$

Dann ist

$$C + \varepsilon = F(y_\varepsilon, t_\varepsilon) = F(y,t) + \varepsilon\big(F_y(y,t)\eta(y,t) + F_t(y,t)\tau(y,t)\big) + o(\varepsilon) ,$$

also

$$F_y(y,t)\eta(y,t) + F_t(y,t)\tau(y,t) = 1 . \tag{$*$}$$

Außerdem ist nach dem Satz über implizite Funktionen

$$\dot{y}(t) = -\frac{F_t(y,t)}{F_y(y,t)} ;$$

da $y(t)$ Lösung der Differentialgleichung ist, folgt

$$-a(y,t)\frac{F_t(y,t)}{F_y(y,t)} + b(y,t) = 0$$

oder

$$-b(y,t)F_y(y,t) + a(y,t)F_t(y,t) = 0 .$$

Diese Gleichung, zusammen mit Gleichung ($*$) ist ein lineares Gleichungssystem für $F_y(y,t)$ und $F_t(y,t)$; nach der CRAMERschen Regel hat es die Lösung

$$F_y(y,t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \tau(y,t) \\ 0 & a(y,t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta(y,t) & \tau(y,t) \\ -b(y,t) & a(y,t) \end{vmatrix}} = \frac{a(y,t)}{\eta(y,t)a(y,t) + \tau(y,t)b(y,t)}$$

und

$$F_t(y,t) = \frac{\begin{vmatrix} \eta(y,t) & 1 \\ -b(y,t) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \eta(y,t) & \tau(y,t) \\ -b(y,t) & a(y,t) \end{vmatrix}} = \frac{b(y,t)}{\eta(y,t)a(y,t) + \tau(y,t)b(y,t)} .$$

Insbesondere ist

$$\frac{F_y(y,t)}{a(y,t)} = \frac{F_t(y,t)}{b(y,t)} = \frac{1}{\eta(y,t)a(y,t) + \tau(y,t)b(y,t)}$$

ein integrierenden Faktor.

f) Qualitative Theorie

Ein allgemeines System

$$\dot{\vec{y}}(t) = f\big(\vec{y}(t), t\big)$$

wird nur selten eine Lösung haben, die sich in geschlossener Form angeben läßt; meist wird man sich mit (nicht immer unproblematischen) numerischen Näherungslösungen begnügen müssen. In diesem letzten Abschnitt des Paragraphen über Differentialgleichungen wollen wir uns, hauptsächlich anhand von Beispielen, überlegen, wie man auch bei solchen nicht explizit lösbaren Gleichungen zu Aussagen über das Verhalten der Lösungsfunktionen kommen kann.

Eine wesentliche Rolle spielen dabei die Gleichgewichtslösungen:

Definition: Ein Punkt $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt *Fixpunkt* oder *Gleichgewichtslösung* des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = f\big(\vec{y}(t), t\big)$, wenn die konstante Funktion $\vec{y}(t) = \vec{y}_0$ eine Lösung ist.

Anschaulich bedeutet dies, daß der Zustand eines Systems, das durch diese Differentialgleichung beschrieben wird, für $\vec{y}(t) = \vec{y}_0$ zeitlich konstant ist, das System befindet sich also im Gleichgewicht.

Da die Ableitung einer konstanten Funktion verschwindet, sind die Fixpunkte des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = f\big(\vec{y}(t), t\big)$ gerade die Lösungen des Gleichungssystems

$$f(\vec{y}_0, t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [t_0,\ t_1]\,.$$

Bei einem nichtlinearen Differentialgleichungssystem ist das natürlich ein nichtlineares Gleichungssystem, man wird sich also auch hier bei der Lösung oft mit Näherungsverfahren begnügen müssen. Die Variable t tritt hier natürlich nur bei nichtautonomen Systemen auf; bei den in Naturwissenschaft und Technik häufigen autonomen Systemen haben wir ein Gleichungssystem, in dem nur die Komponenten von $\vec{y}_0$ vorkommen.

Ein klassisches Beispiel, bei dem sich die Fixpunkte leicht ausrechnen lassen, ist das Raubtier-Beutetier-Modell, das 1925 von LOTKA und

VOLTERRA vorgeschlagen wurde: In einem Gebiet gebe es eine Population von Raubtieren, die sich von genau einer Art von Beutetieren ernähren. Für die Beutetiere sei genügend Nahrung vorhanden, so daß diese sich, falls es keine Raubtiere gäbe, beliebig vermehren könnten. Wenn wir die Populationsstärke zum Zeitpunkt t mit $x(t)$ bezeichnen, können wir also annehmen, daß die Beutetiere bei Abwesenheit der Raubtiere eine konstanter Wachstumsrate hätten, d.h.

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) \quad \text{mit} \quad \alpha > 0\,.$$

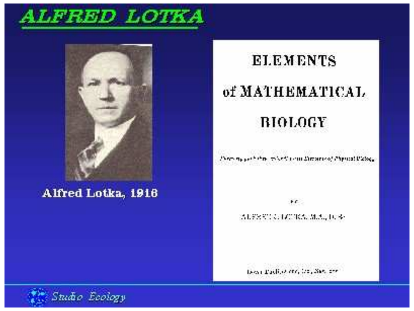
Die Raubtiere, deren Bestand zum Zeitpunkt t wir mit $y(t)$ bezeichnen wollen, würden in Abwesenheit der Beutetiere relativ schnell verhungern und somit aussterben, was wir durch eine negative Wachstumsrate modellieren können:

$$\dot{y}(t) = -\gamma y(t) \quad \text{mit} \quad \gamma > 0\,.$$

Nun sind aber die Raubtiere und die Beutetiere nicht isoliert voneinander, sondern es kommt zu Begegnungen zwischen den beiden Populationen. Deren Häufigkeit ist etwa proportional zum Produkt der beiden Populationsstärken, und die Auswirkung einer solchen Begegnung ist positiv für die Wachstumsrate der Raubtiere, aber negativ für die der Beutetiere. Unser Modell läßt sich somit beschreiben durch das System

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha x(t) - \beta x(t)y(t)\\ \dot{y}(t) &= -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t)\end{aligned}$$

mit positiven reellen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.



Der amerikanische Wissenschaftler ALFRED LOTKA (1880–1949) war von der Ausbildung her ein Mathematiker, interessierte sich aber Zeit seines Lebens stark für Physik, insbesondere Thermodynamik, und war einer der ersten, der die Evolution unter physikalischen Gesichtspunkten betrachtete. Er zählt zu den Pionieren der Selbstorganisation, der Bioenergetik und (auch für eine Versicherung) der Demographie.

Vito Volterra (1860–1940) wurde in Ancona im damaligen Kirchenstaat geboren. Er studierte bereits als Elfjähriger mathematische Literatur, promovierte dann aber in Physik über ein Thema aus der Hydrodynamik. Er hatte Lehrstühle für Mechanik und für mathematische Physik in Pisa, Turin und Rom. Seine wichtigsten Arbeiten beschäftigen sich mit partiellen Differentialgleichungen und vor allem Integralgleichungen. Ab 1922 kämpfte er im italienischen Parlament gegen den Faschismus und verlor deshalb 1931 nach Auflösung des Parlaments seinen Lehrstuhl in Rom. Den Rest seines Lebens verbrachte er größtenteils im Exil.

Zur Bestimmung der Gleichgewichtslösungen müssen wir für $x(t)$ und $y(t)$ Konstanten einsetzen; dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha x_0 - \beta x_0 y_0 = x_0(\alpha - \beta y_0) \\ 0 &= -\gamma\, y_0 + \delta x_0 y_0 = y_0(\gamma - \delta x_0)\,. \end{aligned}$$

Es gibt somit genau zwei Gleichgewichtslösungen: Einmal die uninteressante Lösung $x(t) = y(t) \equiv 0$, die im wesentlichen besagt, daß ohne Raub- und Beutetiere in diesem System nichts passiert, und dann noch die Lösung

$$x(t) \equiv \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{und} \quad y(t) \equiv \frac{\alpha}{\beta}\,.$$

Falls die beiden Populationen diese Stärken haben, fressen also die Raubtiere genau so viele Beutetiere weg, wie nachwachsen; umgekehrt reichen die Beutetiere gerade aus, um die Raubtierpopulation zu ernähren.

Was passiert, wenn die Populationen nicht im Gleichgewicht sind? Wir haben offensichtlich kaum Chancen, das Differentialgleichungssystem explizit zu lösen, aber wir können trotzdem versuchen, etwas über die Lösungs*kurven* in Erfahrung zu bringen.

Wenn wir y als Funktion von x betrachten, ist

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot y(t)}{\dot x(t)} = \frac{-\gamma y + \delta xy}{\alpha x - \beta xy} = \frac{y}{\alpha - \beta y} \cdot \frac{\delta x - \gamma}{x}\,,$$

wir haben also eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Trennung der Variablen führt auf

$$\int \left(\frac{\alpha}{y} - \beta\right) dy = \int \left(\delta - \frac{\gamma}{x}\right) dx$$

oder

$$\alpha \ln y - \beta y = \delta x - \gamma \ln x + C\,.$$

Anwendung der Exponentialfunktion macht daraus

$$\frac{y^\alpha}{e^{\beta y}} = \frac{e^{\delta x}}{x^\gamma} \cdot e^C\,.$$

Diese Gleichung können wir zwar weder nach y noch nach x auflösen, aber eine einfache Kurvendiskussion der Funktionen

$$f(y) = \frac{y^\alpha}{e^{\beta y}} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{e^{\delta x}}{x^\gamma}$$

zeigt, daß die Ableitung in beiden Fällen außer im Nullpunkt noch in genau einem weiteren Punkt verschwindet, nämlich dort wo x *bzw.* y gleich der entsprechenden Koordinate des nichttrivialen Gleichgewichtspunkts ist. f hat in diesem Punkt ein Maximum, g ein Minimum, und für $t \to 0$ oder $t \to \infty$ geht f gegen null und g gegen unendlich.

Da beide Funktionen im positiven Bereich der reellen Achse nur positive Werte annehmen, gibt es für eine vorgegebene positive Zahl c somit höchstens zwei Werte, an denen sie von f *bzw.* g angenommen wird; für zu große c, gibt es kein y mehr mit $f(y) = c$, und für zu kleine c kein x mit $g(x) = c$.

Daraus folgt nach kurzer Überlegung, daß die Lösungskurven (abgesehen von den beiden Fixpunkten) auf geschlossenen Kurven um den nichttrivialen Fixpunkt liegen. Da kein Punkt auf einer solchen Kurve Fixpunkt ist, kann keine Lösungskurve für $t \to \infty$ gegen einen Punkt einer solchen Kurve konvergieren, die Lösungskurven müssen also den nichttrivialen Gleichgewichtspunkt permanent umrunden.

Betrachten wir eine konkrete Lösung $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ des Differentialgleichungssystems, das wir der Einfachheit halber kurz als

$$\begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} = F\bigl(x(t), y(t)\bigr)$$

schreiben wollen, und fixieren wir einen Zeitpunkt t_0; für diesen sei $x(t_0) = a$ und $y(t_0) = b$. Dann muß es nach obiger Diskussion ein kleinste Zeitspanne T geben, so daß auch

$$x(t_0 + T) = a \quad \text{und} \quad y(t_0 + T) = b$$

ist. Für die beiden Funktionen

$$u(t) \underset{\text{def}}{=} x(t+T) \quad \text{und} \quad v(t) \underset{\text{def}}{=} y(t+T)$$

ist dann $u(t_0) = a$ und $v(t_0) = b$; außerdem ist

$$\begin{pmatrix} \dot u(t) \\ \dot v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot x(t+T) \\ \dot y(t+T) \end{pmatrix} = F\big(x(t+T), y(t+T)\big) = F\big(u(t), v(t)\big) ,$$

$\big(x(t), y(t)\big)$ und $\big(u(t), v(t)\big)$ lösen also dasselbe Anfangswertproblem. Falls wir zeigen können, daß F eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt, müssen die beiden Funktionen also übereinstimmen.

Im betrachteten Beispiel ist

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha x - \beta xy \\ -\gamma y + \delta xy \end{pmatrix} ,$$

also

$$\|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)\| = \left\| \begin{pmatrix} \alpha(x_1 - x_2) - \beta(x_1y_1 - x_2y_2) \\ -\gamma(y_1 - y_2) + \delta(x_1y_1 - x_2y_2) \end{pmatrix} \right\| .$$

Im Quadrat $-R \le x, y \le R$ ist

$$|\alpha(x_1 - x_2) - \beta(x_1y_1 - x_2y_2)| \le |\alpha(x_1 - x_2)| + |\beta(x_1y_1 - x_2y_2)|$$

und

$$\begin{aligned} |(x_1y_1 - x_2y_2)| &= |x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_2 - x_2y_2| \\ &= |x_1(y_1 - y_2) + y_2(x_1 - x_2)| \\ &\le |x_1(y_1 - y_2)| + |y_2(x_1 - x_2)| \\ &\le R\big(|y_1 - y_2| + |x_1 - x_2|\big) , \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} &|\alpha(x_1 - x_2) - \beta(x_1y_1 - x_2y_2)| \\ &\le \alpha\,|(x_1 - x_2)| + \beta R\big(|y_1 - y_2| + |x_1 - x_2|\big) . \end{aligned}$$

Analog folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} &|\gamma(y_1 - y_2) + \delta(x_1y_1 - x_2y_2)| \\ &\le \gamma\,|(y_1 - y_2)| + \delta R\big(|y_1 - y_2| + |x_1 - x_2|\big) . \end{aligned}$$

Wir arbeiten hier mit der Maximumsnorm von Vektoren, $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|$ ist also das Maximum von $|x|$ und $|y|$, und entsprechend ist

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| = \max\big\{|x_1 - x_2|\,, |y_1 - y_2|\big\} .$$

Mit

$$L = \max\{\alpha + 2\beta R, \gamma + 2\delta R\}$$

ist somit

$$\|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)\| \le L \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| ;$$

F erfüllt also eine LIPSCHITZ-Bedingung, so daß wir aus dem Satz von PICARD-LINDELÖF folgern können, daß das Anfangswertproblem in jedem abgeschlossenen Quadrat eindeutig lösbar ist.

Da jede Lösungskurve in einem abgeschlossenen Quadrat liegt (sonst müßte sie irgendwo gegen unendlich gehen), ist also

$$u(t) = x(t) \quad \text{und} \quad v(t) = y(t) \quad \text{für alle } t \ge t_0$$

d.h.

$$x(t+T) = x(t) \quad \text{und} \quad y(t+T) = y(t) \quad \text{für alle } t \ge t_0 .$$

Damit wissen wir, daß alle Lösungsfunktionen periodisch sind.

In der unmittelbaren Umgebung der nichttrivialen Gleichgewichtslösung können wir sogar noch etwas mehr sagen: Durch TAYLOR-Entwicklung der oben betrachteten Funktionen f und g überzeugt man sich leicht davon, daß die Lösungskurven dort näherungsweise als Ellipsen aufgefaßt werden können.

Nach all diesen Vorbereitungen sollten wir uns endlich eine konkrete Lösungskurve anschauen, d.h. wir sollten das Problem in einem Spezialfall numerisch lösen.

Abbildung 39 zeigt das Ergebnis; die spiralförmige Kurve entspricht genau unseren Erwartungen.

Besser können wir diese überprüfen, wenn wir eine Reihe von Lösungskurven in der xy-Ebene betrachten; Abbildung 40 zeigt solche Kurven

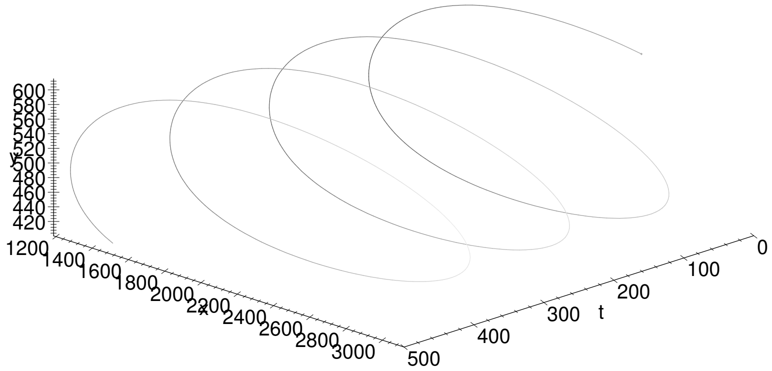


Abb. 39: Numerische Simulation des Raubtier-Beutetier-Systems

zu verschiedenen Anfangsbedingungen. Abgesehen von der Gleichgewichtslösung, die einfach ein Punkt ist, sieht man die vorhergesagten geschlossenen Kurven, die das Gleichgewicht umrunden.

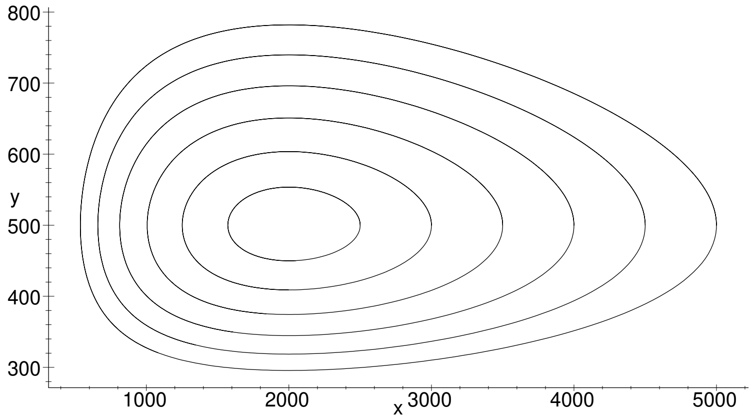


Abb. 40: Lösungskurven in der xy-Ebene

Man kann sich leicht klarmachen, was der Umlauf auf so einer Lösungskurve biologisch bedeutet: Im jeweils untersten Punkt ist die

Raubtierpopulation minimal, so daß sich die Beutetiere stark vermehren können; dadurch verbessert sich die Nahrungsgrundlage für die Raubtiere, was nun auch zu deren Vermehrung führt, so daß die Kurve auf ihren am weitesten rechts gelegenen Punkt zusteuert, in dem die Beutetiere ihre maximale Populationsstärke erreichen. Die gestiegene Raubtierpopulation frißt nun, nachdem sie ihren Gleichgewichtswert überschritten hat, mehr Beutetiere als nachwachsen, kann sich aber wegen der großen Anzahl vorhandener Beutetiere weiterhin vermehren auf ein Maximum hin, das am obersten Punkt der Lösungskurve erreicht ist. Danach reicht der bereits gesunkene Bestand an Beutetieren nicht mehr aus als Nahrungsgrundlage für die Raubtiere, ihre Population geht also zurück, reicht aber immer noch aus, um die Beutetiere weiter zu dezimieren. Im Punkt links außen hat deren Bestand schließlich sein Minimum erreicht; die weiterhin sinkende Raubtierpopulation frißt nun weniger Beutetiere als nachwachsen und leidet trotzdem weiter an Nahrungsmangel. Sobald sie ihr Minimum erreicht hat, schließt sich der Kreis, und der gleiche Zyklus beginnt von vorne.

Auch wenn Raubtiere und Beutetiere in der Technischen Informatik keine große Rolle spielen, sollten wir uns doch zumindest kurz fragen, ob die mathematische Lösung irgendetwas mit der biologischen Realität zu tun hat – der Zusammenhang zwischen idealisierten mathematischen Modellen und realen Systemen ist schließlich auch in der Technischen Informatik von Bedeutung.

Wie in vielen praktischen Anwendungen der Mathematik sind die Annahmen des Modells auch hier viel zu einfach: Es gibt kaum je zwei Arten, die völlig isoliert vom Rest der Welt leben. Trotzdem wurden die vorhergesagten Zykel schon beobachtet: Die Hudson Bay Company sammelte rund hundert Jahre lang Daten über gekaufte Felle von Luchsen (Raubtieren) und Schneehasen (deren Beute); da die Trapper kaum beeinflussen können, was in ihre Fallen läuft, sollten diese Anzahlen ungefähr proportional sein zu den jeweiligen Populationszahlen. Abbildung 41 zeigt ungefähr die vorhergesagten zyklischen Schwankungen – auch wenn die Schwankungen zwischen 1875 und 1905 in die falsche Richtung gehen: Dort wird der Gleichgewichtspunkt nicht gegen den Uhrzeigersinn umrundet, sondern im Uhrzeigersinn.

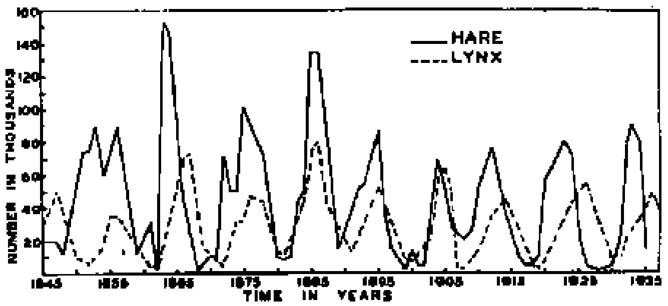


Abb. 41: Luchse und Schneehasen

Über den genauen Grund dafür gibt es immer noch viele Spekulationen; der Grund, warum Abweichungen vom Modell auftreten müssen ist aber einfach zu verstehen: Die Realität deutlich komplizierter ist als das extrem vereinfachte Modell von LOTKA und VOLTERRA.

Das vorliegende Beispiel ist natürlich, wie fast alle Beispiele in einer Anfängervorlesung, viel zu elementar: Im allgemeinen kann man einer Differentialgleichung nicht auf so einfache Weise so viele Eigenschaften der Lösungen ansehen.

Die qualitative Theorie der Differentialgleichungen wendet denn auch viele Methoden an, die weit jenseits des Stoffs dieser Vorlesung liegen, und selbst damit kann sie in komplizierteren Fällen nur deutlich weniger Information aus der Differentialgleichung extrahieren als in diesem Beispiel.

Einen ersten Überblick über das Verhalten der Lösungen einer *autonomen* Differentialgleichung in nur zwei Variablen liefert auch bei beliebig komplizierten Systemen ein graphisches Verfahren: Bei einer autonomen Differentialgleichung

$$\dot{\vec{y}}(t) = F\big(\vec{y}(t)\big)$$

definiert die Funktion F ein Vektorfeld, wie wir es aus **[HM1]**, *Kapitel 2,* kennen.

Spätestens an dieser Stelle wird klar, daß wir in diesem Kapitel bei der Unterscheidung von Punkten und Vektoren geschlampt haben: Für die linearen homogenen Differentialgleichungssysteme, die den Hauptinhalt dieses Kapitels bilden, war es völlig in Ordnung, nur von Vektoren zu reden: Dort gibt es einen wohldefinierten Nullpunkt, so daß sich Punkte und Vektoren in kanonischer Weise entsprechen.

Zur geometrischen Interpretation von $\dot{\vec{y}}(t) = F\big(\vec{y}(t)\big)$ ist es aber sinnvoller, das Argument $\vec{y}$ von F als Punkt $\boldsymbol{y}$ aufzufassen und den Funktionswert als Tangenten*vektor* in diesem Punkt zu interpretieren. Eine Lösungskurve der Differentialgleichung ist dann eine Kurve, die in jedem Punkt $\boldsymbol{y}$ den Vektor $F(\boldsymbol{y})$ als Tangentenvektor hat.

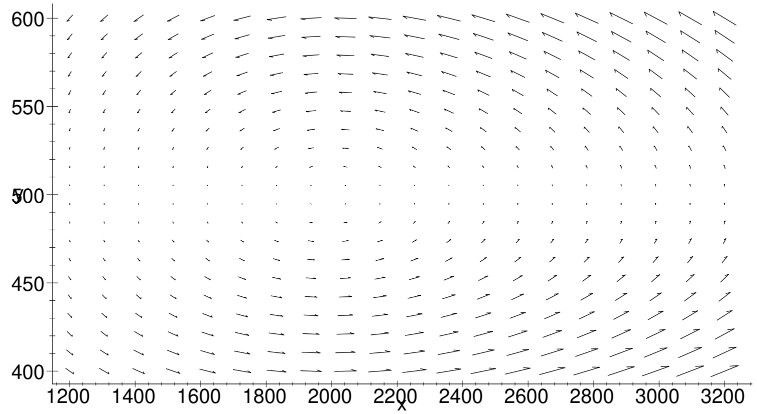


Abb. 42: Das Vektorfeld zur Raubtier-Beutetier-Gleichung

Abbildung 42 zeigt das Vektorfeld im betrachteten Beispiel; es legt zumindest die Vermutung nahe, daß die Lösungen zyklisch um einen Punkt rotieren. *Genau* können das wir freilich aufgrund der graphischen Information nicht sagen: Eine visuell nicht wahrnehmbare Richtungsänderung der Vektoren gehört zu einer Lösung die sich spiralförmig auf den Gleichgewichtspunkt zusammenzieht oder aber spiralförmig ins Unendliche geht.

Schon bei der Visualisierung von Vektorfeldern haben wir gesehen, daß es gelegentlich übersichtlicher ist, auf die Längeninformation zu verzichten und nur die Richtung zu betrachten. Bei Differentialgleichungen, bei denen es bei einer graphischen Lösung praktisch nur auf die *Richtung* des Vektorfelds in jedem Punkt ankommt, gilt dies umso mehr; oft versucht man daher die Lösungskurve durch ein auf Einheitslänge normiertes Vektorfeld zu führen. Abbildung 43 zeigt, wie dies im vorliegenden Beispiel aussieht.

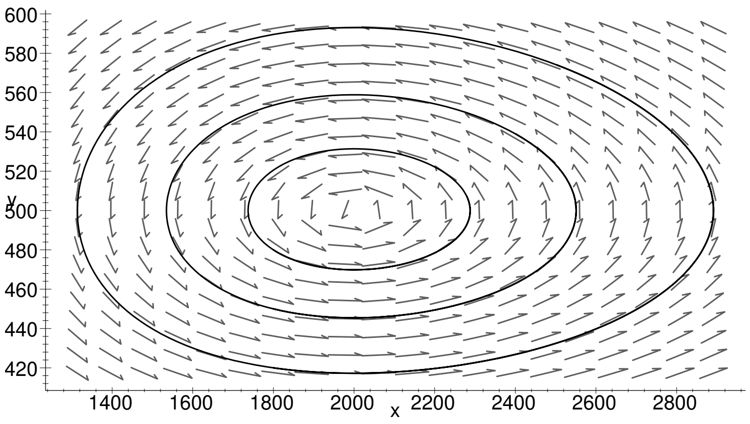


Abb. 43: Anpassung von Lösungskurven an das Vektorfeld

g) Stabilitätsfragen

Die Beschreibung eines realen Systems durch ein mathematisches Modell wie ein Differentialgleichungssystem ist abgesehen von einigen ganz einfachen Fällen immer mit einer Idealisierung verbunden; das reale System verhält sich daher nicht *exakt* so wie das Modell es vorhersagt. Auch die Anfangsbedingungen des Modells, die dem Zustand des realen Systems zu einem vorgegebenen Anfangszeitpunkt entsprechen, lassen sich nur durch fehlerbehaftete Messungen bestimmen. Hinzu kommt, daß man bei der Auswertung des mathematischen Modells nur selten wirklich mit reellen Zahlen rechnet; meistens rechnet man per Computer und somit (falls man keine sehr spezialisierte Mathematiksoftware benutzt) mit rundungsfehlerbehafteten Gleitkommaoperationen.

Aus einem mathematischen Modell abgeleiteten Aussagen können daher nur dann nützlich für die Vorhersage von realen Systemen sein, wenn sie stabil sind gegenüber kleineren Änderungen von Koeffizienten und Anfangsbedingungen.

Betrachten wir dazu ein Beispiel: Eine Größe $y(t)$ sei beschrieben durch das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = y(t) + 2e^{-t} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1\,.$$

Wie man sich sofort durch Einsetzen überzeugt, ist $y(t) = e^{-t}$ eine Lösung. Die rechte Seite

$$F(y,t) = y - e^{-t}$$

genügt offensichtlich auf ganz $\mathbb{R}^2$ einer LIPSCHITZ-Bedingung mit Konstante eins, denn $F_y(y,t) \equiv 1$, und man sieht auch direkt, daß

$$|F(y_1,t) - F(y_2,t)| = |y_1 - y_2| \le 1 \cdot |y_1 - y_2|$$

ist. Somit ist $y(t) = e^{-t}$ die *einzige* Lösung des Anfangswertproblems.

Trotzdem ist diese Lösung für alle praktischen Zwecke völlig wertlos:

$$\dot{y}(t) = y(t) - 2e^{-t}$$

ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, deren zugehörige homogene Gleichung

$$\dot{y}(t) = y(t)$$

die allgemeine Lösung

$$y(t) = \lambda e^{t}$$

hat. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist daher

$$y(t) = e^{-t} + \lambda e^{t} \quad \text{und} \quad y(0) = 1 + \lambda\,.$$

Sobald also die Anfangsbedingung auch nur minimal gestört wird, geht die Lösung für große t nicht mehr gegen null, sondern je nach Vorzeichen von λ gegen $\pm\infty$. Bei einem solchen *schlecht gestellten* oder *strukturell instabilen* Problem läßt sich also mathematisch nichts vorhersagen.

Auch eine numerische Lösung des Anfangswertsproblems wird wegen allfälliger Rundungsfehler über kurz oder lang die exakte Lösungskurve

$y(t) = e^{-t}$ verlassen und auf eine der zumindest anfänglich benachbarten anderen Kurven überwechseln, so daß auch sie für $t \to \infty$ divergiert. Abbildung 44 zeigt eine mit einem RUNGE-KUTTA-Verfahren der Ordnung vier/fünf berechnete numerische Lösung; wie man sieht, hat sie ab etwa $t = 14$ nichts mehr mit der korrekten Lösung zu tun.

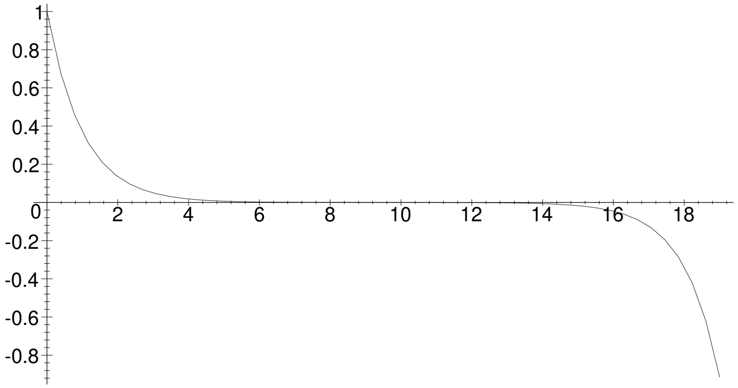


Abb. 44: Divergenz einer numerisch berechneten Lösungskurve

Anders sieht es aus beim Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = -y(t) + 1 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 .$$

Hier überzeugt man sich leicht, daß $y(t) = 1$ die einzige Lösung ist, aber jetzt hat die zugehörige homogene Differentialgleichung die allgemeine Lösung $y(t) = \lambda e^{-t}$; die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = -y(t) + 1$$

ist also

$$y(t) = 1 + \lambda e^{-t} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 + \lambda .$$

Kleine Störungen λ des Anfangswerts werden jetzt durch den Faktor e^{-t} weggedämpft; unabhängig von solchen Störungen bleibt also die Lösung $y \equiv 1$ stabil.

Um allgemeiner zu sehen, was in der Umgebung eines Gleichgewichts passieren kann, versuchen wir, die Gleichung in der Umgebung des

Gleichbewichts anzunähern durch die einzige Klasse von Differentialgleichungen, die wir wirklich beherrschen, die linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Dazu erinnern wir uns an die Definition einer differenzierbaren Funktion mehrerer Veränderlicher: $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_n$ ist im Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, wenn in einer Umgebung des Punktex gilt

$$F(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = F(\boldsymbol{x}) + J_F(\boldsymbol{x})\vec{h} + o\big(\|\vec{h}\|\big) ,$$

wobei $J_F(\boldsymbol{x})$ die JACOBI-Matrix von F in $\boldsymbol{x}$ ist.

Wir betrachten ein autonomes Differentialgleichungssystem

$$\dot{\vec{y}}(t) = F\big(\vec{y}(t)\big)$$

mit einer differenzierbaren Funktion F mit Fixpunkt $\vec{y}_0$. In der Umgebung des Fixpunkts ist dann

$$F(\vec{y}_0 + \vec{h}) = F(\vec{y}_0) + J_F(\vec{y}_0)\vec{h} + o\big(\|\vec{h}\|\big) = \vec{y}_0 + J_F(\vec{y}_0)\vec{h} + o\big(\|\vec{h}\|\big) ;$$

falls wir den Fehlerterm $o\big(\|\vec{h}\|\big)$ vernachlässigen, genügt also die Differenz

$$\vec{u}(t) \underset{\text{def}}{=} \vec{y}(t) - \vec{y}_0$$

zwischen der Gleichgewichtslösung und einer nahe benachbarten Lösung näherungsweise einer linearen homogenen Differentialgleichung

$$\dot{\vec{u}}(t) = J_F(\vec{y}_0)\vec{u}(t) .$$

Das Langzeitverhalten von deren Lösungen hängt, wie wir aus §3*c)* wissen, von den Eigenwerten der Matrix $J_F(\vec{y}_0)$ ab: Falls diese allesamt negativen Realteil haben, konvergiert jede Lösung $\vec{u}$ für $t \to \infty$ gegen den Nullpunkt; falls alle Eigenwerte positiven Realteil haben, divergiert jede Lösung außer der Null ins Unendliche. Im ersten Fall sprechen wir von einem *stabilen* oder *anziehenden* Fixpunkt, im zweiten von einem *instabilen* oder *abstoßenden.* Falls einige Eigenwerte positiven und andere negativen Realteil haben, reden wir von einem *Sattelpunkt;* hier hängt es von der Richtung ab, ob eine Störung weggedämpft wird oder nicht, allerdings wird in der Praxis fast jede Störung zur Divergenz führen, denn nur im linearen Unterraum, der von den Eigenvektoren zu den Eigenwerten mit negativem Realteil aufgespannt wird, werden die Störungen weggedämpft. Eine zufällige Störung wird aber meist sehr schnell aus diesem Unterraum herausführen, so daß dann auch Eigenwerte mit positivem Realteil eine Rolle spielen.

Bei Eigenwerten mit Realteil null reicht die Linearisierung nicht aus, um zu Aussagen über das Stabilitätsverhalten zu kommen, da dann die Terme höherer Ordnung das Geschehen dominieren. Es kann sehr schwer sein, in so einem Fall die Dynamik vorherzusagen.

Abbildung 45 zeigt das Vektorfeld in der Nähe eines stabilen Fixpunkts; alle Lösungskurven laufen auf diesen Punkt zu. Bei einem instabilen Fixpunkt hätten wir dasselbe Bild, nur daß dann alle Pfeile in Gegenrichtung zeigen würden.

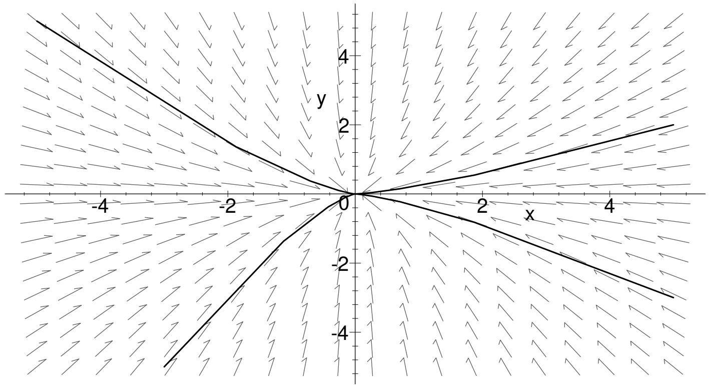


Abb. 45: Die Umgebung eines stabilen Fixpunkts

Auch in Abbildung 46 ist ein stabiler Fixpunkt zu sehen; hier hat aber die JACOBI-Matrix zwei konjugiert komplexe Eigenwerte, so daß sich benachbarte Lösungen spiralförmig auf den Fixpunkt zusammenziehen. Bei einem abstoßenden Fixpunkt hätten wir wieder im wesentlichen dasselbe Bild, aber mit umgedrehten Pfeilen.

Abbildung 47 zeigt die Umgebung eines Sattelpunkts; hier haben wir

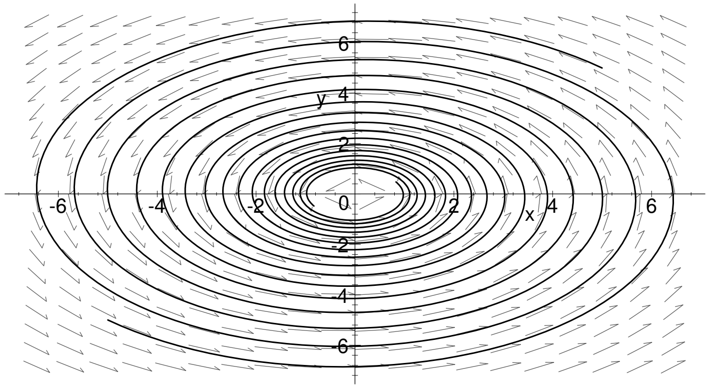


Abb. 46: Zwei konjugiert komplexe Eigenwerte mit negativem Realteil

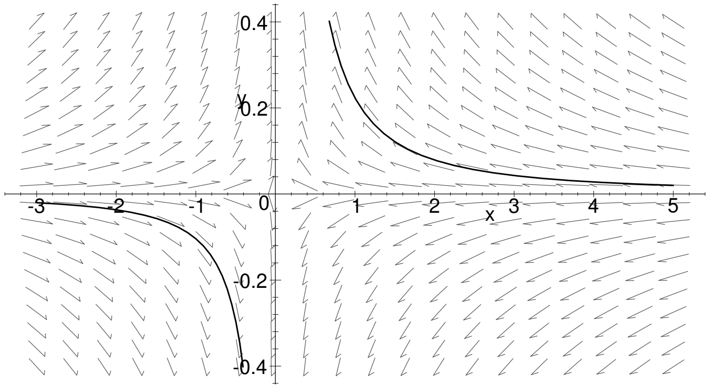


Abb. 47: Umgebung eines Sattelpunkts

Lösungskurven, die sich zwar asymptotisch der y-Achse annähern, auf dieser aber gegen plus oder minus unendlich gehen.

Als Beispiel wollen wir die Lösungen der LORENZ-Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= p\big(y(t) - x(t)\big)\\ \dot{y}(t) &= rx(t) - y(t) - x(t)z(t)\\ \dot{z}(t) &= -bz(t) + x(t)y(t)\end{aligned}$$

untersuchen. Dieses Differentialgleichungssystem ist eine extreme Vereinfachung der sogenannten NAVIER-STOKES-Gleichung, einer partiellen Differentialgleichung, die Strömungsphänomene beschreibt. Für technische Informatiker interessanter ist wohl, daß dasselbe System nach HAKEN (Phys. Lett. A53 (1975), 77–78) auch das Verhalten von Lasern beschreiben kann.

Die Funktionen $x(t), y(t)$ und $z(t)$ verlieren im Vereinfachungsprozeß ihre unmittelbare physikalische Bedeutung; die Parameter lassen sich allerdings physikalisch interpretieren: Für die atmosphärische Konvektion ist nach LORENZ

$$p = 10, \quad r = 28 \quad \text{und} \quad b = \frac{8}{3}$$

eine sinnvolle Wahl.

EDWARD NORTON LORENZ wurde 1917 im US-Bundesstaat Connecticut geboren; er studierte Mathematik in Dartmouth College (A.B. 1938) und Harvard (M.A. 1940). Nach seinem Kriegsdienst ging er ans MIT, wo er 1948 über Meteorologie promovierte. Sowohl dem MIT, wo er 1981 als Professor emeritiert wurde, als auch der Meteorologie blieb er fortan treu. Zu seinen vielen Auszeichnungen gehört unter anderem der Kyoto-Preis von 1991, der wohl höchstdotierte Wissenschaftspreis.

Da uns der erste Augenschein nichts über das Verhalten der Lösungen zeigt, empfiehlt es sich, daß wir uns durch numerische Simulation einen ersten Eindruck verschaffen. Abbildung 48 zeigt die Lösung des Anfangswertproblems mit $x(0) = 2$ und $y(0) = z(0) = 10$; die meisten werden ähnliche Bilder wohl schon gesehen haben.

Leider ist dieses Bild einerseits etwas unübersichtlich, andererseits zeigt es nur eine einzige Lösungskurve. Um besser zu verstehen, was hier passiert, beschränken wir uns auf die Funktion $x(t)$ und betrachten diese

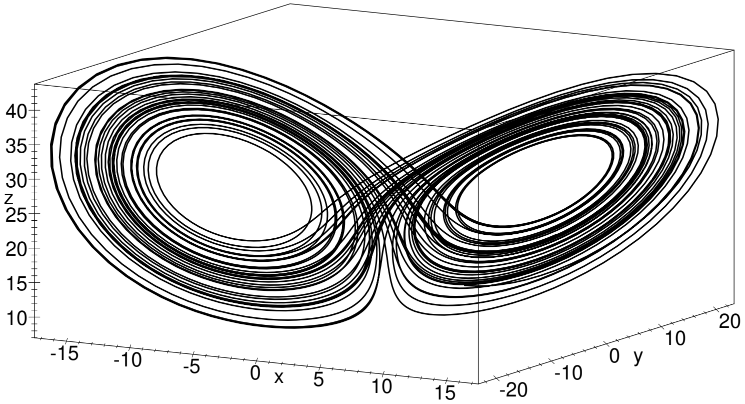


Abb. 48: Eine Bahnkurve des LORENZ-Systems

für zwei Lösungskurven; Abbildung 49 zeigt die für die Anfangsbedingungen

$$x(0) = 2, \quad y(0) = z(0) = 10 \quad \text{und} \quad x(0) = 2{,}01, \quad y(0) = z(0) = 10\,.$$

Wie man sieht, sind die beiden Lösungskurven bis etwa zum Zeitpunkt $t = 6{,}5$ praktisch ununterscheidbar, danach gehen sie aber recht schnell auseinander und haben ab etwa $t = 10$ nichts mehr miteinander zu tun.

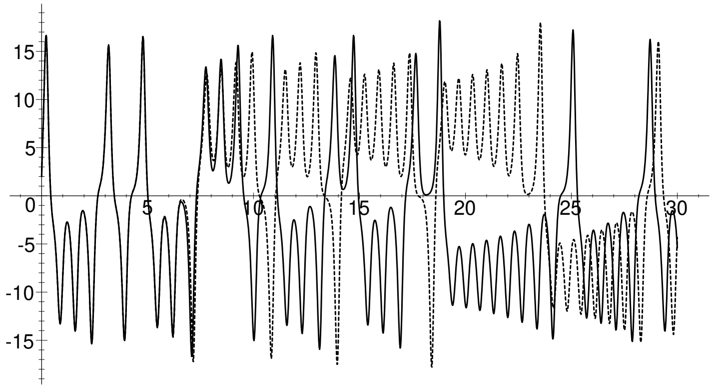


Abb. 49: Die x-Koordinaten zweier Lösungen mit benachbarten Anfangswerten

Fast das gleiche Bild ergibt sich, wenn wir die gestrichelte Kurve nicht mit $x(0) = 2{,}01$ anfangen lassen, sondern – bei sonst unveränderten Werten – bei

$$x(0) = 2{,}000001 = 2 + 10^{-6}\,.$$

Jetzt sind die Kurven zwar bis etwa $t = 16$ praktisch ununterscheidbar, aber spätestens ab etwa $t = 20$ haben sie auch hier nichts mehr miteinander zu tun.

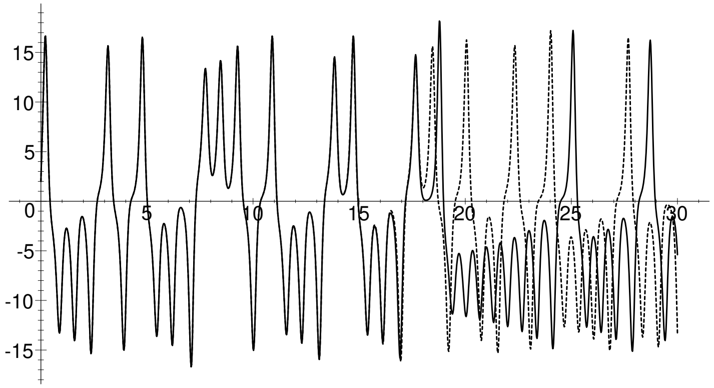


Abb. 50: Effekt einer Störung des Anfangswerts um 10^{-6}

Gerade beim zweiten Fall sollte uns das zu denken geben: Wenn wir Differentialgleichungen zur Vorhersage benutzen, stammen die Anfangsbedingungen im allgemeinen aus einer Messung. Man kann aber nur selten so genau messen, daß sich die beiden Werte 2 und 2,000001 unterscheiden ließen; um eine sinnvolle Voraussage über das Verhalten der Lösung zum Zeitpunkt $t = 20$ zu machen, *muß* man aber nach Abbildung 50 den Wert $x(0)$ mit dieser Genauigkeit kennen.

Es kommt noch schlimmer: In Abbildung 51 ist die dick ausgezogene Kurve wieder eine numerische Simulation der Lösung zu den Anfangsbedingungen $x(0) = 2$ und $y(0) = z(0) = 10$, die gestrichelte Kurve allerdings auch! Die beiden Kurven unterscheiden sich nur dadurch, daß die numerische Simulation bei der dick ausgezogenen Kurve (wie

auch bei allen anderen bisherigen Kurven) mit Schrittweite 0,02 arbeitete, wohingegen die Schrittweite für die gestrichelte Kurve mit 0,01 nur halb so groß war. Auch das reicht schon, daß die Kurven ab etwa $t = 10$ nichts mehr miteinander zu tun haben, und damit dürfte wohl auch klar sein, daß keine der bislang betrachteten Kurven für größere Werte von t irgendetwas mit der „wahren" Lösungsfunktion $x(t)$ zu tun hatte.

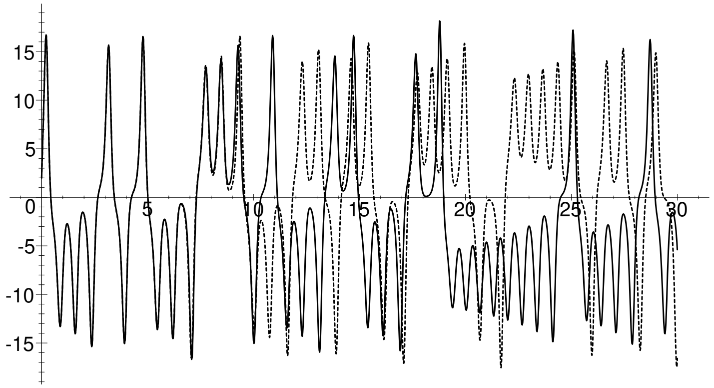


Abb. 51: Effekt einer Schrittweitenhalbierung bei der numerischen Simulation

LORENZ mußte dieses Verhalten der Lösungen auf die harte Weise lernen: Er fand zu seinem großen Erstaunen, daß sich seine Rechenergebnisse nicht reproduzieren ließen, wenn er Zwischenergebnisse für Kontrollrechnungen nur in gerundeter Form eintippte: Der geringe Rundungsfehler bei der Eingabe des Startwerts reichte bereits aus, um das Langzeitverhalten des Systems grundlegend zu verändern.

Falls das gleiche Phänomen auch in der wirklichen Atmosphäre auftritt, können also minimale Veränderungen etwa des Luftdrucks oder der Temperatur auf längere Sicht zu einer dramatisch anderen Entwicklung des Wetters führen – eine Idee, die vielen Meteorologen damals als zu phantastisch erschien um ernstgenommen zu werden: Am 22. Januar 1963 berichtete LORENZ vor der New York Academy of Sciences über seine Ergebnisse *(Trans. N.Y. Acad. Sci.* **25** *(1963), 409–432)* und schloß seinen Vortrag mit den Worten:

Als die Instabilität eines gleichförmigen Flusses gegenüber infinitesimalen Störungen erstmals als Erklärung für das Auftreten von Zyklonen und Antizyklonen in der Atmosphäre vorgeschlagen wurde, war diese Idee nicht allgemein akzeptiert. Ein Meteorologe bemerkte, daß, falls die Theorie korrekt wäre, ein Flügelschlag einer Möwe ausreichen würde, um die Entwicklung des Wetters für immer zu verändern. Die Kontroverse ist noch nicht entschieden, aber die neueste Evidenz scheint für die Möwen zu sprechen.

Inzwischen ist der Sieg der Möwen bekanntlich allgemein anerkannt; man fordert sogar nicht einmal mehr den relativ kräftigen Flügelschlag einer Möwe, um das Wetter permanent zu verändern: Im Dezember 1972 hielt LORENZ vor der American Association for the Advancement of Sciences in Washington, DC, einen Vortrag mit dem Titel *Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil set off a Tornado in Texas,* und seitdem geht das Wort vom *Schmetterlingseffekt* um die Welt.

Auch das Wort *Chaos* wird heute meist auf diese Weise definiert: Kleinste Änderungen bei den Anfangsbedingungen führen zu dramatischen Veränderungen des Langzeitverhaltens. Allerdings muß man hier aufpassen: Bei der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = y(t)$$

mit Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1 \quad \text{und} \quad y(0) = 1 + \varepsilon$$

unterscheiden sich die Lösungen $y(t) = e^t$ und $y(t) = (1 + \varepsilon) \cdot e^t$ zur Zeit t um $\varepsilon \cdot e^t$, was auch bei kleinsten ε-Werten sehr schnell eine sehr große Zahl wird: bei $\varepsilon = 10^{-6}$ und $t = 50$ etwa ist die Differenz bereits größer als $5 \cdot 10^{15}$. Trotzdem wird hier niemand von Chaos reden, denn beide Lösungen gehen sehr schnell gegen den „Gleichgewichtspunkt" unendlich. Von „echtem" Chaos verlangt man daher auch noch, daß die Lösungen nicht gegen eine (endliche oder unendliche) Gleichgewichtslösung konvergieren und auch nicht gegen eine periodische Lösung. Chaos in diesem Sinne ist sehr schwer nachzuweisen; für die LORENZ-Gleichung mit den klassischen Parameterwerten wurde erst Ende September 1999 ein *preprint* veröffentlicht, in dem dies (mit

großem theoretischen wie auch rechnerischem Aufwand) gezeigt wird; siehe `http://www.math.gatech.edu/~mischaik/papers/lor3.ps` .

Chaos heißt nun allerdings nicht, daß wir dann überhaupt nichts über das Verhalten der Lösungen aussagen können. Beispielsweise können wir bereits mit unseren einfachen Mitteln zeigen, daß das Bild in Abbildung 48 zumindest qualitativ das Verhalten der Lösungskurven korrekt wiedergibt – quantitativ ist natürlich ab spätestens etwa $t = 10$ alles falsch.

Dazu berechnen wir zunächst die Gleichgewichtslösungen: Im Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= p(y - x) \\ 0 &= rx - y - xz \\ 0 &= -bz + xy \end{aligned}$$

zeigt die erste Gleichung, falls wir den uninteressanten Fall $p = 0$ ausschließen, daß die x-Koordinate und die y-Koordinate eines jeden Fixpunkts übereinstimmen müssen.

Falls beide Koordinaten verschwinden, zeigt die dritte Gleichung ($b \neq 0$ vorausgesetzt), daß dann auch die z-Koordinate verschwinden muß; Einsetzen in die Gleichungen zeigt, daß der Nullpunkt in der Tat ein Fixpunkt ist.

Im Fall $x \neq 0$ können wir y in der zweiten Gleichung durch x ersetzen und dann durch x dividieren; dies ergibt die z-Koordinate

$$z = r - 1\,.$$

Damit zeigt die dritte Gleichung, daß es für $r \neq 1$ noch zwei weitere Fixpunkte gibt mit

$$x = y = \pm\sqrt{b(r-1)} \quad \text{und} \quad z = r - 1\,.$$

Die Untersuchung des relativ uninteressanten Nullpunkts sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen; hier seien nur die beiden anderen Fixpunkten betrachtet. Für

$$x = y = \pm\sqrt{b(r-1)} \quad \text{und} \quad z = r - 1$$

führen wir, wie oben im allgemeinen Fall, neue Variablen u, v und w ein, die den Abstand zum Fixpunkt beschreiben, d.h.

$$x = \pm\sqrt{b(r-1)} + u, \quad y = \pm\sqrt{b(r-1)} + v \quad \text{und} \quad z = r - 1 + w\,.$$

Zur Linearisierung in der Nähe des Gleichgewichtspunkt vernachlässigen wir alle nichtlinearen Terme in $u(t), v(t)$ und $w(t)$; das entstehende lineare Differentialgleichungssystem hat dann die JACOBI-Matrix im Fixpunkt als Matrix, ist also

$$\begin{pmatrix} \dot u(t) \\ \dot v(t) \\ \dot w(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -p & p & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 - (b+1+p)\lambda^2 - b(r-p)\lambda - 2pb(r-1)$$

ist für beide Fixpunkte dasselbe, verleitet aber nicht dazu, es allgemein lösen zu wollen. Wir setzen daher die von LORENZ vorgeschlagenen speziellen Parameterwerte ein und erhalten

$$-\lambda^3 - \frac{41}{3}\lambda^2 - \frac{304}{3}\lambda - 1440\,,$$

was immer noch so schlimm ist, daß wir es besser numerisch lösen. Die drei Lösungen ergeben sich näherungsweise als

$$-13{,}85457791 \quad \text{und} \quad 0{,}09395562396 \pm 10{,}19450522i\,.$$

Es gibt also einen negativen Eigenwert und zwei konjugiert komplexe Eigenwerte mit positivem Realteil. Damit ist klar, wie Lösungskurven des linearisierten Systems in der Nähe der beiden Fixpunkte aussehen: Der negative Eigenwert sorgt dafür, daß die Lösungen asymptotisch in die Ebene gedrückt werden, die von den Eigenvektoren zu den beiden anderen Eigenwerten aufgespannt wird, und die beiden komplexen Eigenwerte sorgen dafür, daß sie dort spiralförmig nach außen gehen.

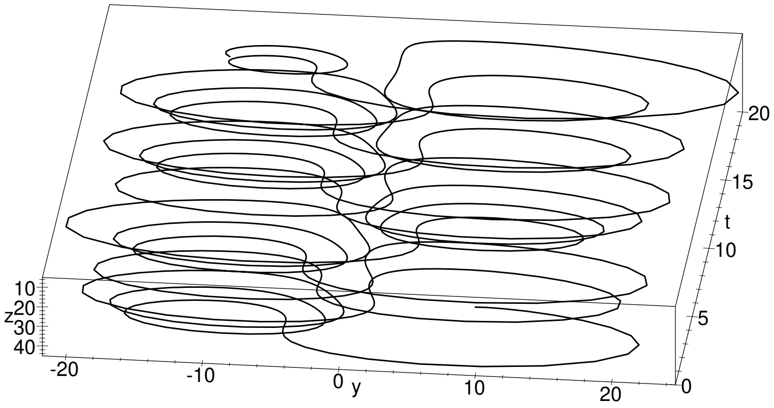


Abb. 52: y- und z-Koordinate als Funktion von t

Damit wird das Verhalten des LORENZ-Systems klar: Wir haben zwei Ebenen, die jeweils einen Sattelpunkt enthalten; kommt eine Lösung in die Nähe eines solchen Sattelpunkts, wird sie von der entsprechenden Ebenen eingefangen und geht dort spiralförmig nach außen. Wenn sie sich hinreichend weit vom Sattelpunkt entfernt hat, sind die Voraussetzungen für die obige Linearisierung nicht mehr gegeben; die Lösung kann daher der Ebenen entkommen, wird aber über kurz oder lang von der Ebenen des anderen Sattelpunkts eingefangen und so weiter. Abbildung 52 zeigt dieses Verhalten etwas klarer als Abbildung 48: Hier sind die die y- und die z-Koordinate der Lösungskurve über der Zeit aufgetragen.