gelegentlich Formeln finden, die zumindest näherungsweise ein brauchbares Ergebnis liefern. So konnte beispielsweise die NASA die Bilder des falsch fokusierten HUBBLE-Teleskops durch digitale Nachbehandlung so deutlich verbessern, daß die Bildqualität auch vor der Reperatur nicht viel schlechter war als bei einem korrekt fokusierten Teleskop.

Besonders einfach sind Faltungen mit δ-Funktionen zu berechnen: Für $\eta(t) = \delta(t - t_0)$ zeigt die Substitutionsregel mit $u = t - t_0 - s$, daß

$$\eta \star f = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - s) g(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) g(t - t_0 - u)\, du = g(t - t_0)$$

ist, Faltung mit $\delta(t - t_0)$ verschiebt also einfach das Argument um t_0. Insbesondere ist $\delta \star f = f$.

Im Falle einer Funktion, die außerhalb eines gewissen Intervalls null (oder praktisch null) ist, läßt sich durch Faltung mit einer Summe von δ-Funktionen der Graph an verschiedene Stellen verschieben; Abbildung 18 zeigt dies für die Faltung eines (fett eingezeichneten) Dreiecksimpulses auf $[-1, 1]$ und die Distribution

$$\delta(t - 4) + \delta(t - 2) + \delta(t) + \delta(t + 2) + \delta(t + 4)\,.$$

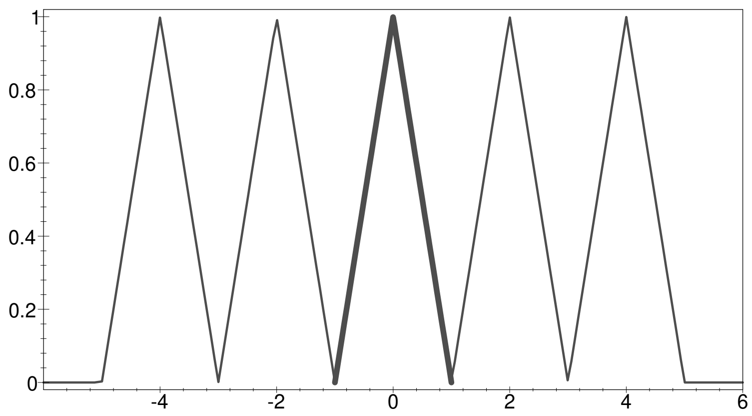

Abb. 18: Faltung eines Dreiecksimpuls mit einer Summe von δ-Distributionen

f) Die Plancherel-Formel

Eine wichtige Eigenschaft von FOURIER-Reihen war der Satz von PARSEVAL, der es erlaubte, die L^2-Norm einer periodischen Funktion sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich zu berechnen. Die PLANCHEREL-Formel ist das Analogon dieses Satzes für nichtperiodische Funktionen.

Definition: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *quadratintegrierbar,* wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt$$

existiert und konvergiert. Der Vektorraum aller quadratintegrierbarer Funktionen wird mit $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bezeichnet.

Nach dem ersten Lemma aus §5*a)* ist jede stark abfallende Funktion quadratintegrierbar, d.h. der SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegt in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Wie im Fall periodischer Funktionen können wir auf $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ein *fast* HERMITEsches Produkt einführen durch

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt\,.$$

Da $\big(|f(t)| - |g(t)|\big)^2 \geq 0$ ist, gilt nach der binomischen Formel

$$|f(t)| \cdot |g(t)| \leq \frac{1}{2}\Big(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\Big)\,,$$

also

$$\int_N^M |f(t)g(t)|\, dt \leq \frac{1}{2}\int_N^M f(t)\overline{g(t)}\, dt + \frac{1}{2}\int_N^M g(t)\overline{g(t)}\, dt$$

für alle $N \leq M \in \mathbb{R}$. Rechts konvergieren beide Integrale für $N \to -\infty$ und $M \to \infty$, also auch links, und damit konvergiert das Integral zu (f, g) sogar absolut.

Es hat alle Eigenschaften eines HERMITEschen Produkts mit Ausnahme der positiven Definitheit – genau wie wir es vom periodischen Fall her gewohnt sind. Wie dort bezeichnen wir

$$\|f\|_2 \underset{\text{def}}{=} \sqrt{(f,\, f)}$$

kurz, wenn auch schlampig als L^2-Norm von f, denn – wie schon bei den periodischen Funktionen – können die Funktionen $f \neq 0$ mit $\|f\|_2 = 0$ für die meisten Anwendungen *praktisch* vernachlässigt werden.

Definition: Wir bezeichnen $f \in L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ als *eine* Nullfunktion, wenn $\|f\|_2 = 0$ ist.

Nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung, die wir in §3*e)* aus gutem Grund auch für Produkte bewiesen haben, die nur bis auf die positive Definitheit HERMITEsch sind, ist dann für eine beliebige Funktion $g \in L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$

$$|(f,\, g)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 = 0\,,$$

für eine Nullfunktion f verschwindet also jedes Produkt $(f,\, g)$, und umgekehrt ist auch jede Funktion mit dieser Eigenschaft eine Nullfunktion, denn $\|f\|_2$ ist ja die Wurzel aus $(f,\, f)$.

Für eine quadratintegrierbare Funktion $f \in L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ können wir eine lineare Abbildung

$$\widetilde{T}_f\colon \begin{cases} L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \qquad g \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt \end{cases}$$

definieren, die auf dem SCHWARTZ-Raum mit T_f übereinstimmt. Vergleich mit dem Produkt

$$(f,\, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

zeigt, daß

$$\widetilde{T}_f(g) = (f,\, \overline{g}) = (g,\, \overline{f})$$

ist. Insbesondere ist $\widetilde{T}_f$ genau dann gleich der Nullabbildung, wenn f eine Nullfunktion ist.

Wie im Fall von T_f rechnet man auch hier schnell nach, daß $\widetilde{T}_f$ der Stetigkeitsbedingung

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{T}_f(g_n) = \widetilde{T}_f\big(\lim_{n\to\infty} g_n\big)$$

genügt, hier allerdings sogar für nur bezüglich der L^2-Norm konvergente Folgen (g_n).

Außerdem ist nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung

$$\big|T_f(g)\big| = |(f,\, \overline{g})| \leq \|f\|_2 \cdot \|\overline{g}\|_2 = \|f\|_2 \cdot \|g\|_2\,,$$

$\big|T_f(g)\big|$ läßt sich also durch die L^2-Norm von g abschätzen.

Diese Eigenschaft hat nicht jede stetige lineare Abbildung von $L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ nach $\mathbb{C}$: Beispielsweise ist für die Fortsetzung

$$\widetilde{\Delta}_0\colon \begin{cases} L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \qquad\qquad g \mapsto g(0) \end{cases}$$

der DIRAC-Distribution Δ_0 auf $L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ und den Rechteckimpuls

$$g_a\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } |t| \leq \frac{1}{a^2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

die L^2-Norm gleich

$$\|g_a\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g_a|^2\,(t)\,dt} = \sqrt{\int_{-1/a^2}^{1/a^2} a^2(t)\,dt} = \sqrt{2}$$

für jedes $a \neq 0$, aber

$$\Delta_0(g_a) = g_a(0) = a$$

kann trotzdem unbeschränkt wachsen. Hier kann $|\Delta_0(g)|$ also nicht durch $\|g\|_2$ abgeschätzt werden.

Definition: Eine lineare Abbildung $T\colon L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ heißt *beschränkt,* wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$|T(g)| \le c\,\|g\|_2 \quad \text{für alle } g \in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})\,.$$

Das Infimum aller Zahlen c, die diese Eigenschaft haben, bezeichnen wir dann als die *Norm* $\|T\|$ von T.

Für $f \in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ ist $\widetilde{T}_f$ also beschränkt und hat die Norm $\|f\|_2$.

Das Schöne an quadratintegrierbaren Funktionen ist, daß sich diese Aussage auch umkehren läßt:

Satz von Riesz: Zu jeder beschränkten und stetigen linearen Abbildung $T\colon L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ gibt es eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$, so daß $T = \widetilde{T}_f$ ist und $\|f\|_2 = \|T\|$. Die Funktion f ist bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmt.

Der *Beweis* ist etwas langwierig, aber seine Grundidee ist einfach:

Angenommen, wir betrachteten anstelle von $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ den endlichdimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Dann wissen wir natürlich, daß sich $T(\vec{x})$ schreiben läßt als

$$T(\vec{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

mit geeigneten reellen Zahlen a_1, a_2 und a_3. Diese können wir zusammenfassen zu einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, für den

$$T(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$$

ist. Dieser Vektor $\vec{a}$ entspricht der gesuchten Funktion f; er steht offensichtlich senkrecht auf dem Untervektorraum

$$E = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; T(\vec{x}) = 0\right\},$$

der außer für $\vec{a} = \vec{0}$ eine Ebene beschreibt, und er ist dadurch bis auf eine Proportionalitätskonstante endeutig bestimmt.

In Analogie dazu betrachten wir für den Satz von RIESZ den Untervektorraum

$$N \underset{\text{def}}{=} \left\{g \in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C}) \;\middle|\; T(g) = 0\right\}.$$

Falls $N = L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ ist, sind wir fertig: Dann verschwindet $T(g)$ überall, und $f \equiv 0$ erfüllt alle Behauptungen.

Andernfalls gibt es eine Funktion $h \in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$, die nicht in N liegt.

Der erste und umständlichste Beweisschritt besteht darin, daß wir uns überlegen, daß es auch eine Funktion

$$\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C}) \setminus N \quad \text{mit} \quad \left(\widetilde{f}, g\right) = 0 \quad \text{für alle } g \in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$$

gibt, die orthogonal zu N ist.

Dazu betrachten wir den Abstand

$$d \underset{\text{def}}{=} \inf_{g\in N} \|h - g\|_2$$

von g und h.

(Zur Erinnerung: In der Schule definiert man den Abstand eines Punkts von einer Ebenen als den Abstand zum nähesten Punkt auf Ebenen; dieser näheste Punkt ist der Lotfußpunkt; der Verbindungsvektor dorthin steht also senkrecht auf der Ebenen. Bei einem unendlichdimensionalen Raum wie N können wir nicht sicher sein, daß es so etwas wie einen „Lotfußpunkt" gibt – in der Tat besteht die Hauptarbeit des ersten Beweisschritts genau darin, dies zu zeigen. Deshalb können wir (noch) nicht von einem minimalen Abstand reden, sondern müssen uns zunächst mit einem Infimum begnügen. Wir hoffen aber (zu recht, wie sich bald zeigen wird, daß der „Lotfußpunkt" auch in unserem Fall existiert und daß der „Lotvektor" senkrecht auf N steht.)

Obwohl h nicht in N liegt, können wir zumindest *a priori* nicht sicher sein, daß obiges Infimum positiv ist – wenn wir anstelle einer *beschränkten* stetigen linearen Abbildung T beispielsweise die stetige lineare Abbildung $\widetilde{\Delta}_0$ betrachten würden, wäre $d = 0$.

Da unser T aber beschränkt ist, haben wir eine Konstante $c > 0$, so daß

$$|T(g)| \le c\,\|g\|_2 \quad \text{für alle } g \in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})\,.$$

Insbesondere ist für jedes $g \in N$

$$|T(h)| = |T(h) - T(g)| = |T(h - g)| \le c\,\|h - g\|_2\,.$$

$T(h)$ verschwindet nicht, da h nicht in N liegt; folglich ist

$$\|h-g\|_2 \geq \left|\frac{T(h)}{c}\right| \quad \text{für alle } g \in L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})\,.$$

Damit ist auch das Infimum d aller dieser Werte größer oder gleich $|T(h)|\,/c$, also positiv.

Ein Infimum muß nicht angenommen werden, man kann ihm aber beliebig nahekommen. Somit gibt es eine Folge (g_n) von Funktionen aus N, so daß $\lim_{n\to\infty} \|h-g_n\|_2 = d$ ist.

Eine (ziemlich langweilige) Abschätzung zeigt, daß diese Folge eine CAUCHY-Folge ist, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n_0, so daß

$$\|g_m - g_n\|_2 \leq \varepsilon \quad \text{für } n, m > n_0\,.$$

Die Einzelheiten seien zum leichteren Überlesen im Kleindruck angegeben:

Zunächst ist für beliebige Funktionen p und q

$$\|p+q\|_2^2 = (p+q,\ p+q) = (p,\ p) + (p,\ q) + (q,\ p) + (q,\ q)$$

und

$$\|p-q\|_2^2 = (p-q,\ p-q) = (p,\ p) - (p,\ q) - (q,\ p) + (q,\ q)\,,$$

also

$$\|p+q\|_2^2 + \|p-q\|_2^2 = 2\left(\|p\|_2^2 + \|q\|_2^2\right)\,.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\|g_m - g_n\|_2^2 &= \|(h-g_m)-(h-g_n)\|_2^2\\ &= 2\left(\|h-g_m\|_2 + \|h-g_n\|_2^2\right) - \|2h-g_m-g_n\|_2^2\\ &= 2\left(\|h-g_m\|_2 + \|h-g_n\|_2^2\right) - 4\left\|h-\frac{g_m-g_n}{2}\right\|_2^2\\ &\leq 2\left(\|h-g_m\|_2 + \|h-g_n\|_2^2\right) - 4d^2\,,\end{aligned}$$

denn mit g_m und g_n liegt auch $(g_m+g_n)/2$ in N, hat also mindestens Abstand d von h.

Da für die Folge der g_n die Abstände $\|h-g_n\|_2$ gegen d konvergiert, konvergiert auch die Folge der Abstandsquadrate gegen d^2, und es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, so daß

$$\|h-g_n\|_2^2 \leq d^2 + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für } n > n_0\,.$$

Für $n, m > n_0$ ist daher

$$\|g_m - g_n\|_2^2 \leq 2\left(d^2 + \frac{\varepsilon}{4} + d^2 + \frac{\varepsilon}{4}\right) - 4d^2 = \varepsilon\,,$$

wie behauptet.

Als nächstes müssen wir uns überlegen, daß in $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ jede CAUCHY-Folge konvergiert; auch dazu sei wieder Kleindruck ausreichend:

Offensichtlicher Kandidat für eine Grenzfunktion ist die Funktion, die jedem Wert t den Limes der $g_n(t)$ zuordnet; leider gibt es aber zunächst keinen Grund, warum diese Folge von Funktionswerten für jedes t konvergieren sollte. Wir müssen daher etwas härter arbeiten.

Wir verschaffen uns zunächst eine Folge von Werten $\varepsilon_\nu > 0$, für die

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu < \infty$$

konvergiert – beispielsweise können wir $\varepsilon_\nu = \frac{1}{\nu^2}$ setzen. Da (g_n) eine CAUCHY-Folge ist, gibt es zu jedem dieser ε_ν ein n_ν, so daß

$$\|g_n - g_m\|_2 \leq \varepsilon_\nu \quad \text{für alle } n, m > n_\nu\,.$$

Insbesondere ist also

$$\|g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu}\|_2 \leq \varepsilon_\nu\,.$$

Damit ist für jede natürliche Zahl k

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=k}^{\infty} \varepsilon_\nu &\geq \lim_{\ell\to\infty} \sum_{\nu=k}^{\ell} \|g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu}\|_2 \geq \lim_{\ell\to\infty} \left\|\sum_{\nu=k}^{\ell} (g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu})\right\|_2\\ &= \lim_{\ell\to\infty} \|g_{n_{\ell+1}} - g_{n_k}\|_2\,.\end{aligned}$$

Da die linke Seite für $k \to \infty$ wegen der Konvergenz der Summe der ε_ν gegen null geht, gilt dies auch für die rechte. Daher muß es eine Funktion $\widetilde{g}$ geben, die fast überall mit

$$t \mapsto \lim_{\nu\to\infty} g_{n_\nu}(t)$$

übereinstimmt und für die

$$\lim_{\nu\to\infty} \|\widetilde{g} - g_{n_\nu}\|_2 = 0$$

ist. Da alle g_{n_ν} in $L^{(}\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ liegen, zeigt die Dreiecksungleichung, daß auch $\widetilde{g}$ dort liegen muß, und eine letzte Anwendung der Dreiecksungleichung zeigt auch, daß nicht nur die Teilfolge der g_{n_k}, sondern die Folge aller g_n in der L^2-Norm gegen $\widetilde{g}$ konvergiert.

Damit wissen wir also, daß der Grenzwert

$$\widetilde{g} = \lim_{n\to\infty} g_n$$

in $L^2(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$ existiert. Da

$$T\left(\widetilde{g}\right) = T\left(\lim_{n\to\infty} g_n\right) = \lim_{n\to\infty} T(g_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

ist, liegt $\widetilde{g}$ in N.

Die Funktion $\widetilde{g}$ entspricht dem „Lotfußpunkt"; der „Lotvektor"

$$\widetilde{f} = h - \widetilde{g}\,,$$

von dem wir bislang nur wissen, daß $\left\|\widetilde{f}\right\|_2 = d$ ist, sollte also orthogonal zu N sein.

Für eine beliebige Funktion $g \in N$ und eine reele Zahl $\lambda \neq 0$ betrachten wir den Abstand

$$\left\|h - \left(\widetilde{g} + \lambda g\right)\right\|_2 \,.$$

Da $\widetilde{g} + \lambda g$ in N liegt, ist dieser Abstand mindestens gleich d, d.h.

$$\begin{aligned} d^2 &\le \left\|h - \left(\widetilde{g} + \lambda g\right)\right\|_2^2 = \left\|\left(h - \widetilde{g}\right) - \lambda g\right\|_2^2 = \left\|\widetilde{f} - \lambda g\right\|_2^2 \\ &= \left(\widetilde{f} - \lambda g,\, \widetilde{f} - \lambda g\right) = \left\|\widetilde{f}\right\|_2^2 + \lambda^2 \|g\|_2^2 - \lambda\left(g,\, \widetilde{f}\right) - \overline{\lambda}\left(\widetilde{f},\, g\right) . \end{aligned}$$

Da $\left\|\widetilde{f}\right\|_2^2 = d^2$ und $\overline{\lambda} = \lambda$ ist, folgt nach Division durch λ, daß

$$\begin{aligned} 0 &\le \lambda \|g\|_2 - \left(\left(g,\, \widetilde{f}\right) + \left(\widetilde{f},\, g\right)\right) = \lambda \|g\|_2 - \left(\left(g,\, \widetilde{f}\right) + \overline{\left(g\, \widetilde{f}\right)}\right) \\ &= \lambda \|g\|_2 - 2\,\mathfrak{Re}\left(g,\, \widetilde{f}\right) \end{aligned}$$

für alle reellen $\lambda \neq 0$. Lassen wir λ, sowohl von links, als auch von rechts, gegen null gehen, folgt also

$$\mathfrak{Re}\left(g,\, \widetilde{f}\right) = 0\,.$$

Die Funktion $g \in N$ war beliebig; da mit g auch ig in N liegt, ist also auch

$$\mathfrak{Re}\left(ig,\, \widetilde{f}\right) = \mathfrak{Re}\left(i \cdot \left(ig,\, \widetilde{f}\right)\right) = -\,\mathfrak{Im}\left(ig,\, \widetilde{f}\right) = 0\,,$$

insgesamt also

$$\left(ig,\, \widetilde{f}\right) = 0\,.$$

$\widetilde{f}$ steht also in der Tat senkrecht auf allen $g \in N$.

Wir wollen uns überlegen, daß

$$f \underset{\text{def}}{=} \frac{T\left(\widetilde{f}\right)}{\left\|\widetilde{f}\right\|_2^2} \cdot \overline{\widetilde{f}}$$

alle gewünschten Eigenschaften hat: Für $g \in L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ ist

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_f(g) = \left(g,\, \overline{f}\right) &= \left(g,\, \overline{\frac{T\left(\widetilde{f}\right)}{\left\|\widetilde{f}\right\|_2^2} \cdot \overline{\widetilde{f}}}\right) = \left(g,\, \frac{\overline{T\left(\widetilde{f}\right)}}{\left\|\widetilde{f}\right\|_2^2} \cdot \widetilde{f}\right) \\ &= \frac{T\left(\widetilde{f}\right)}{\left\|\widetilde{f}\right\|_2^2}\left(g,\, \widetilde{f}\right) . \end{aligned}$$

Insbesondere ist also $\widetilde{T}_f(g) = 0$ für alle $g \in N$ nach Konstruktion von $\widetilde{f}$.

Für ein Vielfaches $\lambda\widetilde{f}$ von $\widetilde{f}$ ist

$$\widetilde{T}_f\left(\lambda\widetilde{f}\right) = \frac{T\left(\widetilde{f}\right)}{\left\|\widetilde{f}\right\|_2^2}\left(\lambda\widetilde{f},\, \overline{\widetilde{f}}\right) = \frac{T\left(\widetilde{f}\right)}{\left\|\widetilde{f}\right\|_2^2}\lambda \left\|\overline{f}\right\|_2^2 = \lambda T\left(\widetilde{f}\right) = T\left(\lambda\widetilde{f}\right) ,$$

auch in diesem Fall stimmen T_f und T somit überein. Wegen der Linearität von T und von $\widetilde{T}_f$ ist daher

$$\widetilde{T}_f\left(g + \lambda\widetilde{f}\right) = T\left(g + \lambda\widetilde{f}\right) \quad \text{für alle } g \in \mathbb{N},\ \ \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Eine beliebige Funktion $h \in L^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ können wir in der Form

$$h = \left(h - \frac{T(h)}{T\left(\widetilde{f}\right)}\widetilde{f}\right) + \frac{T(h)}{T\left(\widetilde{f}\right)}\widetilde{f}$$

darstellen. Da

$$T\left(h - \frac{T(h)}{T\left(\widetilde{f}\right)}\widetilde{f}\right) = T(h) - \frac{T(h)}{T\left(\widetilde{f}\right)}T\left(\widetilde{f}\right) = T(h) - T(h) = 0$$

verschwindet, liegt der erste Summand in N, und der zweite ist natürlich ein Vielfaches von $\widetilde{f}$. Also läßt sich jede quadratintegrierbare Funktion darstellen als Summe einer Funktion aus N und einem Vielfachen von $\widetilde{f}$, die linearen Abbildungen T und $\widetilde{T}_f$ stimmen also überein.

Damit sind wir fast fertig: Wenn $T = \widetilde{T}_f$ ist, haben beide Abbildungen natürlich auch dieselbe Norm, und wir wissen bereits, daß $\widetilde{f}$ dieselbe Norm hat wie $\widetilde{f}$, d.h.

$$\|T\| = \left\|\widetilde{T}_f\right\| = \|f\|_2 \ .$$

■

FRIGYES RIESZ (1880–1956) studierte Mathematik in Budapest, Göttingen und Zürich. 1902 promovierte er in Budapest mit einer Arbeit über Geometries, 1911 wurde er Professor an der damals ungarischen Universität Kolozsvár. Nachdem Kolozsvár 1920 rumänisch wurde, zog er mit der Universität um nach Szeged. 1945 bekam er einen Lehrstuhl an der Universität Budapest.

RIESZ ist einer der Väter der *Funktionalanalysis,* jener mathematischen Disziplin also, die Funktionenräume mit analytischen Methoden untersucht. Den obigen Satz bewies er 1907.

FOURIER-Transformationen im Distributionensinn mit schönen Eigenschaften kennen wir nur auf dem SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; wir wollen uns als nächstes überlegen, daß wir solche Distributionen auf $L^2(\mathbb{R}, C)$ fortsetzen können.

Lemma: Zu jeder Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gibt es eine Folge von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_2 = 0$$

ist; f läßt sich also bezüglich der L^2-Norm beliebig gut durch stark abfallende Funktionen annähern.

Beweis: In einem ersten Schritt wollen wir uns überlegen, daß f bezüglich der L^2-Norm als Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen τ_n mit jeweils nur endlich vielen Sprungstellen dargestellt werden kann. Dieser Schritt hängt mit dem Begriff der *Integrierbarkeit* zusammen; da Integrierbarkeit im Rahmen der Vorlesung *Höheren Mathematik*

nie sorgfältig definiert wurde, müssen wir leider auch hier schlampen und diesem wichtigen Schritt einfach auslassen *bzw.* glauben.

Jede dieser Treppenfunktionen τ_n ist eine Summe von endlich vielen Rechteckimpulsen R_{ni}, von denen wiederum jeder als Grenzwert einer Folge $(\psi_{nij})_{j\in\mathbb{N}}$ stark abfallender Funktionen geschrieben werden kann. Mit

$$\varphi_{nj} = \sum_i \psi_{nij}$$

ist dann auch

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_{nj} = \lim_{j\to\infty} \sum_i \psi_{nij} = \sum_i R_{ni} = \tau_n \ ,$$

denn die Summen über i sind endlich. Genau deshalb liegen die Funktionen φ_{ni} auch in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, und damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{nn} = \lim_{n\to\infty} \tau_n = f \ ,$$

wie behauptet.

■

Korollar: Zu jeder Distribution $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ gibt es eine stetige lineare Abbildung $\widetilde{T}: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, die auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ mit T übereinstimmt.

Beweis: Jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ läßt sich als Limes einer Folge φ_n stark abfallender Funktionen schreiben; wir setzen einfach

$$\widetilde{T}(f) = \lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) \ .$$

■

Damit haben wir alle Vorbereitungen zusammen und können endlich beweisen, worauf es wirklich ankommt:

Satz von Plancherel: Zu jeder Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gibt es eine Funktionen $\widehat{f}$ und $\check{f}$ in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, so daß

$$\widehat{T}_f = T_{\widehat{f}} \quad \text{und} \quad \check{T}_f = T_{\check{f}}$$

ist; FOURIER-Transformierte und inverse FOURIER-Transformierte von f existieren also als Funktionen. $\check{f}$ und f unterscheiden sich höchstens durch eine Nullfunktion. Außerdem ist

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2 \quad \text{und} \quad \left\|\check{f}\right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\|f\|_2 \;.$$

Beweis: Nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung ist für jede stark abfallende Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\left|\widehat{T}_f(\varphi)\right| = \left|T_f\big(\widehat{\varphi}\big)\right| = \left|\big(f, \overline{\widehat{\varphi}}\big)\right| \le \|f\|_2\,\|\widehat{\varphi}\|_2 \;.$$

Wie wir aus §5*d)* wissen, ist $\|\widehat{\varphi}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|\varphi\|_2$, also

$$\left|\widehat{T}_f(\varphi)\right| \le \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2\,\|\varphi\|_2 \;.$$

Nach dem Satz von RIESZ gibt es daher eine Funktion $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, für die

$$\widehat{T}_f = T_{\widehat{f}}$$

ist. Ihre Norm ist gleich der von $\widehat{T}_f$, also ist nach obiger Abschätzung

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2 \le \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2 \;.$$

Genauso zeigt man auch die Existenz von $\check{f}$ und daß gilt

$$\left\|\check{f}\right\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\|f\|_2 \;.$$

Da die Distributionen $\check{\widehat{T}}$ und T übereinstimmen, unterscheiden sich $\check{\widehat{f}}$ und f höchstens durch eine Nullfunktion, haben also insbesondere dieselbe Norm. Nach den bislang bewiesenen Ungleichungen ist

$$\left\|\check{\widehat{f}}\right\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\widehat{f}\right\|_2 \le \|f\|_2 \;;$$

da links und rechts dieselbe Zahl steht, muß in beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen gelten, und der Satz ist bewiesen. ■

MICHEL PLANCHEREL (1885–1967) war Professor für höhere Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, publizierte seine Arbeiten aber in französischer Sprache. Diese befassen sich nicht nur mit der der FOURIER-Theorie einer und mehrerer Veränderlicher, sondern enthalten beispielsweise auch wichtige Sätze aus der sogenannten Ergodentheorie, der allgemeinen Theorie dynamischer Systeme. Seine letzte, 1962 erschienene Arbeit, befaßt sich mit dem Einfluß der Steuergesetze auf die Stabilität einer Volkswirtschaft. Den obigen Satz bewies er 1910; oft wird auch nur dessen letzte Aussage als PLANCHEREL-Formel bezeichnet.

g) Mehrdimensionale Faltungen und Fourier-Integrale

In völliger Analogie zum eindimensionalen Faltungsintegral läßt sich auch ein n-dimensionales definieren: Für zwei Funktionen

$$f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}\,,$$

definieren wie die Faltung als

$$f * g = \int\underset{\mathbb{R}^n}{\cdots}\int f(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)\,g(y_1, \ldots, y_n)\,dy_1 \ldots dy_n$$

– sofern dieses Integral existiert.

Auch die anschauliche Interpretation ist dieselbe wie im eindimensionalen Fall: Wenn wir f als eine Gewichtsfunktion auffassen, ist $f * g$ ein gewichtetes Mittel über Werte von g; für

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\pi^{n/2}\sigma^n}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_i^2}$$

etwa, die n-dimensionale GAUSS-Funktion, entspricht das im Fall $n = 2$ einem je nach Größe von σ mehr oder weniger defokusierten Bild.

Durch mehrdimensionale Faltungen mit δ-Distributionen lassen sich Verschiebungungen realisieren: Beispielsweise wäre, wenn der Sazu von FUBBINI in einer solchen Situation anwendbar wäre,

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \delta(x-a)\delta(y-b)f(x,y)\,dx\,dy = f(x-a, y-b)\,,$$

und genau so *definieren* wir die Interpretation der *a priori* sinnlosen linken Seite.

(Man beachte, daß Ausdrücke wir $\delta(x-a)\delta(x-b)$ oder $\delta(x)^2$ weiterhin sinnlos bleiben, egal ob sie unter einem oder mehreren Integralzeichen stehen.)

Ist also $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die (z.B. durch Grauwerte) ein Bild definiert und die außerhalb des Bereichs $0 \le x, y \le 1$ verschwindet, so ist mit der Distribution

$$\eta(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} \delta(x-k)\delta(y-\ell)$$

die Faltung $\eta \star f$ ein Bilderbogen aus NM Exemplaren dieses Bildes. Abbildung 19 zeigt dies für den Graph einer zweidimensionalen Normalverteilung.

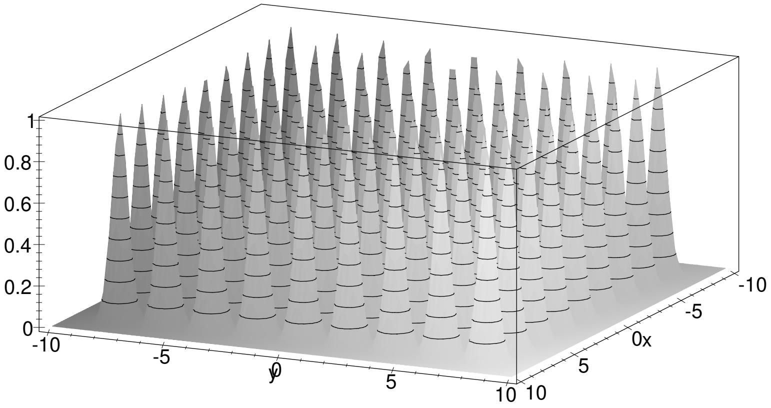

Abb. 19: Eine zweidimensionale Faltung

Auch die FOURIER-Transformation läßt sich in völliger Analogie zum eindimensionale Fall auf beliebige Dimensionen verallgemeinern: Für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definieren wir

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \\ (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \int \underset{\mathbb{R}^n}{\cdots} \int f(x_1, \dots, x_n) e^{-i\sum_{k=1}^n \omega_i x_i}\, dx_1 \cdots dx_n \end{cases}.$$

Da es nur eine Zeit gibt, läßt sich dies nicht als Zerlegung eines zeitlichen Signals in seine Frequenzen interpretieren; die x_i sollte man sich hier als *räumliche* Koordinaten vorstellen. Beispiele dazu folgen im nächsten Abschnitt, wo wir eine Anwendung solcher räumlicher FOURIER-Transformationen betrachten.

Wenigsten kurz sei noch angedeutet, wie man auch die mehrdimensionale FOURIER-Theorie über stark abfallende Funktionen mehrerer Veränderlicher exakt begründen kann:

Eine Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *stark abfallend,* wenn *alle* Ausdrücke der Form

$$x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n} \frac{\partial^{r_1+\cdots+r_n}}{\partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_n}} \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

auf ganz $\mathbb{R}^n$ beschränkt sind. Der Vektorraum aller dieser Funktionen ist der SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Für Funktionen auf diesem Raum ist wieder alles relativ problemlos; zur Verallgemeinerungen auf interessantere Funktionen geht man wieder den Umweg über Distributionen

$$T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C},$$

die in der naheliegenden Weise als Verallgemeinerungen eindimensionaler Distribibutionen definiert werden. Beispielsweise kann man dem gerade *ad hoc* betrachteten Produkt $\delta(x-a)\delta(y-b)$ über die Distribution

$$\Delta_{a,b}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \varphi(a,b) \end{cases}$$

einen präzisen Sinn geben – solange es in einem sinnvollen Kontext unter zwei Integralzeichen steht.

h) Fraunhofer-Beugung

Wenn Licht auf Strukturen trifft, in Vergleich zu deren Größe seine Wellenlänge nicht mehr vernachlässigbar klein ist, lassen sich die Gesetze der geometrischen Optik bekanntlich nicht mehr anwenden; man beobachtet dann Beugungsphänomene.

Beugung ist ein sehr komplexes Gebiet; für ein Beispiel im Rahmen einer Vorlesung über Höhere Mathematik müssen wir uns auf den allereinfachsten Fall beschränken. Wir gehen daher aus von einem Lichtstrahl, der aus sehr großer Entfernung kommt oder der zumindest (z.B. dank einer Linse, aus deren Brennpunkt er kommt) so aussieht, und beobachten auch die Beugungsfigur in großer Entfernung. Diese Situation bezeichnet man als FRAUNHOFER-Beugung.

JOSEPH VON FRAUNHOFER (1787–1826) wurde in Straubing als elftes und letztes Kind eines Glasermeisters geboren; er machte auch selbst eine Lehre als Glasschleifer und Spiegelmacher. Daneben besuchte er die Feierabendschule, wo er zumindest primitive Grundkenntnisse im Rechnen erwarb. 1806 kam er an das optische Institut von UTZSCHNEIDER, der ihm Bücher über Optik und Mathematik besorgte. FRAUNHOFER entwikkelte Präzisionsmaschinen zur Fertigung optischer Instrumente von bis dahin nicht gekannter Qualität und erfand auch das optische Gitter. Durch seine Versuche zur Lichtbeugung bewies er die Wellennatur des Lichts. 1824 wurde er zum Professor ernannt; er berichtete unter anderem in öffentlichen Sonntagsvorlesungen über seine Arbeit. Im gleichen Jahr wurde er vom bayrischen König LUDWIG I. in den Adelsstand erhoben. Zwei Jahre später starb er an Tuberkulose.

Zur mathematischen Behandlung der optischen Beugung brauchen wir zunächst ein physikalisches Modell für Lichtwellen. Für eine physikalisch korrekte Beschreibung müssen wir Licht als zeitlich veränderliches elektromagnetisches Feld betrachten, d.h. wir brauchen zwei räumlich und zeitlich variable Vektorfelder $\vec{E}(x,y,z;t)$ und $\vec{B}(x,y,z;t)$, die den MAXWELLschen Gleichungen genügen. Glücklicherweise muß man in der Optik aber nur selten so weit gehen: Zwar hängt die Beugung an einem Spalt theoretisch durchaus von der Leitfähigkeit des verwendeten Materials ab, aber diese Abhängigkeit

ist so gering, daß man sie für alle praktischen Zwecke vernachlässigen kann.

Man arbeitet daher in der Wellenoptik gerne mit einer sogenannten *skalaren Welle,* über deren physikalische Bedeutung man sich keine sonderlichen Gedanken macht. Aus rechnerischen Gründen betrachtet man sie als komplexwertige Funktion; falls man sich unbedingt etwas darunter vorstellen will, kann man beispielsweise den Realteil dieser Funktion als die x-Komponente des elektrischen Felds interpretieren, muß dann aber beachten, daß eine skalare Welle im Gegensatz zu einem elektrischen Feld *keine* Wechselwirkung mit Materie egal welcher Leitfähigkeit zeigt – das ist eine der Idealisierungen hinter dem Konzept der skalaren Welle. Wichtig für uns ist nur, daß die Intensität der Welle (also z.B. die Intensität der Beugungslinien, die wir auf einem Schirm beobachten) gleich dem Betragsquadrat der Wellenfunktion sein soll.

Eine Welle hat eine räumliche wie auch zeitliche Periodizität. Zeitlich periodische Vorgänge kennen wir bereits: Das sind Schwingungen, die mathematisch durch Funktionen der Art

$$f(t) = A_0 e^{i\omega t} \quad \text{oder etwas allgemeiner} \quad f(t) = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

beschrieben werden, wobei die Phasenverschiebung φ dafür sorgt, daß wir auch Schwingungen behanden können, die ihre maximale Auslenkung nicht zur Zeit $t = 0$ erreichen. Wir wollen dies jedoch im folgenden ignorieren und mit der einfacheren ersten Funktion arbeiten.

Für räumlich periodische Vorgänge haben wir entsprechend zur Periode T einer Schwingung eine Wellenlänge λ; das Analogon zur Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ bezeichnen wir als

$$\textit{Wellenzahl} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}\,.$$

Ein eindimensionaler periodischer Vorgang kann somit beschrieben werden durch eine Funktion

$$g(x) = A_0 e^{ikx}\,.$$

Im Mehrdimensionalen müssen wir die Wellenzahl k ersetzen durch einen Vektor $\vec{k}$ der Länge k, den *Wellenzahlvektor,* und betrachten die

Funktion

$$g(\boldsymbol{x}) = A_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \,.$$

(Die Wellenlänge betrachten wir weiterhin nur als Skalar.)

Eine Welle soll zeitlich *und* räumlich periodisch sein; dies leistet die Funktion

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = A_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

oder natürlich auch die entsprechende Funktion mit einem Pluszeichen im Exponenten. Der Grund, warum wir das Minuszeichen bevorzugen, ist folgender:

Im eindimensionalen Fall ist

$$\psi(x, t) A_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} = A_0 e^{ik\left(\frac{\omega}{k}t - x\right)} \,,$$

$\psi(x, t)$ hängt also nur ab von $x - \frac{\omega}{k}t$. Dies können wir auch so interpretieren, daß

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda\omega}{2\pi}$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist; denn eine Änderung der Zeit um Δt hat denselben Effekt wie eine Änderung des Orts um $v \cdot \Delta t$.

Im Falle mehrerer räumlicher Dimensionen ist alles grundsätzlich genauso, nur die Schreibweise ist etwas komplizierter: Ist $\vec{k}_0$ ein Einheitsvektor in Richtung von $\vec{k}$, d.h. $\vec{k} = k \cdot \vec{k}_0$, so ist

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = A_0 e^{ik\left(\frac{\omega}{k}t - \vec{k}_0\cdot\vec{x}\right)} \,;$$

dabei ist $\vec{k}_0 \cdot \vec{x}$ die $\vec{x}$-Komponente in Richtung von $\vec{k}$. Damit ist $\vec{k}_0$ die *Richtung* des Geschwindigkeitsvektors; der Wellenzahlvektor zeigt also in Richtung der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, und der Betrag v des Geschwindigkeitsvektors ist durch obige Formel gegeben.

Die Annahme einer konstanten Amplitude A_0 in obigen Formeln ist nur in seltenen Fällen realistisch: Licht kommt meist aus einer (zumindest in erster Näherung) punktförmigen Lichtquelle, und seine Intensität nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab. Da die Intensität das Betragsquadrat

der Wellenfunktion sein soll, müssen wir eine solche Kugelwelle also in der Form

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{A_0}{|\vec{x}|} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

ansetzen, sofern die Lichtquelle im Nullpunkt des Koordinatensystems sitzt.

Im Falle einer weit entfernten Lichtquelle, wie wir sie bei der FRAUNHOFER-Beugung annehmen und auch von der Sonne her kennen, spielt allerdings die Ortsabhängigkeit der Amplitude praktisch keine Rolle, so daß wir keinen nennenswerten Fehler machen, wenn wir sie als konstant annehmen. In diesem Fall sprechen wir von einer *ebenen* Welle.

Ausgangspunkt für die Berechnung von Beugungsbilder ist das HUYGENSsche Prinzip: Jeder Punkt des Hindernisses ist Quelle einer Kugelwelle, deren Amplitude gleich der Amplitude der einfallenden Welle mal der Durchlässigkeitsfunktion α des Hindernisses im betrachteten Punkt ist. Letztere gibt an, welcher Teil des Lichts durchgelassen wird; sie ist also eins an den Stellen, an denen alles Licht durchkommt, und null dort, wo nichts durchkommt. An Stellen, an denen ein Teil des Lichts durchgelassen wird, kann sie auch Zwischenwerte annehmen.

CHRISTIAAN HUYGENS (1629–1695) kam aus einer niederländischen Diplomatenfamilie. Dadurch und später auch durch seine Arbeit hatte er Kontakte zu führenden europäischen Wissenschaftlern wie DESCARTES und PASCAL. Nach seinem Studium der Mathematik und Jura arbeitete er teilweise auch selbst als Diplomat, interessierte sich aber bald vor allem für Astronomie und den Bau der dazu notwendigen Instrumente. Er entwickelte eine neue Methode zum Schleifen von Linsen und erhielt ein Patent für die erste Pendeluhr. Trotz des französisch-niederländischen Kriegs arbeitete er einen großen Teil seines Lebens an der *Académie Royale des Sciences* in Paris, wo beispielsweise LEIBNIZ viel Mathematik bei ihm lernte. HUYGENS war ein scharfer Kritiker sowohl von NEWTONs Theorie des Lichts als auch seiner Gravitationstheorie, die er für absurd und nutzlos hielt. Gegen Ende seines Lebens beschäftigte er sich mit der Möglichkeit außerirdischen Lebens.

Bei der FRAUNHOFER-Beugung betrachten wir auch die gebeugten

Wellen nur aus sehr großer Entfernung und können daher statt von Kugelwellen von ebenen Wellen ausgehen. Außerdem können wir die Zeitabhängigkeit der Welle ignorieren, denn die Frequenzen, mit denen das sichtbare Licht schwingt, liegen um Größenordnungen jenseits sowohl unserer Reaktionszeit als auch der unserer Meßinstrumente, so daß wir nur die Amplituden messen können. Schreiben wir die einfallende Welle als $\psi(\boldsymbol{x}, t) = A_0 e^{-i\vec{k}\vec{x}} \cdot e^{i\omega t}$, ist also der zweite Faktor eine zeitabhängige Phasenvariation, die wir bei der Berechnung des räumlichen Intensitätsverteilung des Beugungsbilds ignorieren können.

Eine weitere Konsequenz des (auch im Vergleich zur Größe des Hindernisses) weit entfernten Betrachtungspunkts ist, daß wir das Hindernis vom Schirm aus praktisch nur als Punkt sehen; was an einer gegebenen Stelle des Schirms ankommt, hängt also im wesentlichen nur ab vom Winkel θ oder (im Zweidimensionalen) den Winkeln θ und φ, unter dem (oder denen) die Strahlen von diesem „Punkt" ausgehen.

Um die Intensität des Beugungsbilds in einem gegebenen Punkt zu berechnen, müssen wir also alle vom Hindernis in einem festen Winkel ausgehenden Strahlen aufsummieren, und *hierbei* müssen wir auch die Phasen berücksichtigen, da diese Strahlen miteinander interferieren. Abbildung 20 zeigt, wie sich die Laufwege zweier benachbarter Strahlen unterscheiden, und diese Differenzen können wir nicht vernachlässigen, da sie in der Größenordnung des Hindernisses und damit auch der Wellenlänge des Lichts liegen.

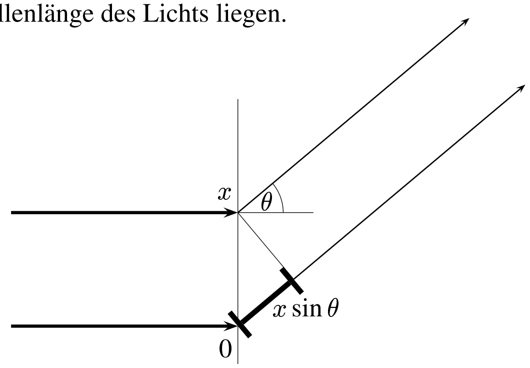

Abb. 20: Laufwegunterschied zweier paralleler Strahlen

Betrachten wir zunächst den (in Abbildung 20 dargestellten) eindimensionalen Fall. Verglichen mit dem Strahl, der von einem (irgendwie gewählten) Nullpunkt des Hindernisses ausgeht, hat der Strahl mit Ausgangspunkt in Entfernung x einen Laufwegunterschied von $x \sin\theta$; dies entspricht einem Phasenfaktor von $e^{-ik\sin\theta}$. Wählen wir also die Phase im Nullpunkt als Referenz (die wir in den zu ignorierenden Phasenfaktor der einfallenden Welle hineinziehen können), ist die Summe aller unter dem Winkel θ abgehenden Strahlen gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) e^{-ik\sin\theta}\, dx\ ;$$

das ist gleich der FOURIER-Transformierten von $\alpha(x)$, ausgewertet im Punkt $u = k\sin\theta$.

Bei einem zweidimensionalen Hindernis müssen entsprechend zwei Winkelvariablen θ und ϕ berücksichtigt werden, und auch die Durchlässigkeitsfunktion α hängt von zwei Variablen x, y ab; außerdem müssen wir nun vom Wellenzahlvektor sowohl die x- als auch die y-Komponente berücksichtigen. Wir erhalten daher als Summe aller Strahlen unter den beiden gegeben Winkeln das Integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \alpha(x,y) e^{-i(k_1 \sin\theta + k_2 \sin\phi)}\, dx\, dy\ ,$$

d.h. die zweidimensionale FOURIER-Transformierte von α, ausgewertet im Punkt $(u,\ v) = (k_1 \sin\theta,\ k_2 \sin\varphi)$.

Zur Vereinfachung der Schreibweise drückt man das Beugungsbild meist einfach in der Variablen u *bzw.* den Variablen u und v aus statt in den Winkelvariablen; dann ist das Beugungsbild eines Hindernisses mit Durchlässigkeitsfunktion α somit einfach die FOURIER-Transformierte von α. Allerdings muß man dabei beachten, daß u und v, obwohl man sie als Strecken interpretieren kann, *nicht* proportional zu den Strecken sind, die man auf einem ebenen Schirm messen kann: Deren Längen sind proportional zu $\tan\theta$ und $\tan\varphi$.

Dies wollen wir anwenden, um als erstes das Beugungsbild eines Spalts zu berechnen. Dieser habe die Breite a; seine Durchlässigkeitsfunktion kann also beispielsweise geschrieben werden als

$$\alpha\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) e^{-uix}\,dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iux}\,dx \\ &= \frac{e^{-\frac{iau}{2}} - e^{\frac{iau}{2}}}{-iu} = \frac{2\sin\frac{au}{2}}{u} = a\frac{\sin\frac{au}{2}}{\frac{au}{2}} = a \operatorname{sinc}\frac{au}{2}\,. \end{aligned}$$

Dies erklärt, warum die Funktion $\operatorname{sinc} x$ auch als *Spaltfunktion* bezeichnet wird.

Die Lichtintensitäten, die man im Beugungsbild beobachtet, sind allerdings *nicht* durch diese Funktion gegeben: $\widehat{\alpha}(u)$ ist die Amplitude einer skalaren Welle; die Intensität ist gleich dem Betragsquadrat davon, bei einer reellen Funktion wie hier also einfach das Quadrat

$$\widehat{\alpha}(u)^2 = 4\frac{\sin^2\frac{au}{2}}{u^2} = a^2 \operatorname{sinc}^2\frac{au}{2}\,.$$

Als nächstes Beispiel betrachten wir Beugung an einem regelmäßigen Strichgitter. Der Abstand zweier Striche sei d und es gebe insgesamt $2N+1$ Striche. Wenn wir in erster Näherung die Breite der Striche vernachlässigen, können wir die Durchlässigkeitsfunktion α als Summe von δ-Distributionen schreiben:

$$\alpha(t) = \sum_{k=-N}^{N} \delta(x - kd)\,.$$

Das Beugungsbild ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) e^{-iux}\,dx = \sum_{k=-N}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-kd) e^{-iux}\,dx \\ &= \sum_{k=-N}^{N} e^{-iudk} = \sum_{k=-N}^{N} e^{iukd} = e^{-iuNd} \sum_{k=0}^{2N} e^{iukd} \\ &= e^{-iuNd}\frac{1 - e^{iu(2N+1)d}}{1 - e^{iud}} = \frac{e^{-iuNd} - e^{iu(N+1)d}}{1 - e^{iud}} \\ &= \frac{e^{iu(N+\frac{1}{2})d} - e^{-iu(N+\frac{1}{2})d}}{e^{iu\frac{d}{2}} - e^{-iu\frac{d}{2}}} = \frac{\sin u\bigl(N + \frac{1}{2}\bigr)d}{\sin\frac{ud}{2}}\,. \end{aligned}$$

Abbildung 21 zeigt diese Funktion; man sieht ihr das charakteristische Linienmuster an, das man bei der Beugung am Gitter beobachtet.

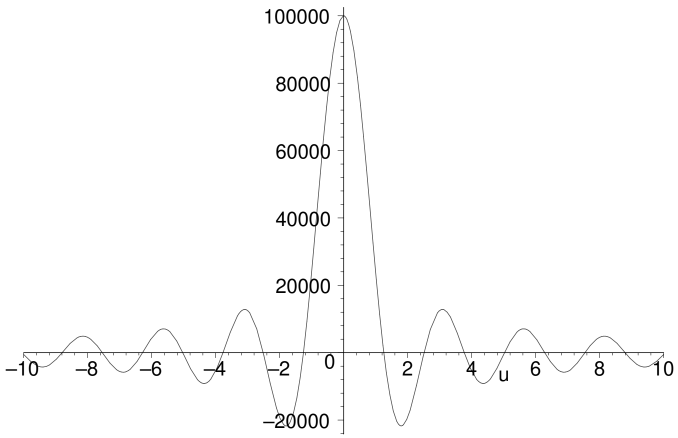

Abb. 21: Beugung am Gitter

Trotzdem wird vielleicht einigen Lesern unwohl sein beim Gedanken an eine Summe von δ-Distributionen als Durchlässigkeitsfunktion. Deshalb wollen wir zur Sicherheit nachrechnen, was sich ändert, wenn wir stattdessen die Striche als Spalte der Breite a annehmen.

Für einen einzelnen solchen Spalt haben wir dann die oben betrachtete Durchlässigkeitsfunktion

$$\alpha_a\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

eines Spalts der Breite a, und die Durchlässigkeitsfunktion des gesamten Strichgitters ist die Faltung $\alpha \star \alpha_a$ dieser Funktion mit der gerade betrachteten Funktion ψ. Das Beugungsbild ist somit gegeben durch das Produkt des gerade berechneten Beugungsbilds mit dem Beugungsbild eines Spalts, also durch

$$\frac{\sin u\left(N+\frac{1}{2}\right)d}{\sin\frac{ud}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{au}{2}}{\frac{u}{2}} \,.$$

Da der Abstand zwischen zwei Spaltmitten gleich d ist, muß die Spaltbreite a echt kleiner als d sein, und die Anzahl N der Striche im Gitter liegt typischerweise bei mindestens einigen Zehntausend. Somit hat der Sinus im zweiten Term eine Kreisfrequenz, die um einen mindestens fünfstelligen Faktor gröser ist als die im ersten; der zweite Term zeigt also erst dann eine nennenswerte Variation, wenn wir im ersten Faktor mehrere Tausend Linien betrachten. In dem Bereich, den wir realistischerweise beobachten können, ist der zweite Term somit für alle praktischen Zwecke konstant. Der Betrag dieser Konstanten ist irrelevant, denn da wir bei der FRAUNHOFER-Beugung das Beugungsbild in „sehr großer“ Entfernung vom Gitter betrachten, können wir sinnvollerweise ohnehin nur von relativen, nicht aber von absoluten Helligkeiten reden.

Als letztes Beispiel zur eindimensionalen Beugung möchte ich eines betrachten, bei dem das Licht nicht als konstante Wellenfront einfällt: Je nach Wahl der Randbedingungen im optischen Resonator entsteht nicht immer ein Strahl, der näherungsweise als ebene Welle betrachtet werden kann (die sogenannte TEM_{00}-Mode); bringt man Hindernisse in den Strahlengang, können auch höhere TEM-Moden angeregt werden (TEM = *transversal elektromagnetisch*). Bei einem dünnen Hindernis wie etwa einem Haar genau in der Mitte des Strahls beispielsweise entsteht die TEM_{01}-Mode, die aus einem linken und einem rechten Halbstrahl besteht, deren Phasen sich um 180° unterscheiden, und die man

ansonsten wieder näherungsweise als ebene Wellen betrachten kann. Trifft ein solcher Strahl auf einen Spalt, dessen Mitte mit der Grenze zwischen den beiden Halbstrahlen zusammenfällt, müssen wir also die Funktion, die etwa links der Null gleich $+1$ und rechts der Null gleich -1 ist mit der Durchlässigkeitsfunktion des Spalts multiplizieren; für einen Spalt der Breite a erhalten wir als Beugungsbild

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{a}{2}}^{0} e^{-iux}\,dx + \int_{0}^{\frac{a}{2}} -e^{-iux}\,dx &= \frac{1-e^{iua/2}-e^{-iua/2}+1}{-iu} \\ &= \frac{2i}{u}\left(1-\cos\frac{ua}{2}\right) .\end{aligned}$$

Alternativ läßt sich dies auch über die Beziehung

$$e^{iua/2}+e^{-iua/2}-2=(e^{iua/4}-e^{-iua/4})^2=-4\sin^2\frac{ua}{4}$$

als

$$\frac{4i}{u}\sin^2\frac{ua}{4}$$

schreiben. Daß hier imaginäre Größen auftreten, braucht uns natürlich nicht zu stören: Die beobachteten Intensitäten sind bekanntlich die Betragsquadrate der hier berechneten Funktionen, also reell und positiv.

Zum Abschluß möchte ich noch zumindest ein Beispiel eines zweidimensionalen Beugungsbilds betrachten. Leider sind die zugehörigen FOURIER-Integrale schon in so einfachen Fällen wie dem einer scheibenförmigen Blende nicht mehr elementar auswertbar; wir beschränken uns daher auf den extrem einfachen Fall einer rechteckigen Blende. Deren Durchlässigkeitsfunktion ist

$$\alpha\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2} \text{ und } -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases},$$

die Beugungsfigur ist also gegeben durch

$$\widehat{\alpha}(u,v)=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\alpha(x,y)e^{-i(ux+vy)}\,dx\,dy=\iint\limits_{\substack{-\frac{a}{2}\le x\le\frac{a}{2}\\-\frac{b}{2}\le y\le\frac{b}{2}}}e^{-i(ux+vy)}\,dx\,dy$$

$$=\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}e^{-iux}e^{-ivy}\,dx\,dy=\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}e^{-iux}\left(\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}e^{-ivy}\,dy\right)dx$$

$$=\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}e^{-iux}\cdot\frac{\sin\frac{bv}{2}}{v}\,dx=4\cdot\frac{\sin\frac{au}{2}}{u}\cdot\frac{\sin\frac{bv}{2}}{v}\,,$$

da wir das Rechteck als Normalbereich betrachten können und somit das zweidimensionale Integral über zwei eindimensionale Integrationen berechnen können.

Als Beugungsfigur erhalten wir, nicht gerade überraschenderweise, das Produkt einer vertikalen und einer horizontalen Beugungsfigur eines Spalts.

h) Der Abtastsatz von Nyquist

Egal ob es um die automatische Erfassung von Meßwerten geht oder um die Aufzeichnung von Musik: Die digitale Darstellung analoger Daten ist wesentlicher Bestandteil der Informationsverarbeitung. Nun ist aber eine beliebige Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sicherlich nicht durch ihre Funktionswerte an endlich vielen Stellen oder auch an ein einer diskreten Menge von Stellen bestimmt: Auch wenn wir wissen, daß $f(t)=0$ ist für jedes ganzzahlige Vielfache von 0,001, wissen wir noch nicht, daß f die Nullfunktion ist: Auch die Funktionen $f(t)=\sin(1000\pi t)$ und $f(t)=-3\sin(5000\pi t)$ haben diese Eigenschaft. Auch bei von null verschiedenen Abtastwerten tritt dieses Problem auf: Beispielsweise stimmen auch die Funktionen

$$f(t)=\cos(500\pi t)\quad\text{und}\quad g(t)=\cos(1500\pi t)$$

für alle ganzzahligen Vielfachen von 0,001 überein, aber sie nehmen hier abwechselnd die Werte $1,0,-1,0$ an; siehe Abbildung 22. Da

der Frequenzunterschied zwischen den beiden Schwingungen fast dem zwischen Baß und Sopran entspricht, ist klar, daß man die beiden Schwingungen zumindest auf einer Musik-CD nicht miteinander verwechseln darf.

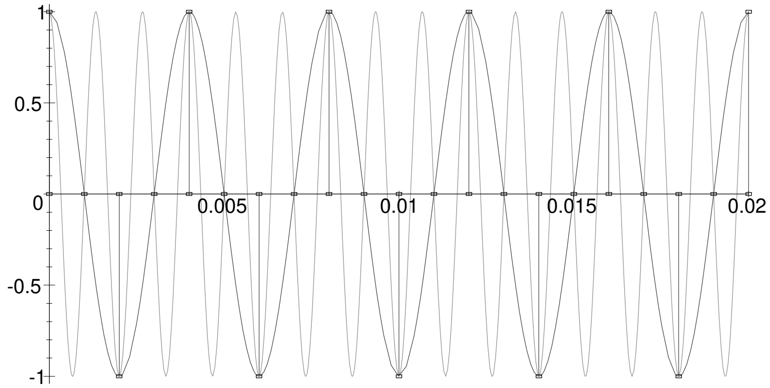

Abb. 22: Abtastung zweier Schwingungen

Die Probleme bei den obigen Beispielen beruhen offensichtlich darauf, daß es zu jedem gegebenen Signal auch höherfrequente Signale gibt, die an vorgegebenen Abtastpunkten mit ihm übereinstimmen; eine eindeutige Rekonstruktion ist höchstens dann möglich, wenn man eine Grenze festlegt, oberhalb derer Frequenzen nicht mehr berücksichtigt werden sollen. Der Abtastsatz von NYQUIST sagt, daß dann in der Tat eine Rekonstruktion möglich ist, und er sagt auch, wo die Grenze liegen soll, oberhalb derer man die Frequenzen abscheiden muß: Die Abtastfrequenz muß mehr als doppelt so hoch sein als die höchste im Signal vorkommende Frequenz.

Die genaue Formulierung des Satzes ist etwas technischer; insbesondere müssen wir berücksichtigen, daß die Kreisfrequenz ω, mit der wir immer arbeiten, etwas anderes ist, als die Frequenz: Eine reine Schwingung mit einer Frequenz von 1000 Hz ist nicht gegeben durch eine Funktion wie $\sin 1000t$, sondern – bei in Sekunden gemessener Zeit – durch

$\sin 2000\pi t$. Entsprechend kommt auch jetzt bei der Formulierung des Abtastsatzes von NYQUIST ein Faktor 2π ins Spiel:

Satz: $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ habe die Eigenschaft, daß $\hat{f}(\omega)$ außerhalb eines Intervalls der Länge Ω verschwinde. Dann ist f eindeutig bestimmt durch die Werte $f(2k\pi/\Omega)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis: (ω_1, ω_2) sei ein Intervall der Länge Ω derart, daß $\hat{f}(\omega)$ außerhalb dieses Intervalls verschwindet. Dann ist bis auf eine Nullfunktion

$$f(t) = \check{\hat{f}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,.$$

Indem wir f durch die rechte Seite ersetzen (was nichts wesentliches ändert) können wir annehmen, daß diese Gleichung wirklich gilt. Also ist insbesondere

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \hat{f}(\omega)e^{2k\pi i\omega/\Omega}\,d\omega\,. \qquad (*)$$

Nun betrachten wir jene Funktion $g(\omega)$, die auf dem Intervall $[\omega_1, \omega_2)$ mit $\hat{f}(\omega)$ übereinstimmt und die periodisch mit Periode Ω in ω auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt ist. Für diese Funktion ist natürlich auch

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega)e^{2k\pi i\omega/\Omega}\,d\omega\,,$$

denn im Integrationsintervall stimmen $\hat{f}$ und g überein.

g als periodische Funktion in ω mit Periode Ω hat eine Darstellung als FOURIER-*Reihe*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\lambda\omega} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\Omega}\,;$$

der k-te FOURIER-Koeffizient ist

$$c_k = \frac{1}{\Omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega)e^{-ik\lambda\omega}\,d\omega = \frac{1}{\Omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega)e^{-2\pi i\omega k/\Omega}\,d\omega = \frac{2\pi}{\Omega} f\left(\frac{-2k\pi}{\Omega}\right),$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen $(*)$ gilt.

Durch die Werte $f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right)$ sind also alle FOURIER-Koeffizienten von g bestimmt, damit auch (fast überall) die Funktion $g(\omega)$, und damit auch die Funktion $\hat{f}(\omega)$, die im Intervall $[\omega_1, \omega_2)$ mit $g(\omega)$ übereinstimmt und außerhalb (außer eventuell im Punkte ω_2) verschwindet. Damit ist auch $f(t) = \check{\hat{f}}(t)$ fast überall durch diese Werte bestimmt. ■

HARRY NYQUIST (1889–1976) wurde in Schweden geboren, arbeitete aber ab Anfang der zwanziger Jahre bei den Bell Labaratories; das Bild zeigt ihn um 1960 mit seinen dortigen Kollegen JOHN PIERCE *(links)* und RUDOLF KOMPFNER *(Mitte)*. Seine Arbeit von 1924 über die Übertragungsgeschwindigkeit von Telegraphen gilt als eine der Begründungen der Informationstheorie. Den Abtastsatz, den CAUCHY bereits 1841 postuliert hatte, bewies er 1928. Weitere wichtige Arbeiten befassen sich mit der quantitativen Erforschung des thermischen Rauschens und der Stabilität von Verstärkern.

Bei praktischen Anwendungen dieses Satzes wird $f(t)$ im allgemeinen eine reelle Funktion sein; dann verschwindet

$$\hat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(-\omega)t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)e^{-i\omega t}}\,dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt} = \overline{\hat{f}(\omega)}$$

genau dann, wenn auch $\hat{f}(\omega)$ verschwindet. Daher wird in diesem Fall alles einfacher, wenn man das Intervall, außerhalb dessen $\hat{f}(\omega)$ verschwindet, symmetrisch zum Nullpunkt wählen kann, also von der Form

$$(-\omega_0,\ \omega_0)\,.$$

Die zur Kreisfrequenz ω_0 gehörende Frequenz $2\pi\omega_0$ wird in diesem Zusammenhang oft als *Bandbreite* bezeichnet. Hier ist $\Omega = 2\omega_0$, zur Rekonstruktion der Funktion f brauchen wir also die Funktionswerte

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = f\left(\frac{k\pi}{\omega_0}\right) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Ein Signal der Bandbreite ν_0 muß also mit einer Frequenz von mindestens $2\nu_0$ abgetastet werden, damit man es eindeutig rekonstruieren kann.

Bekanntestes Beispiel hierfür sind Musik-CDs: Praktisch niemand kann Töne mit Frequenzen von mehr als 20kHz hören; für Aufnahmen auf CD wird 44 100 Mal pro Sekunde der Schalldruck gemessen und gespeichert, für Signale die nicht allzuweit oberhalb von 20kHz abgeschnitten werden, ist also eine perfekte Rekonstruktion möglich.

Auch in der Computergraphik spielt der Satz von NYQUIST eine wichtige Rolle, denn Pixelgraphik ist schließlich nichts anderes als die (zweidimensionale) diskrete Abtastung eines kontinuierlichen Bilds. Falls das Bild zu hochfrequente Anteile enthält, entstehen sogenannte *alias-Effekte,* da das Auge diese Anteile anhand des Pixelbilds als niedrigerfrequente Strukturen mit gleichen Abtastwerten interpretiert. Vor der Abtastung muß das Bild daher tiefpaßgefiltert werden; da die Funktion $\frac{\sin ax}{ax}$, die FOURIER-Transformierte des Rechteckimpulses, einigermaßen schnell abfällt, wendet man dazu meist das Lemma aus dem letzten Abschnitt an und faltet mit einer geeigneten solchen Funktion. Falls das Ursprungsbild auch schon als (höher aufgelöste) Pixelgraphik gegeben war, wird die Faltung hier einfach zu einer Summation über nicht garzu viele Nachbarpixel, was sehr effizient durchgeführt werden kann.

§ 7: Die Laplace-Transformation

Im letzten Paragraphen haben wir gesehen, daß die FOURIER-Transformation Ableitungen in Produkte überführt; wenn wir also beide Seiten

einer Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t)$$

FOURIER-transformieren, erhalten wir eine algebraische Gleichung für $\widehat{y}(\omega)$, die im allgemeinen einfacher zu lösen sein sollte als die Differentialgleichung.

Der Haken an der Sache ist, daß die FOURIER-Transformierte in vielen interessanten Fällen wie etwa bei Schwingungen nicht existiert – zumindest nicht als Funktion. Deshalb arbeitet man nur selten mit dieser Methode. Eine leichte Modifikation führt aber häufig ans Ziel.

a) Definition und erste Eigenschaften

Das FOURIER-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

hat Konvergenzprobleme sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze. Bei der Anwendung von Differentialgleichungen geht es meist um die Vorhersage der Zukunft, so daß das Verhalten für $t \to -\infty$ nicht interessiert; wir setzen daher die Funktion f für $t < 0$ auf null.

Für positive t dürfen wir nicht so radikal vorgehen; hier dämpfen wir die Funktion einfach durch eine Exponentialfunktion. Insgesamt betrachten wir also anstelle von $f(t)$ die Funktion

$$g_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{für } t > 0 \end{cases}\,.$$

Den Funktionswert an der Stelle 0 legen wir so fest, daß die Funktion dort rechtsseitig stetig ist, d.h.

$$g(0) = \lim_{t\to 0+} f(t)\,,$$

wobei $t \to 0+$ bedeuten soll, daß wir nur Nullfolgen aus positiven Zahlen betrachten. Wir wollen der Einfachheit halber im folgenden annehmen, daß f bereits rechtsseitg stetig ist, so daß wir an der Stelle null einfach den Wert $f(0)$ nehmen können.

Die FOURIER-Transformierte dieser Funktion g_r bezeichnen wir, wenn sie existiert, als LAPLACE-Transformierte von f an der Stelle $s = r + i\omega$, d.h.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \underset{\text{def}}{=} \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\,.$$

Für gängige Funktionen f ist $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ ist den meisten Formelsammlungen zu finden; es gibt auch umfangreiche Tabellenwerke, die ausschließlich der LAPLACE-Transformation gewidmet sind. Im allgemeinen wird sie nur für hinreichend große Werte von $r = \mathfrak{Re}\, s$ existieren.

Die Umkehrung der LAPLACE-Transformation folgt aus der inversen FOURIER-Transformation: Da fast überall $\mathcal{L}\{f(t)\}(r+i\omega) = \widehat{g}_r(t)$ ist, ist $g_r(t)$ die inverse FOURIER-Transformierte von $\mathcal{L}\{f(t)\}(r+i\omega)$; für $t > 0$ ist also fast überall

$$f(t) = e^{rt}g_r(t) = \frac{e^{rt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(r+i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,.$$

Da die Funktionswerte von f auf der negativen Achse bei der LAPLACE-Transformation ignoriert werden, lassen sie sich natürlich auch nicht aus der LAPLACE-Transformierten rekonstruieren.

Wir betrachten die LAPLACE-Transformation in diesem Paragraphen, da sie wie die FOURIER-Transformation die Differentiation in Multiplikation überführt: Nach der Regel über partielle Integration ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\dot f(t)\}(s) &= \int_0^\infty \dot f(t)e^{-st}\,dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\\ &= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\end{aligned}$$

und damit induktiv

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\,.$$

Dies ist etwas komplizierter als bei der FOURIER-Transformation, wo wir keine Funktionswerte an der Stelle null berücksichtigen mußten, aber für die Anwendung auf Differentialgleichungen ist das meist ein *Vorteil:*

In der Praxis hat man es fast immer mit Anfangswertproblemen zu tun, wobei man den Anfangszeitpunkt ohne großen Aufwand als Nullpunkt wählen kann. Dann geht es also um die Bestimmung einer Funktion $y(t)$ mit den Eigenschaften, daß

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t)$$

ist und

$$y(0) = y_0, \quad \dot y(0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{n-1}(0) = y_{n-1}\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus die algebraische Gleichung

$$\begin{aligned} &s^n\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}y_1 - \cdots - y_{(n-1)}\\ +\,&a_{n-1}s^{n-1}\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-2}y_0 - s^{n-3}y_1 - \cdots - y_{(n-2)}\\ &\vdots\\ +\,&a_1 s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0\\ +\,&a_0\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{b(t)\}(s)\end{aligned}$$

für $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, die man – so die rechte Seite existiert – leicht nach $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ auflösen kann. Rücktransformation (meist anhand einer Tabelle) führt dann auf die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems. Bevor wir dazu Beispiele betrachten, sollten wir zunächst die LAPLACE-Transformierten einiger wichtiger Funktionen kennen.

b) Rechenregeln und Beispiele zur Laplace-Transformation

Die FOURIER-Transformation existiert (als Funktion) weder für reine Schwingungen noch für Polynome, und selbst für e^{-t} gibt es Probleme amunteren Rand des Integrationsbereichts. Wir wollen uns überlegen, daß für alle diese Funktionenklassen die LAPLACE-Transformierte existiert.

Beginnen wir mit $\mathcal{L}\{\sin t\}(s)$. Dieses Integral läßt sich durch partielle Integration relativ leicht ausrechnen, noch einfacher geht es aber, wenn wir die Rechenregeln für die LAPLACE-Transformation der Ableitung anwenden: Da der Cosinus Ableitung des Sinus ist, haben wir einerseits

$$\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{\sin t\}(s) - \sin 0 = s \cdot \mathcal{L}\{\sin t\}(s)\,,$$

andererseit ist der Sinus die negative Ableitung des Cosinus und deshalb

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = -\big(s \cdot \mathcal{L}\{\cos t\}(s) - \cos 0\big) = 1 - s \cdot \mathcal{L}\{\cos t\}(s)\,.$$

Also ist

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = 1 - s^2 \cdot \mathcal{L}\{\sin t\}(s) \quad \text{oder} \quad (1+s^2)\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = 1$$

und damit

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{1+s^2}\,.$$

Die LAPLACE-Transformierte

$$\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{s}{1+s^2}$$

des Cosinus wird bei dieser Vorgehensweise gleich mitgeliefert.

Genauso können wir $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$ ausrechnen: Hier ist

$$\omega\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$$

und

$$\omega\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = 1 - s \cdot \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s)\,,$$

also

$$\omega\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = 1 - \frac{s^2}{\omega}\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$$

oder

$$\left(\omega + \frac{s^2}{\omega}\right)\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = 1\,,$$

d.h.

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{1}{\omega + \frac{s^2}{\omega}} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

und

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega}\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,.$$

Für die reine Schwingung $f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ ist also

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = a\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) + b\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{as+b\omega}{s^2+\omega^2}\,.$$

Auch gedämpfte Schwingungen sind kein Problem, denn für jede Funktion f ist

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{-\lambda t}\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+\lambda)t}\,dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(s+\lambda)\,,$$

also

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{(s+\lambda)^2+\omega^2}$$

und

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}\cos\omega t\}(s) = \frac{s+\lambda}{(s+\lambda)^2+\omega^2}\,.$$

Betrachten wir als nächstes Polynome: Für eine reine Potenz ist

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt\,.$$

Dieses Integral können wir durch die sogenannte *Gammafunktion*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

ausdrücken: mit der Substitution $u = st$ wird

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{u^n}{s^n}e^{-u}\,\frac{du}{s} = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty u^n e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}\,.$$

Dies können wir noch weiter ausrechnen, denn offensichtlich ist

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1\,,$$

und partielle Integration zeigt, daß für $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)$$

ist. Somit folgt für natürliche Zahlen n induktiv

$$\Gamma(n+1) = n!\,,$$

und

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\,.$$

Für ein Polynom

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

ist damit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{n!a_n}{s^{n+1}} + \frac{(n-1)!a_{n-1}}{s^n} + \cdots + \frac{2a_1}{s^2} + \frac{a_0}{s}\\ &= \frac{n!a_n + (n-1)!a_{n-1}s + \cdots + 2a_1 s^{n-1} + a_0 s^n}{s^{n+1}}\,.\end{aligned}$$

Insbesondere ist die LAPLACE-Transformierte einer konstanten Funktion $f(t) = a$ gleich a/s. Genau dieselbe Transformierte hat natürlich auch die Sprungfunktion

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } t \ge 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}\,,$$

denn auf Werte an negativen Stellen kommt es bei der LAPLACE-Transformation nicht an.

Kapitel 4
Differentialgleichungen

Differentialgleichungssysteme sind so ziemlich *das* wichtigste mathematischen Hilfsmittel der Naturwissenschaften und der Technik. Die dahinterstehende Grundidee ist einfach: Man kann zwar nur selten *a priori* sagen, wie sich ein System über einen längeren Zeitraum hinweg entwickeln wird, aber man hat oft aufgrund von Naturgesetzen eine klare Vorstellung über die Zustandsänderung *im nächsten Augenblick,* d.h. also über den Wert der zeitlichen Ableitung der Zustandsgrößen in Abhängigkeit vom gegenwärtigen Zustand des Systems. Ein einfaches Beispiel hierfür liefert das zweite NEWTONsche Gesetz, wonach die zeitliche Ableitung des Impuls eines Teilchens gleich der auf das Teilchen wirkenden Kraft ist.

§ 1: Anfangswertprobleme und ihre Lösung via Laplace-Transformation

a) Ein einfaches Beispiel

Beginnen wir mit einem einfachen Beispiel, das wahrscheinlich den meisten schon aus der Schule bekannt: Ein in die Luft geworfener Gegenstand bewegt sich unter gewissen Bedingungen näherungsweise auf einer parabelförmigen Bahn. Wir wollen diese etwas vage Aussage präzisieren und mathematisch herleiten.

Es gibt viele Wurftechniken, und nur wenige davon können auf einfache Weise durch ein mathematisches Modell beschrieben werden; wir ignorieren daher den genauen Vorgang des Abwurfs und gehen davon aus, daß der Gegenstand *irgendwie* eine Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}$ erreicht hat im Abwurfpunkt mit Koordinaten (x_0, y_0, z_0); den Zeitpunkt des Abwurfs bezeichnen wir mit t_0.

Als nächstes nehmen wir an, daß wir den Luftwiderstand vernachlässigen können, eine Annahme, die beim Kugelstoßen kaum zu Fehlern führt, die aber beispielsweise für einen Fallschirmspringer (auch mit geschlossenem Fallschirm) oder einen Papierflieger völlig unrealistisch ist. Als nächstes wollen wir auch noch annehmen, daß wir nur relativ geringe Wurfhöhen erreichen, so daß die Erdanziehung als konstant angenommen werden kann.

Die Bewegung des Gegenstandes wird dann durch zwei Naturgesetze bestimmt: Das Gravitationsgesetz beschreibt den Effekt der Erdanziehung, und das zweite NEWTONsche Gesetz sagt uns, wie sich diese Kraft auf die Bewegung des Gegenstands auswirkt. Die Gravitation können wir aufgrund der gemachten Annahmen als konstant annehmen, d.h. auf einen Körper der Masse m wirkt die Kraft gm, wobei $g \approx 9{,}8\, m/s^2$ die Gravitationsbeschleunigung an der Erdoberfläche ist; bei „üblicher" Ausrichtung des Koordinatensystems wirkt sie in Richtung der negativen z-Achse. Diese Gravitationskraft ist nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz gleich der Ableitung des Impulses nach der Zeit; wenn wir die Masse m als konstant voraussetzen, ist das also gleich m mal der Ableitung der Geschwindigkeit oder m mal der zweiten Ableitung des Orts. Wir haben somit das Differentialgleichungssystem

$$\ddot{x}(t) = 0, \quad \ddot{y}(t) = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{z}(t) = -g\,.$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, wann immer $x(t)$ und $y(t)$ lineare Funktionen von t sind und $z(t)$ eine quadratische Funktion mit führendem Koeffizienten $-g$. Die sechs noch fehlenden Koeffizienten dieser drei Polynomfunktionen geben uns die Anfangsbedingungen: Zum Zeitpunkt $t = t_0$ ist

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{und} \quad z(t_0) = z_0\,,$$

und die Geschwindigkeit ist $\vec{v}$, d.h.

$$\dot{x}(t_0) = v_1, \quad \dot{y}(t_0) = v_2 \quad \text{und} \quad \dot{z}(t_0) = v_3\,.$$

Also ist

$$x(t) = v_1(t - t_0) + x_0, \quad y(t) = v_2(t - t_0) + y_0$$

und

$$z(t) = -g(t - t_0)^2 + v_3(t - t_0) + z_0\,.$$

Diese Gleichungen beschreiben in der Tat fast immer eine Parabel: Falls wir die x-Achse des Koordinatensystems so wählen, daß die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}$ in der (x, z)-Ebene liegt, ist $v_2 = 0$. Falls auch v_1 verschwindet, falls wir den Gegenstand also senkrecht nach oben (oder gar unten) werfen, sind $x(t) = x_0$ und $y(t) = y_0$ konstant und nur

$$z(t) = -g(t - t_0)^2 + v_3(t - t_0) + z_0$$

hängt von der Zeit ab. Andernfalls können wir durch v_1 dividieren; wir erhalten

$$t - t_0 = \frac{x(t) - x_0}{v_1} \quad \text{und} \quad z(t) = \frac{-g}{v_1}\big(x(t) - x_0\big)^2 + \frac{v_3}{v_1}\big(x(t) - x_0\big) + z_0\,,$$

die Punkte $\big(x(t), z(t)\big)$ liegen also in der Tat auf einer Parabel.

Das gerade durchgerechnete Beispiel war insofern untypisch für Differentialgleichungen, als auf den rechten Seite der Gleichungen nur Konstanten standen; üblicherweise wird man dort Funktionen erwarten, die nicht nur von t abhängen (so daß man einfach integrieren kann), sondern auch noch von den gesuchten Funktionen. Beim radioaktiven Zerfall etwa ist die pro (kleiner) Zeiteinheit zerfallende Masse proportional zur noch vorhandenen Masse, es gibt also eine Konstante $\lambda > 0$, die sogenannte Zerfallskonstante, so daß die zum Zeitpunkt t vorhandene Masse $m(t)$ der Gleichung

$$\dot{m}(t) = -\lambda m(t)$$

genügt – zumindest, wenn diese Masse hinreichend groß ist. (Im atomaren Bereich muß man auch statistische Effekte berücksichtigen, aber ab etwa 10^{10} Atomen können die für alle praktischen Fälle vernachlässigt werden.)

Wir kennen bereits eine Funktion, die sich so verhält, wie es die obige Differentialgleichung angibt, nämlich die Exponentialfunktion $e^{-\lambda t}$, und natürlich entspricht auch für jedes konstante Vielfache dieser Funktion die Differentiation einfach der Multiplikation mit $-\lambda$. Das sind dann aber bereits alle Funktionen mit dieser Eigenschaft, denn der Quotient

$$q(t) = \frac{m(t)}{e^{-\lambda t}} = m(t) \cdot e^{\lambda t}$$

einer Lösungsfunktion und der Funktion $e^{-\lambda t}$ hat die Ableitung

$$\dot{q}(t) = \dot{m}(t) \cdot e^{\lambda t} + m(t) \cdot \lambda e^{\lambda t} = -\lambda m(t) \cdot e^{\lambda t} + \lambda m(t) \cdot e^{\lambda t} = 0\,,$$

ist also gleich einer Konstanten c, so daß

$$m(t) = c \cdot e^{-\lambda t}$$

ist. Indem wir $t = 0$ setzen, sehen wir, daß die Konstante $c = m(0)$ gleich der zum Zeitpunkt 0 vorhandenen Masse ist; falls wir stattdessen die Masse $m_0 = m(t_0)$ zu einem anderen Zeitpunkt t_0 kennen, können wir analog zum obigen Beispiel auch schreiben

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda(t-t_0)} = (m_0 e^{\lambda t_0}) \cdot e^{-\lambda t}\,.$$

b) Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme

Wir betrachten ein System, das durch n zeitlich veränderliche Größen $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ beschrieben wird; unter einem System von Differentialgleichungen oder kurz einer Differentialgleichung verstehen wir eine Vorschrift, die die zeitlichen Ableitungen $\dot{y}_1(t), \ldots, \dot{y}_n(t)$ aus den Funktionswerten berechnet:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= f_1\big(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\big)\\
\dot{y}_2(t) &= f_2\big(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\big)\\
\vdots\ &\ \vdots\\
\dot{y}_n(t) &= f_n\big(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\big)\,.
\end{aligned}$$

Falls die Funktionen f_i nur von $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ abhängen und nicht auch noch direkt von der Zeit t spricht man von einem *autonomen* System. Da Naturgesetze nicht von der Zeit abhängen, hat man es in wissenschaftlich-technischen Anwendungen meist mit autonomen

Systemen zu tun; man kann allerdings auch den Einfluß von Umgebungsgrößen in einem zeitabhängigen Term zusammenfassen und so ein nichtautonomes System erhalten.

Falls wir, wie im obigen Beispiel die Werte der beteiligten Funktionen zu einem festen Zeitpunkt $t = t_0$ kennen, reden wir von einem *Anfangswertproblem;* die meisten Anwendungen gewöhnlicher Differentialgleichungen sind Anfangswertprobleme.

Auch Differentialgleichungen, in denen wie dort im Beispiel höhere Ableitungen vorkommen, lassen sich so interpretieren: Wenn wir dort die drei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors als neue Funktionen

$$u(t) = \dot{x}(t), \quad v(t) = \dot{y}(t) \quad \text{und} \quad w(t) = \dot{z}(t)$$

eingeführt hätten, wäre das System

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= u(t)\\
\dot{y}(t) &= v(t)\\
\dot{z}(t) &= w(t)\\
\dot{u}(t) &= 0\\
\dot{v}(t) &= 0\\
\dot{w}(t) &= -g
\end{aligned}$$

von obiger Form, und wir hätten für jede der sechs beteiligten Funktionen den Wert an der Stelle $t = t_0$ gekannt.

Ein für die Informationstechnik wichtiger Spezialfall sind Gleichungen der Form

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b(t)\,,$$

die sogenannten linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Auch diese Gleichungen lassen sich leicht auf die obige Form bringen: Wir betrachten n neue Funktionen

$$y_0(t), y_1(t), \ldots, y_{n-1}(t)$$

mit der Idde, daß sich $y_i(t)$ so verhalten soll wie die i-te Ableitung von $y(t)$. Dann betrachten wir das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
\dot{y}_0(t) &= y_1(t)\\
\dot{y}_1(t) &= y_2(t)\\
&\vdots \quad \vdots\\
\dot{y}_{n-2}(t) &= y_{n-1}(t)\\
\dot{y}_{n-1}(t) &= b(t) - a_{n-1}y^{(n-1)}(t) - \cdots - a_1\dot{y}(t) - a_0y(t)\,.
\end{aligned}$$

Für jede Lösung $y(t)$ der obigen Gleichung ist dann das n-tupel

$$\big(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\big)$$

eine Lösung des Systems, und für jede Lösung

$$\big(y_0(t), y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{n-1}(t)\big)$$

des Differentialgleichungssystems ist $y_0(t)$ eine Lösung der obigen Gleichung.

Auch wenn das Differentialgleichungssystem als Anfangswertproblem gegeben ist, läßt sich das leicht in Anfangswerte für die Gleichung höherer Ordung umschreiben: Hier werden die Werte $y(t_0)$, $\dot{y}(t_0)$ *usw.* bis $y^{(n-1)}(t_0)$ vorgegeben.

Da diese Gleichungen so wichtig sind und der häufigste Ansatz für die Lösung entsprechender Anfangswertprobleme unmittelbar an den vorigen Paragraphen anschließt, wollen wir hiermit beginnen:

c) Anwendung der Laplace-Transformation

Aus §6 des vorigen Kapitels kennen wir die LAPLACE-Transformierten einiger wichtiger Funktionen; damit können wir nun darangehen, erste Differentialgleichungen zu lösen. Wir beginnen mit der extrem einfachen Gleichung für eine Masse an einer Feder, die sich reibungsfrei in x-Richtung bewegen kann:

Nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt auf diese Masse eine Rückstellkraft $\lambda x(t)$, die proportional ist zur Auslenkung $x(t)$ aus der Ruhelage;

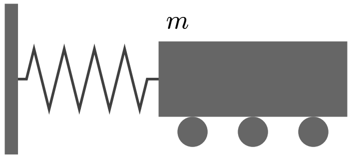

Abb. 23: Eine schwingende Masse

nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz ist diese Kraft (eine zeitlich konstante Masse m vorausgesetzt) gleich $m\ddot{x}(t)$. Insgesamt ist also

$$m\ddot{x}(t) + \lambda x(t) = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x}(t) + \frac{\lambda}{m}x(t) = 0\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus

$$s^2\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - s\cdot x(0) - \dot{x}(0) + \frac{\lambda}{m}\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = 0$$

oder

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{s\cdot x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + \frac{\lambda}{m}}\,.$$

Die schwingende Masse m soll natürlich positiv sein, und auch λ ist größer als null, da $\lambda x(t)$ die *Rückstellkraft* ist. Also ist

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{x(0)\cdot s}{s^2+\omega^2} + \frac{\dot{x}(0)}{s^2+\omega^2} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}\,.$$

Hier erkennen wir die gerade berechneten LAPLACE-Transformierten

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

und folgern, daß $x(t)$, falls LAPLACE-transformierbar, die Form

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega t$$

haben muß mit $\omega = \sqrt{\lambda/m}$. Die Masse schwingt also ungedämpft mit Frequenz $\sqrt{\lambda/m}$.

Eine solche ungedämpfte Schwingung wird man in der Realität eher selten beobachten; in den meisten Fällen führen Reibungseffekte schließlich zum Abklingen der Schwingung. Die Reibungskraft wird im allgemeinen als proportional zur Geschwindigkeit angesetzt, d.h. die linke Seite der Differentialgleichung wird durch ein konstantes Vielfaches von $\dot{x}(t)$ ergänzt. Dieselbe Art von Differentialgleichung erhalten wir auch, wenn wir eine Spule, einen Kondensator und einen Widerstand wie in Abbildung 24 hintereinanderschalten:

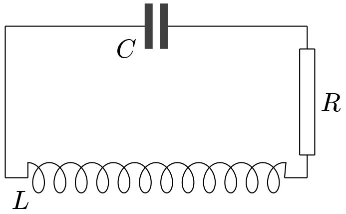

Abb. 24: Ein elektrischer Schwingkreis

Damit hier ein Strom fließt, nehmen wir an, daß der Kondensator zur Zeitpunkt $t = 0$ eine Ladung Q_0 enthalte; die Ladung zum Zeitpunkt t sei $Q(t)$. Dann beträgt der Spannungsabfall am Kondensator

$$U_1(t) = \frac{Q(t)}{C},$$

der an der Spule ist nach der LENZschen Regel gleich

$$U_2(t) = L\dot{I}(t) = L\ddot{Q}(t),$$

wobei $I(t) = \dot{Q}(t)$ die Stromstärke bezeichnet, und am Widerstand haben wir natürlich nach dem OHMschen Gesetz

$$U_3(t) = RI(t) = R\dot{Q}(t).$$

Diese drei Spannungen müssen sich zu Null addieren, d.h.

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{Q}(t) + \frac{R}{L}\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{LC} = 0.$$

Um bei der Lösung dieser Gleichung keine komplizierten Konstanten mitschleppen zu müssen, schreiben wir die Gleichung bis auf weiteres in der Form

$$\ddot{Q}(t) + \rho\dot{Q}(t) + \sigma Q(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{R}{L} \text{ und } \sigma = \frac{1}{LC}.$$

Außerdem schreiben wir $y(t)$ anstelle von $Q(t)$, um es einerseits mit gewohnten Variablen zu tun zu haben und andererseits, weil wir diesen Typ von Gleichungen noch auf viele andere Probleme anwenden können, bei denen die gesuchte Funktion nicht als Ladung interpretiert werden kann. Wir interessieren uns für das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = y_1.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation ergibt

$$s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy_0 - y_1 + \rho\big(s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0\big) + \sigma\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = 0$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{s^2 + \rho s + \sigma}.$$

Eine LAPLACE-Transformierte dieser Form haben wir bislang noch nicht gesehen; wir kennen nur Nenner der Form $(s+\lambda)^2+\omega^2$. In diese Richtung führt uns einer der ältesten Tricks der Mathematik, die über 2000 Jahre alte quadratische Ergänzung:

$$s^2 + \rho s + \sigma = \left(s + \frac{\rho}{2}\right)^2 + \sigma - \frac{\rho^2}{4}.$$

Falls $\sigma > \rho^2/4$ können wir

$$\omega = \sqrt{\sigma - \frac{\rho^2}{4}}$$

setzen und haben dann

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2} = \frac{y_0(s+\rho/2)}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2}.$$

Diese beiden Summanden erkennen wir als (bis auf konstante Faktoren) die LAPLACE-Transformierten von $e^{-\rho t/2}\cos\omega t$ und $e^{-\rho t/2}\sin\omega t$, d.h.

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-\rho t/2}\cos\omega t + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{\omega} e^{-\rho t/2}\sin\omega t \\ &= e^{-\rho t/2}\left(y_0\cos\omega t + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{\omega}\sin\omega t\right). \end{aligned}$$

Der Kondensator entlädt sich also, wie es physikalisch zu erwarten war, aber der zeitliche Verlauf ist gegeben durch eine gedämpfte

Schwingung. Die Dämpfung wird mit wachsendem $\rho = R/L$ immer stärker wird, d.h. je größer der Widerstand und je kleiner die Induktivität ist, desto größer ist die Dämpfung. Abbildung 25 zeigt ein Beispiel einer gedämpften Schwingung zusammen mit der Amplitudenfunktion $e^{-\rho t}$.

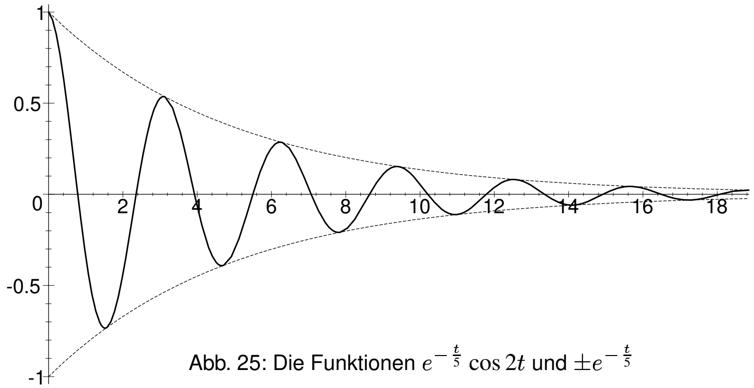

Abb. 25: Die Funktionen $e^{-\frac{t}{5}} \cos 2t$ und $\pm e^{-\frac{t}{5}}$

Falls σ kleiner ist als $\rho^2/4$, können wir

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \sigma}$$

setzen und haben dann

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 - \omega^2}\,.$$

Diesen Ausdruck kennen wir so noch nicht als LAPLACE-Transformierte einer Funktion, aber wir wissen, daß allgemein $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ist und können hoffentlich auch noch genug Bruchrechnung, um die Beziehung

$$\frac{1}{(s+\rho/2)-\omega} - \frac{1}{(s+\rho/2)+\omega} = \frac{2\omega}{(s+\rho/2)^2 - \omega^2}$$

nachzurechnen. Damit ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 - \omega^2} \\
&= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)-\omega} - \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)+\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{y_0(s+\rho/2-\omega) + y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{s+\rho/2-\omega}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{y_0(s+\rho/2+\omega) + y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{s+\rho/2+\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2\omega}\left(y_0 + \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{s+\rho/2-\omega} - y_0 - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{s+\rho/2+\omega}\right) \\
&= \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega}\cdot\frac{1}{s+\rho/2-\omega} \\
&\qquad - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega}\cdot\frac{1}{s+\rho/2+\omega}\,.
\end{aligned}$$

Diese Summanden können wir als LAPLACE-Transformierte identifizieren: Da $1/s$ die LAPLACE-Transformierte der Konstanten Eins ist, ist $1/(s+a)$ die von e^{-as}; wir haben hier also

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = {}& \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega}\cdot\mathcal{L}\{e^{-(\rho/2-\omega)t}\}(s) \\
& - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega}\cdot\mathcal{L}\{e^{-(\rho/2+\omega)t}\}(s)
\end{aligned}$$

und somit

$$y(t) = \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega}\cdot e^{-(\rho/2-\omega)t} - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega}\cdot e^{-(\rho/2+\omega)t}\,.$$

Wegen der Positivität von σ ist

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \sigma} < \sqrt{\frac{\rho^2}{4}} = \frac{\rho}{2}\,;$$

daher sind dies zwei Eyponentialfunktionen, die für $t \to \infty$ gegen null gehen, der Kondensator entlädt sich in diesem Fall also ohne Schwingungen gemäß einer Summe zweier Exponentialfunktionen. Die Bedingung

$\sigma < \frac{\rho^2}{4}$ übersetzt sich in diesem Fall in

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{L^2} \quad \text{oder} \quad R > \sqrt{\frac{L}{C}}\,,$$

wenn der Widerstand zu groß ist, dämpft er also so stark, daß es keine Schwingungskomponente mehr gibt.

Bleibt noch der Fall, daß $\sigma = \rho^2/4$ ist. Dann ist

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2} = \frac{y_0(s+\rho/2)}{(s+\rho/2)^2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2}$$
$$= \frac{y_0}{s+\rho/2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2}\,.$$

Da $1/s$ die LAPLACE-Transformierte der Eins ist und $1/s^2$ die der Identität, ist somit

$$y(t) = \left(y_0 + \left(y_1 + y_0\frac{\rho}{2}\right)t\right)\, e^{\frac{-\rho}{2}t}$$

Produkt einer linearen Funktion und einer abfallenden Eyponentialfunktion. Abbildung 26 zeigt zwei solche Funktionen, eine mit ansteigendem und eine mit abfallendem linearen Faktor.

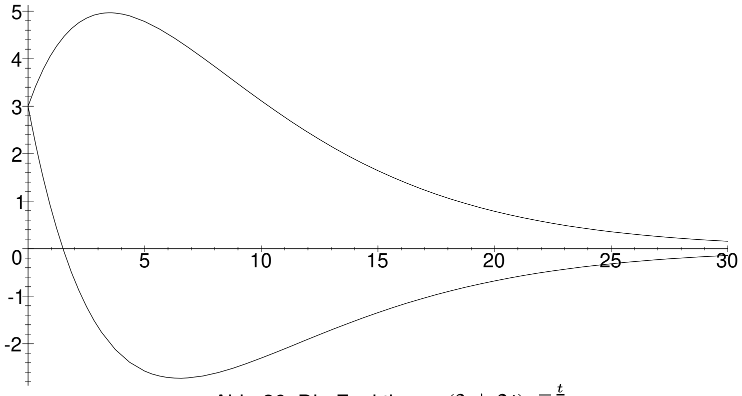

Abb. 26: Die Funktionen $(3 \pm 2t)e^{-\frac{t}{5}}$

Im obigen Stromkreis floß nur deshalb ein Strom, weil der Kondensator aus irgendeinem Grund bereits aufgeladen war; üblicher wäre,

daß ein Strom fließt, weil der Stromkreis eine Stromquelle enthält. Wir ergänzen deshalb den Stromkreis aus Abbildung 24 durch eine Wechselstromquelle mit Frequenz ω_0; der Einfachheit halber wählen wir die Phase so, daß dieser Wechselstrom durch eine reine Cosinusfunktion der Form $A_0 \cos\omega_0 t$ beschrieben werden kann mit $A_0, \omega_0 > 0$. Die Differentialgleichung wird dann zu

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = A_0 \cos\omega_0 t\,,$$

was wir wieder kurz schreiben als

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = c\cos\omega_0 t$$

mit

$$y(t) = Q(t), \quad \rho = \frac{R}{L}, \quad \sigma = \frac{1}{LC} \quad \text{und} \quad c = \frac{A_0}{L}\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation führt auf

$$(s^2 + \rho s + \sigma)\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy_0 - y_1 - \rho y_0 = \frac{cs}{s^2 + \omega_0^2}$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{s^2 + \rho s + \sigma} + \frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)}\,.$$

Die Umkehrung der LAPLACE-Transformation des ersten Summanden kennen wir: Das ist die Lösung der gerade betrachteten Differentialgleichung. Mit dem zweiten Summanden könnten wir umgehen, wenn nur einer der beiden Faktoren im Nenner stünde; dann hätten wir im wesentlichen die LAPLACE-Transformierte einer Cosinusfunktion.

Genau das gleiche Problem hätten wir, wenn wir eine Stammfunktion des zweiten Summanden suchen würden, und in dieser Situation wüßten wir auch, wie wir weiter vorgehen müßten: Durch Partialbruchzerlegung könnten wir den Integranden in einfachere Brüche zerlegen, deren Stammfunktionen wir kennen. Dieser Ansatz der Partialbruchzerlegung führt auch bei der LAPLACE-Transformation oft zum Erfolg: Falls die beiden Faktoren des Nenners verschieden sind, können wir mit geeigneten Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ schreiben

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2 + \rho s + \sigma}\,.$$

Falls beide Nenner gleich sind, d.h. wenn

$$\rho = 0 \quad \text{und} \quad \sigma = \omega_0^2$$

ist, funktioniert dies natürlich nicht; diesen Fall werden wir vorläufig zurückstellen. Multiplikation des obigigen Ansatzes mit dem Hauptnenner führt auf die Polynomgleichung

$$\begin{aligned} cs &= (\alpha s + \beta)(s^2 + \rho s + \sigma) + (\gamma s + \delta)(s^2 + \omega_0^2) \\ &= (\alpha + \gamma)s^3 + (\beta + \alpha\rho + \delta)s^2 + (\beta\rho + \alpha\sigma + \gamma\omega_0^2)s + \beta\sigma + \delta\omega_0^2 . \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich zeigt, daß rechts alle Koeffizienten außer dem von s verschwinden müssen. Beim ersten Koeffizienten bedeutet dies, daß

$$\gamma = -\alpha$$

sein muß, und beim letzten erhalten wir

$$\delta = -\frac{\sigma}{\omega_0^2}\beta .$$

Damit bleiben nur noch zwei Gleichungen für α und β übrig:

$$\rho\alpha + \left(1 - \frac{\sigma}{\omega_0^2}\right)\beta = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma - \omega_0^2)\alpha + \rho\beta = c .$$

Falls ρ nicht verschwindet, führt die erste Gleichung zu

$$\alpha = \frac{\frac{\sigma}{\omega_0^2} - 1}{\rho} \cdot \beta = \frac{\sigma - \omega_0^2}{\rho\omega_0^2} \cdot \beta ,$$

und damit ist nach der zweiten Gleichung

$$\left(\frac{(\sigma - \omega_0^2)^2}{\rho\omega_0^2} + \rho\right)\beta = c$$

oder

$$\beta = \frac{c}{\frac{(\sigma-\omega_0^2)^2}{\rho\omega_0^2} + \rho} = \frac{c\rho\omega_0^2}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2} .$$

Damit sind auch α, γ und δ bekannt:

$$\alpha = -\gamma = \frac{\sigma - \omega_0^2}{\rho\omega_0^2} \cdot \beta = \frac{c(\sigma - \omega_0^2)}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}$$

und

$$\delta = -\frac{\sigma}{\omega_0^2}\beta = \frac{-c\rho\sigma}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2} .$$

Bleibt noch der Fall $\rho = 0$ zu behandeln. Dann bleibt vom Gleichungssystem für α und β nur noch

$$\left(1 - \frac{\sigma}{\omega_0^2}\right)\beta = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma - \omega_0^2)\alpha = c$$

übrig. Ist $\sigma \neq \omega_0^2$, folgt, daß

$$\beta = \delta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = -\gamma = \frac{c}{\sigma - \omega_0^2}$$

sein muß, was offensichtlich genau die obigen Formeln im Spezialfall $\rho = 0$ sind. Für $\sigma = \omega_0^2$ sind wir in dem Fall, den wir zurückgestellt haben und sehen noch einmal, daß hier der obige Ansatz nicht zu Ziel führt, da die zweite Gleichung zu $0 \cdot \beta = c \neq 0$ wird. In allen anderen Fällen kennen wir nun reelle Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so daß

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2 + \rho s + \sigma}$$

ist. Vom ersten Summanden wissen wir, daß

$$\mathcal{L}\left\{\alpha \cos\omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right\} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2}$$

ist; den zweiten Summanden müssen wir wie oben durch quadratische Ergänzung

$$s^2 + \rho s + \sigma = \left(s - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \sigma - \frac{\rho^2}{4}$$

umformen, und genau wie dort hängt es vom Vorzeichen von

$$\sigma - \frac{\rho^2}{4}$$

ab, ob wir gedämpfte Schwingungen mit Frequenz

$$\omega = \sqrt{\sigma - \frac{\rho^2}{4}}$$

oder abfallende Eyponentialfunktionen erhalten. In jedem Fall ist die Lösung Linearkombination einer reinen Schwingung mit der erregenden Frequenz ω_0, im elektrischen Schwingkreis also der Frequenz der Wechselstromquelle und einer Funktion, die für $t \to \infty$ gegen null geht. Langfristig setzt sich, wie auch Abbildung 27 zeigt, die erregende Frequenz durch.

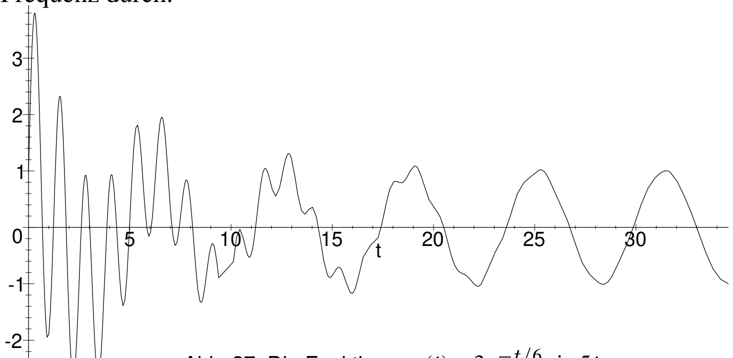

Abb. 27: Die Funktion $\cos(t) + 3e^{-t/6} \sin 5t$

Bleibt noch der zurückgestellte Fall, daß $\rho = 0$ und $\sigma = \omega_0^2$ ist. Dann müssen wir eine Funktion finden, der LAPLACE-Transformierte gleich

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

ist. Diese Funktion sieht so ähnlich aus wie die Ableitung von $1/(s^2+\omega_0^2)$; in der Tat ist

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)^2} = \frac{d}{ds} \frac{-c/2}{s^2 + \omega_0^2} .$$

Die Funktion, die hier abgeleitet wird, ist die LAPLACE-Transformierte von

$$f(t) = -\frac{c}{2\omega_0} \sin \omega_0 t ,$$

und nach Aussage *b)* des Lemmas aus §*1b* ist (sofern das Integral absolut

konvergiert) allgemein

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds} f(t) e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^\infty f(t) \cdot (-t) \cdot e^{-st}\, dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s) .$$

Also ist

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)^2} = \mathcal{L}\left\{ \frac{c}{2\omega_0} \cdot t \sin \omega_0 t \right\}(s) ,$$

und wir haben auch diesen Fall gelöst. Die Funktion $t \sin \omega_0 t$ ist in Abbildung 28 zu sehen; ihre Amplitude steigt immer weiter an.

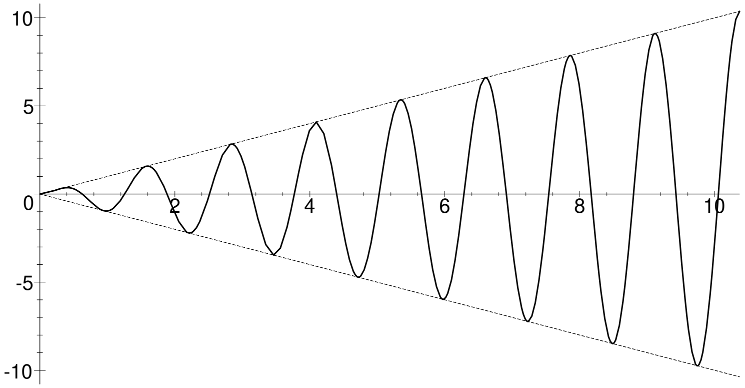

Abb. 28: Die Funktionen $t \sin 5t$

Da unbegrenzt ansteigende Funktionen in Anwendungen selten etwas gutes bedeuten, spricht man hier von einer *Resonanzkatastrophe:* Die erregende Schwingung hat dieselbe Frequenz wie der Schwingkreis, und das führt, bei Abwesenheit einer jeglichen Dämpfung, zu einer katastrophalen Aufschaukelung. Auch bei Dämpfung ist Resonanz zu beobachten: Die oben berechneten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, haben allesamt den Nenner

$$(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2 \omega_0^2 ,$$