und dieser Ausdruck geht gegen null für $r \to 0$. Also konvergieren die f_r für $r \to \infty$ in der L^2-Norm gegen f.

Der Vollständigkeit halber wollen wir uns noch überlegen, daß auch die Fläche zwischen den Graphen von f_r und von f für $r \to \infty$ gegen null geht: Wenn wir wie eben vorgehen, erhalten wir die Ungleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)|\, dt \le \delta + r(b-a)\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) + \delta\,,$$

und wenn wir hier wieder spezialisieren auf $\delta = \sqrt{r}$ wird dies zu

$$\sqrt{r}\left(2 + (b-a)\left(2 - \frac{4\sqrt{r}}{(b-a)^2}\right)\right)\,,$$

was für $r \to \infty$ gegen null geht.

Da f sowie sämtliche f_r außerhalb des Intervalls $[a, b]$ verschwinden, geht damit auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)|\, dt$$

für $r \to \infty$ gegen null. Dieses Integral bezeichnet man als die L^1-Norm von $f - f_r$; die Folge der Funktionen f_r konvergiert also auch in der L^1-Norm gegen f.

§ 6: Fourier-Transformationen von Distributionen

a) Distributionen auf dem Schwartz-Raum

Die bloße Existenz einer FOURIER-Transformierten nützt uns relativ wenig; wir wollen auch, daß – soweit wie möglich – die für stark abfallende Funktionen bewiesenen Sätze gelten, und wir möchten zum Nachweis dieser Tatsache die doch recht umfangreichen Beweise aus dem letzten Paragraphen wiederverwenden können.

Dazu betrachten wir für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die lineare Abbildung

$$T_f\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\, dt \end{cases}.$$

(Man beachte daß hier, trotz der komplexwertigen Funktionen, keine komplexe Konjugation steht!)

Falls diese Abbildung wohldefiniert ist, *falls* also das uneigentliche Integral für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existiert, und *falls* zusätzlich auch die FOURIER-Transformierte $\widehat{f}(\omega)$ existiert *und* zusätzlich auch noch alle Integrale $T_{\widehat{f}}(\varphi)$ konvergieren, ist für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} T_{\widehat{f}}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\,\varphi(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt\right) \varphi(\omega)\, d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega t}\, d\omega\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{\varphi}(t)\, dt \\ &= T_f(\widehat{\varphi}) \end{aligned}$$

– *sofern* alle dastehenden Integrale absolut konvergieren, so daß wir den Satz von FUBBINI anwenden können.

Diese Beziehung

$$T_{\widehat{f}}(\varphi) = T_f(\widehat{\varphi})$$

wird uns erlauben, die FOURIER-Transformation einer uns interessierenden Funktion f zurückzuführen auf FOURIER-Transformationen auf dem SCHWARTZ-Raum, wo wir bereits alle Arten von schönen Aussagen bewiesen haben.

Als erstes müssen wir uns aber überlegen, für welche Funktionen f die Abbildung T_f überhaupt existiert. Da wir an die Funktionen φ so extrem hohe Anforderungen stellen, kommen wir bei f mit sehr schwachen Voraussetzungen aus:

Lemma: Falls es zu einer stückweise stetigen Funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Konstanten $k \in \mathbb{N}_0$ und $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so daß

$$|f(t)| \le c \cdot |t|^k$$

ist, existiert $T_f(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist $t^\ell \varphi(t)$ beschränkt für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$, insbesondere also für $\ell = k$ und $\ell = k+2$. Damit ist auch deren Summe beschränkt, es gibt also eine Konstante $M > 0$, für die

$$\left| t^k (1+t^2)\varphi(t) \right| = \left| t^k \varphi(t) + t^{k+2}\varphi(t) \right| \le M$$

ist. Damit folgt

$$\left| (1+t^2) f(t)\varphi(t) \right| \le \left| (1+t^2) c t^k \varphi(t) \right| \le cM$$

und

$$|f(t)\varphi(t)| \le \frac{cM}{1+t^2}\,.$$

Da das Integral über die rechte Seite existiert (wie wir beim Beweis des Lemmas in §5*a)* gesehen haben, ist es gleich $cM\pi$), ist auch das Integral $T_f(\varphi)$ absolut konvergent. ■

Für die Existenz von $T_f(\varphi)$ reicht also, daß f nicht schneller wächst als ein Polynom.

Betrachten wir als nächstes die wichtigsten Eigenschaften von T_f: Offensichtlich ist T_f eine lineare Abbildung, denn für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\begin{aligned} T_f(\lambda\varphi + \mu\psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(\lambda\varphi(t) + \mu\psi(t)\big)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda f(t)\varphi(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \mu f(t)\psi(t)\,dt \\ &= \lambda T_f(\varphi) + \mu T_f(\psi)\,. \end{aligned}$$

Außerdem hat T_f eine Stetigkeitseigenschaft, die wir im Hinblick auf spätere Anwendungen gleich etwas allgemeiner formulieren wollen:

Lemma: $\varphi_n: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $f, \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ seien Funktionen derart, daß die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi_n(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

existieren. Außerdem sei f beschränkt und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|\,dt \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt\,.$$

Beweis: Ist $|f(t)| \le M$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n(t)\,dt \right| \\ &\quad\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot |\varphi(t) - \varphi_n(t)|\,dt \\ &\quad\le M \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|\,dt\,, \end{aligned}$$

und letztere ist das M-fache einer Nullfolge, also selbst Nullfolge. ■

Wir wollen dies anwenden auf Funktionen φ aus dem SCHWARTZ-Raum und Funktionen f, die höchstens polynomial ansteigen, die aber nicht notwendigerweise beschränkt sind. Um das zu kompensieren, führen wir für Folgen aus dem SCHWARTZ-Raum einen stärkeren Konvergenzbegriff ein, wobei wir (wie schon bei der Definition einer stark abfallenden Funktion) gleich so viel wie nur irgendwie möglich fordern:

Definition: Eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, wenn für alle $r, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^k \big(\varphi^{(r)}(t) - \varphi(t)\big) \right| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty\,.$$

Wir fordern also, daß *alle* Produkte von t-Potenzen und Ableitungen von φ_n gegen die entsprechende Konstruktion für φ konvergieren. Unter dieser extrem starken Voraussetzung verwundert nicht

Lemma: f sei eine stückweise stetige Funktion, die einer Abschätzung der Form $|f(t)| \le ct^k$ genüge. Dann ist für jede gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to\infty} T_f(\varphi_n) = T_f(\varphi)\,.$$

Beweis: Wir gehen ähnlich vor wie beim Beweis der Existenz von $T_f(\varphi)$: Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^\ell \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big) \right|$$

eine Nullfolge, es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^\ell \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big) \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N\,.$$

Insbesondere gibt es solche Werte für $\ell = k$ und für $\ell = k+2$, und damit gibt es auch zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^k (1+t^2) \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big) \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N\,,$$

d.h.

$$\left| t^k \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big) \right| < \frac{\varepsilon}{1+t^2} \quad \text{für alle } n > N \text{ und } t \in \mathbb{R}\,.$$

Damit ist

$$\big|T_f(\varphi) - T_f(\varphi_n)\big| \le \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(t)\big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big)\big|\, dt$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \left|ct^k \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big)\right| dt \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c\varepsilon}{1+t^2}\, dt = c\pi \cdot \varepsilon$$

für alle $n > N_0$. Da c und π konstant sind und wir ε beliebig klein machen können, folgt die Behauptung.

■

Definition: Eine *Distribution* auf dem SCHWARTZ-Raum ist eine lineare Abbildung $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, so daß für jede gegen ein $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge stark abfallender Funktionen φ_n gilt:

$$\lim_{n\to\infty} T_f(\varphi_n) = T_f(\varphi)\,.$$

Nach dem gerade bewiesenen Lemma ist also T_f für jede stückweise stetige Funktion f, die nicht stärker als ein Polynom wächst, eine Distribution auf dem SCHWARTZ-Raum.

Das sind allerdings bei weitem noch nicht alle Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum: Beispielsweise ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ auch

$$\Delta_a\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto \varphi(a) \end{cases}$$

eine Distribution: Die Linearität ist klar, und für eine gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge stark abfallender Funktionen φ_n ist insbesondere

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|$$

eine Nullfolge, erst recht also $|\varphi(a) - \varphi_n(a)|$, so daß es auch mit der Stetigkeit keine Probleme gibt.

Diese Distribution bezeichnet man als DIRACsche Delta-Distribution. Nicht ganz korrekt spricht man auch von einer DIRACschen Delta-

Funktion und schreibt, gerade so als sei Δ_a von der Form T_δ,

$$\Delta_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\, dt \quad \text{und} \quad \Delta_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t)\, dt\,.$$

(Letztere Formel würde durch Anwendung der Substitutionsregel aus der ersten folgen, falls $\delta(t)$ wirklich eine Funktion wäre.)

Tatsächlich hat natürlich in beiden Formel die rechte Seite nur *als ganzes* eine sinnvolle Bedeutung, nämlich das, was auf der linken Seite steht. Trotzdem hat sich die Schreibweise gerade in der technischen Literatur eingebürgert und soll daher auch hier verwendet werden.

PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (1902–1984) wuchs auf in England als Sohn eines Schweizer Vaters und einer englischen Mutter. Trotz großem Interesse an der Mathematik studierte er von 1918–1921 Elektrotechnik an der Universität Bristol, da er auf keinen Fall Lehrer werden wollte. 1921 erhielt er ein Stipendium der Universität Cambridge; da dieses aber nicht zum Leben gereicht hätte, blieb er in Bristol, wo ihn die Universität von Studiengebühren befreite und seinen Wechsel in die Mathematik erlaubte. Ab 1923 arbeitete er in Cambridge an seiner Dissertation über Quantenmechanik, die er 1926 abschloß. 1930 folgte ein Buch über Quantenmechanik, für das er 1933 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet wurde. 1932 bekam er einen Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Cambridge. Nach seiner Emeritierung lebte er in Florida, wo er 1971 Physikprofessor an der Florida State University wurde. Zentrales Thema seiner Arbeiten war die Anwendung mathematischer Methoden auf die Quantenmechanik und die Relativitätstheorie sowie auch Ansätze zur (bis heute nicht befriedigend gelösten) Vereinheitlichung dieser beiden Theorien.

Tatsächlich benutzt man Formeln wie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\, dt = f(0)$$

nicht nur für Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum, sondern für beliebige stetige (und teilweise auch noch allgemeinere) Funktionen. Dies ist unproblematisch, solange man sich auf Operationen beschränkt, die

auch für lineare Funktionen auf dem jeweils betrachteten Funktionenraum sinnvoll sind.

Unabhängig vom Funktionenraum ist es sinnlos, bei einer Distribution wie $\delta(t)$ von *Funktionswerten* zu reden: Wenn es wirklich eine *Funktion* $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gäbe, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\, dt = f(0)$$

wäre für jede (stark abfallende oder auch einfach stetige) Funktion f, so müßte $\delta(t)$ für $t \neq 0$ verschwinden – abgesehen eventuell von einigen isolierten Punkten, die für die Integration bedeutungslos sind. Damit müßte aber unabhängig vom Funktionswert $\delta(0)$ und unabhängig von der Funktion f das Integral verschwinden.

Die „Lösung“, $\delta(0) = \infty$ zu setzen, führt nicht zu einer sinnvollen Interpretation des linksstehenden Integrals, denn wenn man einen Ausdruck wie $2 \cdot \infty$ überhaupt interpretieren kann, dann wohl nur im Sinne von $2 \cdot \infty = \infty$ tun, und damit wäre $2\delta(t) = \delta(t)$, obwohl die Distributionen

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto \varphi(0) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto 2\varphi(0) \end{cases}$$

wohldefiniert und wohlunterscheidbar sind.

Problemlos dagegen sind Linearkombinationen der Art

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \delta(t - t_k)\,,$$

denn Linearkombinationen von Distributionen sind wieder Distributionen. Im vorliegenden Fall wäre dies die Distribution

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \Delta_{t_k}\,,$$

für eine stark abfallende Funktion φ ist also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \delta(t - t_k) \right) \varphi(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta_{t_k}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi(t_k)\,,$$

und da man zumindest die DIRAC-Distribution auch einfach als lineare Abbildung auf $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ betrachtet, kann man dies auch für eine beliebige stetige Funktion φ sinnvoll interpretieren.

So ist beispielsweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)e^{i\omega t}\,dt = e^{i\omega}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\big(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\big)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \cos t\,.$$

Zumindest wenn wir uns auf Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum beschränken, sind auch viele unendliche Linearkombinationen wie etwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\Delta_k$$

wohldefiniert, denn für eine stark abfallende Funktion φ konvergieren sowohl

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k) \quad \text{als auch} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\varphi(k)\,.$$

In einer (hier nicht betrachteten) Distributionentheorie über dem Raum aller stetiger oder auch aller beliebig oft differenzierbarer Funktionen wäre allerdings keine der beiden Summen wohldefiniert; beisoielsweise könnte man hier $\varphi \equiv 1$ einsetzen, was zu divergenten Summen führen würde.

Wir können eine Distribution T auf dem SCHWARTZ-Raum nicht nur mit Konstanten multiplizieren, sondern allgemeiner auch mit mit einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion g, die höchstens polynomiales Wachstum hat: Für eine Distribution der Form T_f ist

$$T_{gf}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(g(t)\varphi(t)\big)\,dt = T_f(g\varphi)\,,$$

da auch $g\varphi$ eine stark abfallende Funktion ist. Somit können wir für eine beliebige Distribution T auf dem SCHWARTZ-Raum das Produkt

$$gT\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto T(g\varphi) \end{cases}$$

definieren. Beispielsweise gehört $t\delta(t)$ zur Distribution

$$t\Delta_0\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto \Delta_0(t\varphi) = (t\varphi)(0) = 0\cdot\varphi(0) = 0\,, \end{cases}$$

d.h. $t\delta = 0$. Man überlegt sich leicht, daß für jede Funktion g wie oben gilt $g\delta = g(0)\delta$.

Problematischer ist die Definition eines Produkts von Distributionen: Die obige Rechnung drückt T_{gf} aus durch T_f und g, nicht aber durch T_f und T_g, wie wir es bräuchten, um ein Produkt zweier Distributionen zu definieren. Auch sonstige Versuche, den Ausdruck $T_{gf}(\varphi)$ umzuformen, führen nicht zu brauchbareren Ergebnissen, und in der Tat kann man in der Theorie der Distributionen ein Produkt nur als Linearform auf dem SCHWARTZ-Raum der stark abfallenden Funktionen *zweier* Veränderlicher definieren. Dieser Raum wird weiter hinten zwar kurz erwähnt werden, es würde aber zu weit führen, ihn wirklich zu behandeln. Wir wollen daher nur festhalten, daß Produkte von δ-„Funktionen“ nicht sinnvoll als Distributionen auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiert werden.

Ähnlich ist es mit Ausdrücken der Form $e^{\delta(t)}$ oder $\sin\delta(t)$: Da beispielsweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{f(t)}\varphi(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{\varphi(t)}\,dt$$

nichts miteinander zu tun haben (und $e^{\varphi(t)}$ nicht einmal eine stark abfallende Funktion ist), können wir hier nicht einfach die Exponentialfunktion ins Argument von T_f schieben, und es ist gibt auch keine sonstige Art und Weise, Ausdrücken wie $e^{\delta(t)}$ oder $\sin\delta(t)$ einen Sinn zu geben.

b) Die Fourier-Transformierte einer Distribution

Die Rechnung zu Beginn von Abschnitt *a)* legt folgende Definition nahe:

Definition: Die FOURIER-Transformierte der Distribution $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ ist die Distribution

$$\widehat{T}\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto T(\widehat{\varphi}) \end{cases};$$

die inverse FOURIER-Transformierte von T ist

$$\check{T}\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto T(\check{\varphi}) \end{cases}.$$

Zunächst müssen wir uns überlegen, ob das überhaupt sinvoll ist:

Lemma: *a)* Für eine Distribution $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ sind auch $\widehat{T}$ und $\check{T}$ wieder Distributionen.
b) $\check{\widehat{T}} = \widehat{\check{T}} = T$.

Beweis: a) Die Linearität von $\widehat{T}$ ist klar, da die FOURIER-Transformation auf dem SCHWARTZ-Raum eine lineare Operation ist, d.h. die FOURIER-Transformierte von $\lambda\varphi + \mu\psi$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ist $\lambda\widehat{\varphi} + \mu\widehat{\psi}$.

Für die Stetigkeit von $\widehat{T}$ genügt es wegen der Stetigkeit von T, wenn wir zeigen, daß für eine konvergente Folge von Funktionen $\varphi_n(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit Grenzwert $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ auch die Folge der FOURIER-Transformierten $\widehat{\varphi_n}$ gegen $\widehat{\varphi}$ konvergiert. Wir müssen also zeigen, daß für je zwei Zahlen $k, r \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \left| \omega^k \left(\widehat{\varphi_n}\right)^{(r)} - \omega^k \left(\widehat{\varphi}\right)^{(r)} \right| = 0\,.$$

Nach den Formeln aus §5*c)* ist

$$\omega^k \left(\widehat{\varphi}\right)^{(r)} = \omega^k \cdot (-i)^r \widehat{t^r\varphi} = (-1)^r \omega^k \widehat{t^r\varphi} = (-1)^{r+k} \widehat{\psi}$$

mit $\psi = \frac{d^k}{dt^k}(t^r\varphi)$. Durch k-fache Anwendung der Produktregel folgt, daß ψ Linearkombination von Termen der Form $t^s\varphi^{(\ell)}$ ist. Wegen der Dreiecksungleichung reicht es also, zu zeigen, daß für alle $\ell, s \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \left| \widehat{t^\ell\varphi_n^{(s)}} - \widehat{t^\ell\varphi^{(s)}} \right| = 0\,.$$

Nach Definition der Konvergenz in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gibt es zu ℓ, s und jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq N_1$ gilt

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^\ell \varphi_n^{(s)} - t^\ell \varphi^{(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Genauso gibt es auch ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq N_2$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^{\ell+2} \varphi_n^{(s)} - t^{\ell+2} \varphi^{(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist; für n größer oder gleich dem Maximum N_0 von N_1 und N_2 gitlt also

$$\left| t^\ell \varphi_n^{(s)} - t^\ell \varphi^{(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{1+t^2}\,.$$

Damit ist für $n \geq N_0$

$$\left| \widehat{t^\ell\varphi_n^{(s)}}(\omega) - \widehat{t^\ell\varphi^{(s)}}(\omega) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(t^\ell(\varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell(\varphi^{(s)}(t)\right) dt \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| t^\ell(\varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell(\varphi^{(s)}(t) \right| dt \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leq \varepsilon\pi\,,$$

und damit ist der Limes für $n \to \infty$ gleich null, wie behauptet. ∎

Satz: Falls für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$ existiert, ist $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$.

Beweis: Da $e^{-i\omega t}$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$ Betrag eins hat, ist

$$\left| f(t)e^{-i\omega t} \right| = |f(t)|\,.$$

Somit konvergiert für eine solche Funktion das Integral $\widehat{f}(\omega)$ absolut, so daß die Existenz der FOURIER-Transformierten kein Problem ist. Auch die Integrale aus der Rechnung zu Beginn von Abschnitt *a)* konvergieren dann absolut, so daß die Behauptung folgt. ∎

Um zu sehen, was die neue Definition bringt, wollen wir die FOURIER-Transformierte des Sinus berechnen:

$$\widehat{\sin}\,\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \sin t\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i(1-\omega)t} - e^{i(-1-\omega)t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(1-\omega)t}\, dt - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-1-\omega)t}\, dt$$

existiert offensichtlich nicht, denn für $\omega = \pm 1$ hat eines der Integrale den Integranden eins, wird also unendlich, und in allen anderen Fällen integrieren wir von $-\infty$ bis ∞ über reine Schwingungen, und solche Integrale konvergieren nicht.

Im Distributionensinne ist

$$\widehat{T}_{\sin}(\varphi) = T_{\sin}(\widehat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega\, \widehat{\varphi}(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega} - e^{-i\omega})\, \widehat{\varphi}(\omega)\, dt$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\omega) e^{i\omega}\, d\omega - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\omega) e^{i\omega}\, d\omega$$

$$= \frac{2\pi}{2i} \left(\check{\widehat{\varphi}}(1) - \check{\widehat{\varphi}}(-1)\right) = -\pi i \left(\varphi(1) - \varphi(-1)\right),$$

denn für jede Funktion g ist

$$\check{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega, \quad \text{also} \quad \check{g}(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega}\, d\omega\,.$$

Für die oben eingeführte DIRAC-Distribution ist

$$\Delta_a(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\varphi(t)\, dt = \varphi(a)\,,$$

und damit

$$\widehat{T}_{\sin} = -\pi i \left(\Delta_1 - \Delta_{-1}\right).$$

Kurz, wenn auch etwas kriminell, können wir dies als

$$\widehat{\sin}(\omega) = -\pi i \left(\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)\right)$$

schreiben.

Demnach sollte, wenn diese Rechnung auf ein sinnvolles Ergebnis führte,

$$\sin t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\sin}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

sein, und in der Tat ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-\pi i)\left(\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)\right) e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 1) e^{i\omega t}\, d\omega + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 1) e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$= -\frac{i}{2}\left(e^{it} - e^{-it}\right) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t\,.$$

c) Funktionen und ihre Distributionen

Der letzte Abschnitt hat gezeigt, daß die FOURIER-Transformation auf dem Niveau der Distributionen weitgehend unproblematisch ist. Was uns in erster Linie interessiert, sind aber Aussagen über die FOURIER-Transformation auf dem Niveau der *Funktionen:* Hier wissen wir zwar, wie man einer stückweise stetigen Funktion, deren Wachstum durch eine Potenz beschränkt ist, eine Distribution zuordnen können, wir wissen aber noch nicht, ob umgekehrt die Funktion durch ihre Distribution eindeutig bestimmt ist. Diese Frage wollen wir jetzt untersuchen.

Wir gehen also davon aus, daß wir zwei stückweise stetige Funktionen f und g haben derart, daß $T_f = T_g$ ist. Für jede stark abfallende Funktion φ

ist dann

$$T_f(\varphi) = T_g(\varphi) \quad \text{oder} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi(t)\,dt\,.$$

Wir wollen dies für einige spezielle Funktionen φ anwenden; da wir leider wir nur sehr wenige stark abfallende Funktionen kennen, gibt es dazu wenig Auswahl.

Wir kennen beispielsweise aus §5*e)* die Funktionen

$$\varphi_{a,b,r}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\frac{4r}{(b-a)^2}} e^{\frac{-r}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases},$$

von denen wir dort gezeigt hatten, daß sie für feste Werte von a, b und ein variables $r > 0$ für $r \to 0$ gegen den Rechteckimpuls

$$R_{a,b}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } a \le t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

konvergieren. Diese Konvergenz haben wir sowohl bezüglich der L^2-Norm als auch bezüglich der L^1-Norm nachgerechnet. Wegen letzterer können wir aus den Gleichungen

$$T_f(\varphi_{a,b;r}) = T_g(\varphi_{a,b;r})$$

auf Grund des zweiten Lemmas aus Abschnitt *a)* schließen, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)R_{a,b}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)R_{a,b}(t)\,dt, \quad \text{d.h.} \quad \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$$

ist für alle a, b.

Als stückweise stetige Funktionen haben f und g Stammfunktionen F und G; damit ausgedrückt ist also

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}\,.$$

(Strenggenommen haben wir das nur gezeigt für $b > a$, aber im Falle $b < a$ können wir einfach obige Überlegung für das Intervall $[b, a]$ wiederholen. Setzen wir $b = a + h$, so gilt daher auch

$$F(a+h) - F(a) = G(a+h) - G(a)$$

und

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \frac{G(a+h) - G(a)}{h}$$

für alle $a, h \in \mathbb{R}$ mit $h \neq 0$.

Lassen wir in dieser Gleichung h gegen null gehen, erhalten wir, sofern F *bzw.* G im Punkt a differenzierbar ist, den Wert der jeweiligen Ableitung im Punkt a.

Eine stückweise stetige Funktion hat eine stetige Stammfunktion; diese ist überall dort differenzierbar, wo die Ausgangsfunktion keine Sprungstelle hat, und dort ist ihre Ableitung gleich dem Funktionswert der Ausgangsfunktion. Damit gilt

$$f(t) = g(t) \quad \text{falls } f, g \text{ im Punkt } t \text{ stetig sind.}$$

Die Funktionen f und g können sich also höchstens an ihren Sprungstellen unterscheiden.

Sind f und g sogar stetig, ist also $f = g$, und das gilt auch, wenn sowohl f als auch g nur die in §4*e)* betrachtete Mittelwerteigenschaft

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \quad \text{und} \quad g(t) = \frac{g(t^+) + g(t^-)}{2}$$

haben, denn die links- und rechtsseitigen Grenzwerte hängen nur von den Werten ab, die die Funktionen an Stellen annehmen, an denen sie stetig sind.

Das wird uns in den meisten Fällen reichen, insbesondere wenn wir uns auf absolut integrierbare Funktionen beschränken:

Definition: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *absolut integrierbar,* wenn sie stückweise stetig ist und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\;dt$$

konvergiert.

Lemma: Ist die Funktion f absolut integrierbar, so existiert die FOURIER-Transformierte von f als Funktion; diese Funktion ist stetig und beschränkt.

Beweis: Nach Definition ist

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Der Betrag des Integranden ist $|f(t)|$; da f absolut integrierbar ist, konvergiert das Integral absolut und ist damit insbesondere konvergent.

Der Integrand $f(t)e^{-i\omega t}$ ist als Funktion von ω für jeden Wert von t stetig und als Funktion von t immerhin noch stückweise stetig. Daher zeigt das Lemma aus §5*b)* zunächst, daß für Intervalle $[a, b]$, in denen f stetig ist, auch

$$\int_a^b f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

eine stetige Funktion von ω ist. Damit gilt dasselbe für jedes endliche Intervall, denn endliche Summen stetiger Funktionen sind wieder stetig. Für $a \to -\infty$ und $b \to \infty$ schließlich konvergiert das Integral nach Voraussetzung absolut, also auch gleichmäßig, und damit ist auch die Grenzfunktion $\widehat{f}(\omega)$ stetig und beschränkt. ■

d) Ableitungen von Distributionen

Für die Lösung vieler wichtiger Differentialgleichungen wird sich als extrem nützlich erweisen, daß die FOURIER-Transformation (und auch einige ihrer Modifikationen) eine Differentiation in eine Multiplikation überführt: Wie wir in §5*c)* gesehen haben, ist für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und alle $r \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^r}{d\omega^r}\widehat{\varphi}(\omega) = (-i)^r\,\widehat{t^r\varphi}(\omega)$$

und

$$\omega^r\,\widehat{\varphi}(\omega) = (-i)^r\,\widehat{\varphi^{(r)}}(\omega)\,.$$

Da Lösungen interessanter Differentialgleichungen nur selten stark abfallende Funktionen sind, hätten wir das gerne auch für allgemeinere Funktionen, und wenn möglich möchten wir es ohne großen Aufwand beweisen, indem wir es über die Theorie der Distributionen auf die bekannten Gleichungen für Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum zurückführen.

Dazu schauen wir zunächst, was Ableitungen auf dem Niveau der Distributionen bedeuten, wie man also beispielsweise eine Ableitung der DIRACschen δ-Distribution definieren kann. Es ist klar, daß ein Ansatz wie

$$\dot{\delta}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\delta(t+h)-\delta(t)}{h}$$

zu keinem vernünftigen Ergebnis führen kann; wir müssen unserer alten Strategie folgen und für eine differenzierbare Funktion f die Distribution $T_{\dot f}$ ausrechnen in der Hoffnung, das dies zu einer Formel führt, die sich auf beliebige Distributionen verallgemeinern läßt.

Für eine differenzierbare Funktion f mit der Eigenschaft, daß sowohl f als auch die Ableitung $\dot f$ höchstens polynomiales Wachstum haben, ist

$$T_{\dot f}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot f(t)\varphi(t)\,dt\,.$$

Nach der Regel für partielle Integration ist daher

$$T_{\dot f}(\varphi) = f(t)\varphi(t)\,\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\infty}^{\infty} f(t)\dot\varphi(t)\,dt\,.$$

Da f höchstens polynomiales Wachstum hat, ist $|f(t)|$ kleiner oder gleich einem Ausdruck der Form $c\,|t|^k$ für eine reelle Zahl $c > 0$ und eine natürliche Zahl k. Da außerdem φ eine stark abfallende Funktion ist, bleibt $\left|t^{k+1}\varphi(t)\right|$ beschränkt für alle t, d.h.

$$|\varphi(t)| \le \frac{M}{|t|^{k+1}}$$

für eine reelle Zahl $M > 0$. Damit ist

$$|f(t)\varphi(t)| \le \left| ct^k \cdot \frac{M}{t^{k+1}} \right| \le \frac{cM}{|t|} \,.$$

Somit geht das Produkt $\varphi(t)f(t)$ gegen Null für $t \to \pm\infty$ und

$$T_{\dot f}(\varphi) = -\int_{\infty}^{\infty} f(t)\dot\varphi(t)\,dt = T_f(\dot\varphi)\,.$$

Damit ist klar, wie wir die Ableitung einer Distribution definieren:

Definition: Die Ableitung einer Distribution $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ ist die Distribution

$$\dot T\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto -T_f(\dot\varphi) \end{cases},$$

die n-te Ableitung entsprechend

$$T^{(n)}\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto (-1)^n T_f(\varphi^{(n)}) \end{cases}.$$

Zum Nachweis, daß $\dot T$ und allgemeiner auch $T^{(n)}$ Distributionen sind, müssen wir zeigen, daß dies lineare Abbildungen sind – angesichts der Linearität der Differentiation ist das klar. Zum Nachweis der Stetigkeit aber müssen wir wissen, daß für eine konvergente Folge von Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum auch die Folge der abgeleiteten Funktionen konvergiert; dies gilt nur deshalb, weil wir die Konvergenz im SCHWARTZ-Raum so definiert haben, daß auch alle Ableitungen und deren Produkte mit t-Potenzen konvergieren müssen.

Beispielsweise ist also für die DIRAC-Distribution

$$\Delta_a^{(n)}(\varphi) = \varphi^{(n)}(a)$$

oder, mit der δ-„Funktion" ausgedrückt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-a)\,\varphi(t)\,dt = \varphi^{(n)}(a)\,.$$

Auch Sprungfunktionen wie

$$\vartheta\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

lassen sich in der schönen neueh Welt der Distributionen problemlos differenzieren:

$$T_\vartheta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)\varphi(t)\,dt = \int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt$$

hat als Ableitung die Distribution $\dot T_\vartheta$ mit

$$\dot T_\vartheta(\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)\dot\varphi(t)\,dt = -\int_0^{\infty} \dot\varphi(t)\,dt = -\varphi(t)\Big|_0^{\infty} = \varphi(0)\,,$$

da $\varphi(t)$ bei einer stark abfallenden Funktion für $t \to \infty$ gegen null geht. Diese Distribution kennen wir aber: Es ist gerade die DIRAC-Distribution Δ_0. Also ist

$$\dot T_\vartheta = \Delta_0\,,$$

was sich in Funktionen ausgedrückt (mit aller gebotenen Vorsicht) auch als

$$\dot\vartheta(t) = \delta(t)$$

schreiben läßt. Entsprechend lassen sich im Distributionensinne auch andere Sprungfunktionen differenzieren; die Ableitung an einer Sprungstelle $t = t_0$ ist jeweils Sprunghöhe mal $\delta(t - t_0)$.

Damit sind Ableitungen auf dem Niveau der Distributionen problemlos. Das Produkt einer Distribution mit einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion mit höchstens polynomialem Wachstum haben wir bereits definiert; das können wir insbesondere anwenden auf die Funktion

$$\Pi_r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto t^r\,.$$

Wir erwarten

Lemma: Für jede Distribution $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ und jede natürliche Zahl r ist
$$\widehat{T}^{(r)} = (-i)^r \widehat{\Pi_r T} \quad \text{und} \quad \Pi_r \widehat{T} = (-i)^r \widehat{T^{(r)}}\,.$$

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt nach den entsprechenden Formeln für stark abfallende Funktionen aus §5*c)*
$$\begin{aligned}\widehat{T}^{(r)}(\varphi) &= (-1)^r \widehat{T}(\varphi^{(r)}) = (-1)^r T\big(\widehat{\varphi^{(r)}}\big) = (-1)^r T\big(i^r \Pi_r \widehat{\varphi}\big)\\ &= (-i)^r T(\Pi_r \widehat{\varphi}) = (-i)^r \Pi_r T(\widehat{\varphi}) = (-1)^r \widehat{\Pi_r T}(\varphi)\,,\end{aligned}$$
denn aus der Formel $\omega^r \widehat{\varphi}(\omega) = (-i)^r \widehat{\varphi^{(r)}}(\omega)$ folgt
$$\widehat{\varphi^{(r)}}(\omega) = i^r \omega^r \widehat{\varphi}(\omega)\,.$$
Entsprechend zeigt man auch die zweite Formel
$$\begin{aligned}\Pi_r \widehat{T}(\varphi) &= \widehat{T}(\Pi_r \varphi) = T\big(\widehat{\Pi_r \varphi}\big) = T\big(i^r \widehat{\varphi}^{(r)}\big)\\ &= i^r T\big(\widehat{\varphi}^{(r)}\big) = (-i)^r T^{(r)}(\widehat{\varphi}) = (-i)^r \widehat{T^{(r)}}\,.\end{aligned}$$
■

Für Funktionen folgt daraus sofort

Lemma: Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei r-fach differenzierbar und sowohl die FOURIER-Transformierte von f als auch die ihrer ersten r Ableitungen mögen (als Funktionen) existieren. Außerdem nehmen wir an, daß auch die Distributionen zu allen diesen Funktionen existieren. Dann stimmen
$$\frac{d^r}{d\omega^r}\widehat{f}(\omega) \quad \text{und} \quad (-i)^r \widehat{t^r f}(\omega)$$
überall dort überein, wo die Funktionen stetig sind; genauso auch
$$\omega^r \widehat{f}(\omega) \quad \text{und} \quad (-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega)\,.$$
■

e) Weitere Eigenschaften der Fourier-Transformation

Wir haben schon eine ganze Reihe von Eigenschaften der FOURIER-Transformation teils explizit, teils im Vorbeigehen, bewiesen; so haben wir bereits mehrfach ihre *Linearität* benutzt, d.h.
$$\textit{Für } h(t) = \lambda f(t) + \mu g(t) \ \textit{ ist } \ \widehat{h}(\omega) = \lambda \widehat{f}(\omega) + \mu \widehat{g}(\omega)\,.$$

Für eine *Streckung* $g(t) = f(at)$ ist mit der Substitution $u = at$
$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\frac{\omega}{a}u}\,\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)\,.$$

Auch das Verhalten unter *Verschiebungen* läßt sich leicht ausrechnen: Für $g(t) = f(t+a)$ ist mit der Substitution $s = t + a$
$$\begin{aligned}\widehat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t+a)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega(s-a)}\,ds\\ &= e^{i\omega a}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}\,ds = e^{i\omega a}\widehat{f}(\omega)\,.\end{aligned}$$

Für Verschiebungen im Zeit- und Frequenzbereich folgt entsprechend, daß $e^{ibt}f(t)$ die FOURIER-Transformierte $\widehat{f}(\omega - b)$ hat.

Was uns noch fehlt, ist das Verhalten unter *Faltungen,* die wir hier in völliger Analogie zum periodischen Fall aus §3*a)* definieren:

Definition: Für zwei Funktionen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt
$$f \star g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)\,ds \end{cases},$$
falls dieses Integral existiert, *Faltung* von f mit g.

Ebenfalls in völliger Analogie zum periodischen Fall gilt

Lemma: Falls die FOURIER-Transformationen von f, g und $h(t) = (f \star g)(t)$ existieren, ist $\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)$.

Beweis: Nach dem Satz von FUBINI ist

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\,g(s)\,ds\right) e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\,g(s)e^{-i\omega t}\,dt\right) ds \\
&\underset{u=t-s}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,g(s)e^{-i\omega(u+s)}\,du\right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du\right) g(s)e^{-i\omega s}\,ds \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-i\omega s}\,ds\right) = \widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega)\,,
\end{aligned}$$

wie behauptet. ■

Als erste Anwendung hiervon können wir die FOURIER-Transformierte eines Produkts durch die FOURIER-Transformierten der Faktoren ausdrücken:

Korollar: $\widehat{fg}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f}\star\widehat{g})(\omega)$.

Beweis: Wir wenden das gerade bewiesenen Lemma an auf die FOURIER-Transformierten von f und g; dann ist

$$\widehat{\widehat{f}\star\widehat{g}}(t) = \widehat{\widehat{f}}(t)\cdot\widehat{\widehat{g}}(t)\,.$$

Wie wir wissen, unterscheiden sich FOURIER-Transformation und inverse FOURIER-Transformation durch den Faktor $1/2\pi$ vor der inversen Transformation und das Vorzeichen des Argument, d.h.

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi\cdot f(-t),\quad \widehat{\widehat{g}}(t) = 2\pi\cdot g(-t)\quad\text{und}\quad \widehat{\widehat{f}\star\widehat{g}}(t) = 4\pi^2\cdot f(-t)g(-t)\,.$$

Aus dem gleichen Grund ist $\widehat{\widehat{f}\star\widehat{g}}(t) = 2\pi\cdot(\widehat{f}\star\widehat{g})(-t)$, also

$$2\pi\cdot(\widehat{f}\star\widehat{g})(-t) = 4\pi^2\cdot\widehat{fg}(-t)\quad\text{oder}\quad (fg)(-t) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f}\star\widehat{g})(-t)\,.$$

Dies gilt für alle reellen Zahlen t, deshalb können wir das Minuszeichen links und rechts auch weglassen und haben dann die Behauptung des Korollars. ■

Wie im periodischen Fall folgt auch, daß die Faltung (abgesehen von eventuell vorhandenen Unstetigkeitsstellen) kommutativ und assoziativ ist:

$$f\star g = g\star f\quad\text{und}\quad f\star(g\star h) = (f\star g)\star h\,,$$

denn für die FOURIER-Transformationen der beiden Seiten sind jeweils gleich nach dem Kommutativitätsgesetz und Assoziativitätsgesetz für die Multiplikation komplexer Zahlen.

Eine weitere interessante Konsequenz dieses Lemmas ist, daß sich Faltungen gelegentlich rückgängig machen lassen: $f\star g$ ist durch seine FOURIER-Transformation $\widehat{f}\cdot\widehat{g}$ (fast überall) bestimmt; falls $g(\omega)$ keine Nullstellen hat, kann man die Multiplikation mit $g(\omega)$ durch eine Division rückgängig machen. Eine Grundidee zum Rückgängigmachen der Faltung wäre also die folgende: Ist $h(t)$ die inverse FOURIER-Transformation von $1/\widehat{g}(\omega)$, so hat $(f\star g)\star h$ FOURIER-Transformierte

$$\widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega)\cdot\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega)\cdot\frac{1}{\widehat{g}(\omega} = \widehat{f}(\omega)\,,$$

$(f\star g)\star h$ stimmt also fast überall mit f überein.

Leider ist die Sache aber doch nicht ganz so einfach, denn die Existenz von h ist alles andere als klar: Für eine stark abfallende Funktion $g(\omega)$ ist $1/g(\omega)$ „stark ansteigend“. Das muß aber nicht immer ein Problem sein, denn für praktische Zwecke wird man sowohl den Frequenzbereich, über den integriert wird, als auch den Zeit- oder Ortsbereich oft abschneiden können, so daß nur ein Integral über ein endliches Intervall betrachtet werden muß. Die Formel, die wir gerade benutzt haben, gelten nach dieser Einschränkung des Integrationsintervalls natürlich nicht mehr, zumindest nicht mehr exakt, aber ausgehend von den obigen Formeln kann man mit einigem Geschick doch